

УДК 621.372

## ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОГИБАЮЩИХ ДИСКРЕТНЫХ ФИНИТНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

*Пономарева Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkanv@gmail.com*  
*Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@mail.ru*

## THEORY, METHODS AND ALGORITHMS FOR DETERMINING ENVELOPES OF DISCRETE FINITE REAL SIGNALS ON THE BASIS OF PARAMETRIC FOURIER TRANSFORMATIONS

*Ponomareva N.V., Ponomareva O.V.*

The requirements to the efficiency of digital signal processing systems are constantly growing. Simultaneously the sphere of their application extends and the problems solved by such systems become more complicated. Thus, there is a necessity of theory development and improvement of methods and algorithms for digital processing of discrete finite signals. A lot of methods are based on discrete Fourier transform and discrete Hilbert transform. Discrete Fourier Transform (DFT) has useful analytical and statistical properties and DFT is implemented using fast algorithms (FFT). As a result, FFT has the most important place in digital Fourier processing of finite real signals. However, FFT has the following disadvantages (negative effects in time and frequency domain): aliasing effect, picket fence effect, leakage effect and scalloping effect. To decrease the disadvantages of FFT, the basic theory of digital signal processing in parametric Fourier bases is considered in this paper. Parametric discrete Fourier transform (DFT-P) is the generalization of classical discrete Fourier transform and coincides with DFT at zero parameter value. The parameter in DFT-P allows one to «control» the analytical properties of the unitary transform. Two types of descriptions of discrete finite real (DFR) signals are considered in this paper. The first type is the sum of discrete harmonic components. The second type uses instantaneous parameters of a DFR signal: instantaneous amplitude, instantaneous phase, and envelope. These two types of DFR signal description are widely used in digital processing systems. They allow representing and revealing information about properties and states of investigated objects, phenomena and processes. Discrete Hilbert Transform (DHT) plays an important role in the second type of DFR signal description. The DHT is the only linear operator that allows unambiguously determining the instantaneous parameters of the DFR signal, if quite understandable requirements are met. The study of the properties of discrete Hilbert transform of DFR signals has been carried out in this work, and various types of envelopes of DFR signals have been considered. Envelope determination with parametric Fourier transform were developed and investigated. Appropriate mathematical modeling was performed to confirm the obtained theoretical results.

**Key words:** discrete Hilbert transform, discrete Fourier transform, parametric discrete Fourier transform, signal envelope, instantaneous signal frequency, instantaneous signal phase.

**Ключевые слова** дискретное преобразование Гильберта, дискретное преобразование Фурье, параметрическое дискретное преобразование Фурье, огибающая сигнала, мгновенная частота сигнала, мгновенная фаза сигнала.

На фоне постоянного роста требований к эффективности и результативности применения систем цифровой обработки сигналов, расширения сфер их приложений, наблюдается и постоянное усложнение проблем и проблематики, решаемых современными системами цифровой обработки сигналов. Это приводит к необходимости развития теории, совершенствования методов и алгоритмов цифровой обработки дискретных финитных сигналов, в том числе на основе дискретных преобразований Фурье и дискретного преобразования Гильберта. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ), благодаря своим аналитическим и статистическим свойствам, существованию алгоритмов быстрого преобразования Фурье занимает важнейшее место в цифровой Фурье-обработке финитных действительных сигналов. Однако, ДПФ наряду с достоинствами обладает и принципиальными недостатками, которые проявляются во временной и в частотной областях в виде ряда негативных эффектов: эффектов наложения (aliasing effect), частотокола (picket fence effect), утечки (leakage effect) и зрешковый эффект (scalloping effect). Для борьбы с указанными недостатками ДПФ в работе рассмотрены основы теории цифровой обработки сигналов в параметрических базисах Фурье. Параметрическое дискретное преобразование Фурье является обобщением классического дискретного преобразования Фурье и равно ему при нулевом значении параметра. Введение параметра в ДПФ-П позволяет «управлять» аналитическими свойствами унитарного преобразования. В работе рассмотрено два вида описания дискретных финитных действительных (ДФД) сигналов: в виде суммы дискретных гармонических компонент и в виде, использующем мгновенные параметры ДФД сигнала: мгновенную амплитуду, мгновенную фазу и огибающую. Эти два вида описания ДФД сигналов широко применяются в системах цифровой обработки, поскольку позволяют представлять и выявлять информацию о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений и процессов. Дискретное преобразование Гильберта играет важную роль при втором виде описания ДФД сигналов, объясняется тем, что это единственный линейный оператор, позволяющий однозначно, при выполнении вполне понятных требований, определять мгновенные параметры ДФД сигнала. В работе проведено исследование свойств дискретного преобразования Гильберта ДФД сигналов, рассмотрены различные виды огибающих ДФД сигналов, разработаны и исследованы методы и алгоритмы определения огибающих на базе параметрических преобразований Фурье. Для подтверждения полученных теоретических результатов проведено соответствующее математическое моделирование.

## Введение

В настоящее время происходит постоянное усложнение проблем и проблематики, решаемых современными системами цифровой обработки сигналов (системами ЦОС – *Digital signal processing systems*) в различных областях науки и техники. При этом наблюдается также постоянный рост требований к эффективности и результативности применения систем ЦОС и расширение сфер их приложений. Таковы основные предпосылки для развития теории, совершенствования методов и алгоритмов цифровой обработки дискретных финитных комплексных и действительных сигналов, в том числе на основе дискретных преобразований Фурье и дискретного преобразования Гильберта<sup>1</sup>.

Теоретические и практические вопросы цифровой Фурье-обработки дискретных финитных комплексных (ДФК) сигналов и дискретных финитных действительных (ДФД) сигналов рассмотрены в работах [1, 5-12, 14-25]. В работе [1] изложены основы теории цифровой обработки ДФК и ДФД сигналов в параметрических базисах Фурье. Параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П), аналитические свойства которого рассмотрены в работах [1-3], является обобщением классического дискретного преобразования Фурье и равно ему при нулевом значении параметра. Введение параметра в ДПФ-П позволяет «управлять» аналитическими свойствами унитарного преобразования.

Дискретные преобразования Фурье (ДПФ), благодаря своим аналитическим и статистическим свойствам, существованию алгоритмов быстрого преобразования Фурье (алгоритмов БПФ), занимают важнейшее место в цифровой Фурье-обработке ДФК и ДФД сигналов. Матричные формы прямого и обратного преобразований ДПФ определяются следующими соотношениями:

$$\text{прямое ДПФ: } \mathbf{S}_N = \frac{1}{N} \mathbf{F}_N \mathbf{X}_N \quad (1)$$

$$\text{обратное ДПФ (ОДПФ): } \mathbf{X}_N = \mathbf{F}_N^* \mathbf{S}_N; \quad (2)$$

где \* – знак комплексного сопряжения,  $\mathbf{X}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – представление дискретного финитного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в виде вектора  $N$ -мерного линейного пространства;  $T$  – знак транспонирования;  $\mathbf{S}_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$  – вектор коэффициентов разложения  $\mathbf{X}_N$  по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$\text{def}(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) = W_N^{kn} =$$

$$\cos(\frac{2\pi}{N} kn) - j \sin(\frac{2\pi}{N} kn); \quad k, n = \overline{0, N-1}; \quad (3)$$

задаваемой матрицей  $\mathbf{F}_N$ :

$$\mathbf{F}_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (4)$$

Алгебраические формы прямого и обратного преобразований ДПФ определяются следующими соотношениями:

$$\text{прямое ДПФ: } S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (5)$$

$$\text{обратное ДПФ: } x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn} \quad (6)$$

Известно, что ДПФ наряду с достоинствами обладает и принципиальными недостатками. На практике недостатки ДПФ проявляются во временной и в частотной областях в виде ряда негативных эффектов. Это эффекты наложения (*aliasing effect*), частокола (*picket fence effect*), утечки (*leakage effect*) и гребешковый эффект (*scalloping effect*).

Для решения ряда проблем, возникающих в ЦОС в связи с нежелательными эффектами ДПФ, в [1] предложено обобщение ДПФ в виде параметрического ДПФ (ДПФ-П). Показано, что ДПФ-П представляет собой разложение ДФК и ДФД сигналов по базису параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П):

$$\text{def}_p(k, n, \theta) = W_N^{(k+\theta)n} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n\right], \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (7)$$

ДПФ-П задается в матричной форме следующим соотношением:

$$\mathbf{S}_{N,\theta} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_{N,\theta} \mathbf{X}_N, \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (8)$$

где  $\mathbf{X}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – представление дискретного финитного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в виде вектора  $N$ -мерного линейного пространства;  $T$  – знак транспонирования;  $\mathbf{S}_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s((N-1), \theta)]^T$  – вектор коэффициентов разложения  $\mathbf{X}_N$  по системе ДЭФ-П, задаваемой матрицей  $\mathbf{F}_{N,\theta}$ .

$$\mathbf{F}_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (9)$$

Алгебраические формы преобразований ДПФ-П задаются следующими соотношениями:

<sup>1</sup> Давид Гильберт – великий немецкий математик (1862 – 1943). Дискретное преобразование Гильберта, названное в его честь, позволяет формировать из ДФД сигналов дискретные финитные комплексные сигналы (сигналы ДФК). Практика ЦОС показала, что переход от ДФД сигналов к ДФК сигналам позволяет повысить эффективность и результативность многих операций ЦОС.

$$\text{прямое ДПФ: } S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}; \quad (10)$$

$$\text{обратное ДПФ: } x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}. \quad (11)$$

ДФД сигнал  $x(n)$ ,  $n = \overline{(0, N-1)}$ , может быть представлен:

– в виде суммы дискретных гармонических компонент:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2+1} A_k \cdot \cos(2\pi kn / N + \varphi_k); \quad (12)$$

где  $A_k$  – амплитуда  $k$ -й гармонической компоненты;  $2\pi \cdot k / N$  – нормированная частота  $k$ -й гармонической компоненты;  $\varphi_k = \arctg \{ \text{Im}[S_N(k)] / \text{Re}[S_N(k)] \}$  – фаза  $k$ -й гармонической компоненты,

– или в виде, использующем мгновенные параметры ДФД сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{(0, N-1)}$ :

$$x(n) = A(n) \cdot \cos[\Phi(n)]; \quad (13)$$

где  $A(n)$  – мгновенная амплитуда  $x(n)$  (огibaющая ДФД сигнала  $x(n)$ );  $\Phi(n)$  – мгновенная фаза.

Описание ДФД сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{(0, N-1)}$ , в виде (12), как и описание в виде (13) широко применяется в системах ЦОС. Поскольку они позволяют представлять и выявлять информацию о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений и процессов.

Важная роль, которую играет дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) ДФД сигналов в ЦОС, во многом объясняется следующим. ДПГ – это единственный линейный оператор, позволяющий однозначно, при выполнении вполне понятных требований<sup>2</sup>, определить огibaющую  $A(n)$  и мгновенную фазу  $\Phi(n)$  (13) ДФД сигнала  $x(n)$ :

$$A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_s^2(n)}; \quad n = \overline{(0, N-1)} \quad (14)$$

где  $x_s(n)$  – новый ДФД сигнал (ДПГ сигнала  $x(n)$ ), Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра  $x(n)$  на  $\pi/2$  (на  $90^\circ$ ).

ДПГ позволяет поставить в соответствие ДФД сигналу ДФК сигнал, получившего в зарубежной и частично в отечественной литературе название «аналитического сигнала»<sup>3</sup>:

<sup>2</sup> В работе [10] приведены следующие основные требования. 1. При любом  $A(n) \geq |x(n)|$ . 2. При  $A(n) = |x(n)|$   $A(n)$ ,  $|x(n)|$  имеют общую касательную. 3. Огibaющая гармонического сигнала, заданного на интервале  $n = \overline{(0, N-1)}$ , должна совпадать с его амплитудой  $A$ , если период гармонического сигнала кратен интервалу анализа  $n = \overline{(0, N-1)}$ . 4. Малым, в среднеквадратичном смысле, изменениям  $x(n)$  должны соответствовать малые изменения  $A(n)$ . 5. Мгновенная фаза  $\Phi(n)$  не должны зависеть от мощности сигнала.

<sup>3</sup> В отечественной литературе некоторые авторы совершенно справедливо предпочитают называть аналитический сигнал (15) «гильбертовским сигналом» (см., например, работы [10, 13]). Действительно, аналитический комплексный сигнал вовсе не обязательно

$$x_{AC}(n) = x(n) + jx_s(n). \quad (15)$$

В работе [11] кратко проведено сравнение преимуществ и недостатков существующих методов генерации аналитических сигналов. При этом генерация дискретных аналитических сигналов, по сути, сводится к проектированию<sup>4</sup>. В работе [11] также упомянут алгоритм определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ. Авторы настоящей работы не подвергают сомнению вывод автора работы [11] о том, что из всех методов определения ДПГ самым точным является формирование аналитического сигнала на основе ДПФ. По-видимому, именно этим и объясняется выбор метода генерации аналитического сигнала в среде проектирования инженерных приложений MATLAB (функция *hilbert*). Однако, при практической реализации ДПГ на основе ДПФ выяснилось, что применение этого метода формирования ДПГ связан с преодолением ряда «подводных камней» ЦОС и ставит проблемы и соответствующую им проблематику [14-25], разрешению которых и посвящена настоящая статья.

Задача данной работы – исследование свойств дискретного преобразования Гильберта финитных действительных сигналов, рассмотрение видов огibaющих дискретных финитных действительных сигналов, разработка методов и алгоритмов определения огibaющих на базе параметрических преобразований Фурье, проведение для подтверждения полученных теоретических результатов соответствующего математического моделирования.

## Дискретное преобразование Гильберта дискретных финитных действительных сигналов

Прежде чем перейти к изложению материала данного раздела рассмотрим понятие дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ) и сделаем два замечания.

Если задана некоторая дискретная последовательность  $y(n)$ ,  $n = \overline{-\infty, +\infty}$ , то ее ДВПФ задает ее непрерывный спектр.  $y(n)$  ДВПФ дискретной последовательности  $y(n)$  определяется как ее  $z$ -преобразование на единичной окружности:

$$S_y(f) = S_y(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2, \quad (16)$$

Дискретная финитная последовательность  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  может интерпретироваться как результат взвешивания дискретным прямоугольным окном:

$$w(n) = 1, \quad n = \overline{0, N-1}; \quad w(n) = 0, \quad n = \overline{-\infty, -1}; \\ w(n) = 0, \quad n = \overline{N, +\infty}; \quad (17)$$

некоторой последовательности, заданной на интервале

но должен быть гильбертовским [13]. Для того, чтобы ДФК сигнал (15) являлся гильбертовским необходимо и достаточно, чтобы его спектр Фурье был равен нулю на отрицательных частотах.

<sup>4</sup> Комплексная фильтрация основана на применении комплексного фильтра, реализуемого двумя действительными КИХ-фильтрами с равными АЧХ, ФЧХ которых отличается на  $\pi/2$ .

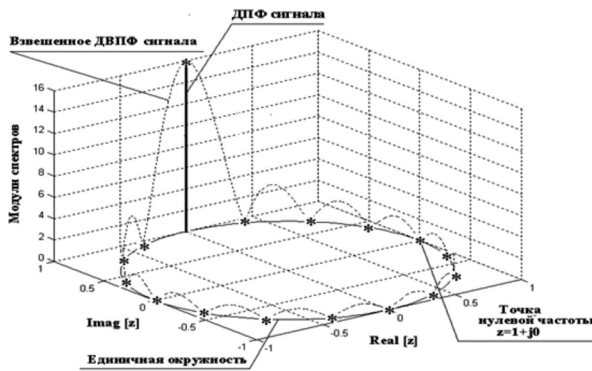
$n = -\infty, +\infty$ . Взвешенное ДВПФ, задается следующим соотношением:

$$S_x(f) = S_x(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (18)$$

Исходя из выражений (16), (17) и (18) непосредственно следует что бины<sup>5</sup>  $S_N(k)$  (5) равны значениям взвешенного ДВПФ на единичной окружности в точках  $\frac{2\pi}{N}k, k = \overline{0, N-1}$ :

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(j\frac{2\pi}{N}k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n). \quad (19)$$

Рис. 1 иллюстрирует понятие взвешенного ДВПФ на примере экспоненты.



Взвешенное ДВПФ сигнала  $x(n)$  обозначено пунктирной линией, а значения ДПФ сигнала обозначены звездочками \*,  $z = \exp(-j2\pi / N)$

Рис. 1. Взвешенное дискретно-временное преобразование  $x(n) = \exp((j \cdot 2\pi / N) \cdot k \cdot n); n = \overline{0, N-1}; N = 16, k = 4$

**Замечание 1.** ДПФ связывает между собой две области: временную область и частотную область. При этом процесс дискретизации или периодизации сигнала в одной из областей приводит соответственно к периодизации или дискретизации сигнала в другой области. Таким образом, ДПФ периодически и дискретно, как во временной области, так и в частотной области.

**Замечание 2.** Операция взвешивания дискретным прямоугольным окном дискретного сигнала в одной области приводит к свертке с функцией вида  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  в другой области.

Идея алгоритма определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ заключается в следующем. Известно, что бины ДПФ при четном  $N$  (5) ДФД сигналов (за исключением бинов  $S_N(0)$  и  $S_N(N/2)$ ) обладают эрмитовой симметрией (комплексной сопряженностью)<sup>6</sup>:

$$S_N(k) = S_N^*(N - k); k = \overline{1, N/2 - 1}. \quad (20)$$

Поэтому, если положить нулю бины ДПФ на отрицательных частотах и выполнить ОДПФ полученного одностороннего спектра (6), то получим аналитический сигнал. На действительной части аналитического сигнала получим исходный сигнал, а на мнимой части – сигнал ДПГ (15). Алгоритм определения на основе ДПФ аналитического сигнала в частотной области приведен на рис. 2.

Проведем анализ работы этого алгоритма на модельных сигналах. Пусть задан гармонический ДФД сигнал:

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right); k = 4, N = 16, n = \overline{0, N-1}. \quad (21)$$

Теоретические значения  $x(n)$  и  $x_3(n)$  приведены соответственно в табл. 1 и 2.

Значения аналитического сигнала  $x_{AC}(n)$  (15), полученные с помощью алгоритма определения аналитического сигнала в частотной области на основе ДПФ, приведены в табл. 3.

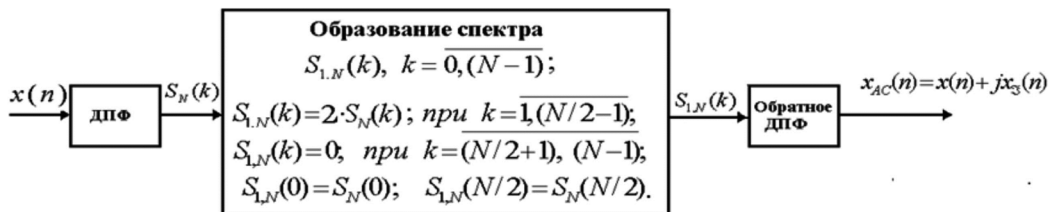


Рис. 2. Алгоритм определения аналитического сигнала в частотной области на основе ДПФ

Таблица 1

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x(n)$	1.0000	-0.3827	-0.7071	0.9239	0.0000	-0.9239	0.7071	0.3827
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x(n)$	-1.0000	0.3827	0.7071	-0.9239	0.0000	0.9239	-0.7071	-0.3827

<sup>5</sup> Отдельные коэффициенты ДПФ часто называют бинами («Bin» – в переводе с английского «хранилище», «ларь»), что подчеркивает тот факт, что энергия сигнала под кривой  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  (передаточная характеристика фильтра ДПФ) попадает в «хранилище» данного коэффициента ДПФ.

<sup>6</sup> При нечетном  $N$  бины ДПФ, за исключением бина  $S_N(0)$ , также обладают эрмитовой симметрией.

Таблица 2

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_3(n)$	0	0.9239	-0.7071	-0.3827	1.0000	-0.3827	-0.7071	0.9239
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_3(n)$	0.0000	-0.9239	0.7071	0.3827	-1.0000	0.3827	0.7071	-0.9239

Таблица 3

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_{AC}(n)$	1.0000 0.0000i	-0.3827 +0.9239i	-0.7071 - 0.7071i	0.9239 - 0.3827i	0.0000 +1.0000i	-0.9239 - 0.3827i	0.7071 - 0.7071i	0.3827 +0.9239i
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{AC}(n)$	-1.0000 0.0000i	0.3827 - 0.9239i	0.7071 +0.7071i	-0.9239 +0.3827i	0.0000 -1.0000i	0.9239 +0.3827i	-0.7071 +0.7071i	-0.3827 -0.9239i

Таблица 4

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(n)$	1.0000	-0.5556	-0.3827	0.9808	-0.7071	-0.1951	0.9239	-0.8315
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_1(n)$	0.0000	0.8315	-0.9239	0.1951	0.7071	-0.9808	0.3827	0.5556

Таблица 5

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(n)$	0	0.8315	-0.9239	0.1951	0.7071	-0.9808	0.3827	0.5556
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_1(n)$	-1.0000	0.5556	0.3827	-0.9808	0.7071	0.1951	-0.9239	0.8315

Таблица 6

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_{AC}(n)$	1.0000 +0.4052i	-0.5556 +1.0317i	-0.3827 -0.8533i	0.9808 +0.2906i	-0.7071 +0.7383i	-0.1951 -0.9439i	0.9239 +0.4033i	-0.8315 +0.5455i
$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{AC}(n)$	-0.0000 -0.9818i	0.8315 +0.4957i	-0.9239 +0.4033i	0.1951 -1.1110i	0.7071 +0.7383i	-0.9808 -0.0835i	0.3827 -0.8533i	0.5556 -0.2251i

Сравнивая теоретические значения сигналов  $x(n)$  (табл. 1),  $x_3(n)$  (табл. 2) со значениями аналитического сигнала  $x_{AC}(n)$  (табл. 3), полученными с помощью алгоритма определения ДПГ на основе ДПФ (рис. 2), мы видим идеальное их совпадение. При этом как и следует из теории (см. сноску 2) мгновенная амплитуда гармонического ДФД сигнала  $x(n)$  (21) совпадает с его амплитудой, которая равна единице.

Несколько изменим модельный сигнал (21). Пусть на интервале анализа  $N$  ДПФ гармонический ДФД сигнал  $x_1(n)$  имеет нецелое число периодов (т.е. частота гармонического ДФД сигнала является дробной величиной  $x_1(n)$ , например,  $(k + 1/2)$ ):

$$x_1(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) n \right]; \quad (22)$$

$$k = 4, \quad N = 16, \quad n = 0, N-1.$$

Повторив этапы вышеприведенного моделирования, получим значения сигналов  $x(n)$ ,  $x_3(n)$ ,  $x_{AC}(n)$ , которые приведены соответственно в табл. 4, 5, 6.

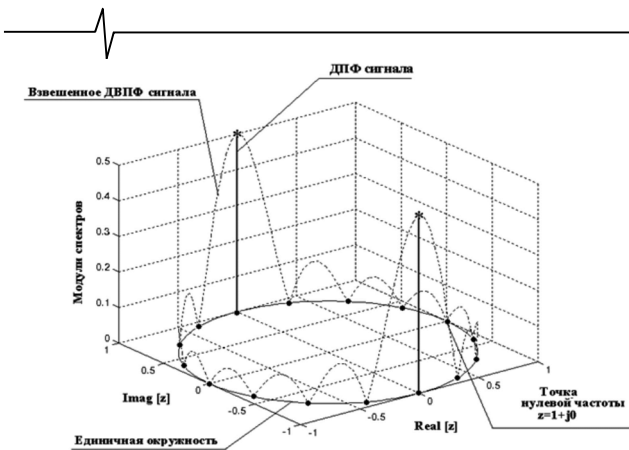
Сравнивая теоретические значения сигналов  $x_1(n)$  (табл. 4),  $x_3(n)$  (табл. 5), со значениями аналитического сигнала  $x_{AC}(n)$  (табл. 6), полученными с помощью

алгоритма определения ДПГ на основе ДПФ (рис. 2) фиксируем отсутствие полного совпадения. На действительной части аналитического сигнала  $x_{AC}(n)$  (табл. 6) сигнал совпадает с теоретическим сигналом  $x_1(n)$ , а на мнимой части сигнала  $x_{AC}(n)$ , сигнал не совпадает с теоретическим сигналом  $x_3(n)$  (табл. 5). Важность выявления причин этого явления представляется очевидной, поскольку оно (явление) приводит к различным огибающим ДФД сигналов.

В качестве рабочей гипотезы причины несовпадения теоретических результатов с результатами моделирования во втором случае (22) примем гипотезу о том, что причины указанного явления связаны, во-первых, с проявлением негативных эффектов ДПФ и, во-вторых, со свойствами собственно преобразования Гильберта.

Во-первых, при выполнении ДПФ сигнала (21) отсутствует проявление эффекта утечки, поскольку бины ДПФ попадают в нули взвешенного ДВПФ (рис. 3). При выполнении ДПФ сигнала (22) проявляется эффект утечки, поскольку бины ДПФ попадают не в нули функции вида  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ . (рис. 4). Другими словами, отсутствие про-

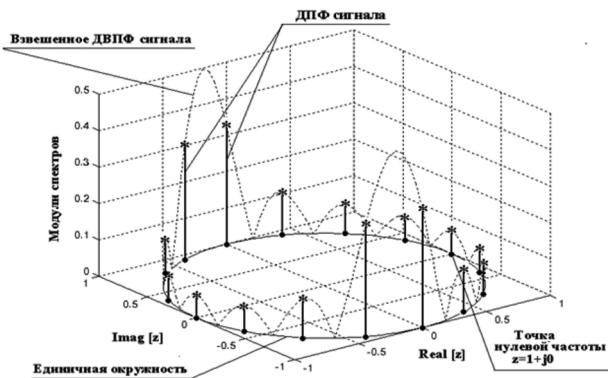
явления эффекта утечки при анализе сигналов вида (21), можно объяснить и тем, что периодическое продолжение ДФД сигнала (21) (см. замечание 1) совпадает с его реальным продолжением.



Взвешенное ДВПФ сигнала  $x(n)$  обозначено пунктирной линией; значения ДПФ сигнала обозначены звездочками, сетка частот ДПФ – точками;  $z = \exp(-j2\pi/N)$ .

Рис. 3. Взвешенное дискретно-временное преобразование

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right); \quad n = \overline{0, N-1}; \quad N = 16, \quad k = 4$$



Взвешенное ДВПФ сигнала  $x(n)$  обозначено пунктирной линией; значения ДПФ сигнала обозначены звездочками, сетка частот ДПФ – точками;  $z = \exp(-j2\pi/N)$ .

Рис. 4. Взвешенное дискретно-временное преобразование

$$x_1(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)n\right]; \quad n = \overline{0, N-1}; \quad N = 16, \quad k = 4$$

Во-вторых, ДПГ не является локальным преобразованием. При определении ДВПФ (16) ДФД сигнала  $y(n)$  на интервале  $n = -\infty, +\infty$  каждое значение ДПГ сигнала  $y_3(n)$  определяется всеми отсчетами ДФД сигнала на

интервале  $n = -\infty, +\infty$ . Из соотношения (19) непосредственно следует что бины  $S_N(k)$  (5) равны значениям взвешенного ДВПФ на единичной окружности в точках  $\frac{2\pi}{N}k$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ . Следовательно, ДПГ сигнал  $x_3(n)$ , полученный методом ДПФ, представляет собой наложение множества копий ДПГ сигнала  $y_3(n)$ , полученных методом ДВПФ. Однако в силу характера функции  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$  (имеется в виду достаточно быстрое спадание ее значений) ДПГ можно отнести к асимптотическим локальным преобразованиям.

Отметим, что при анализе сигналов вида (21) эффект наложения также имеет место быть, но при этом свойство нелокальности ДПГ не проявляется. Поскольку мы берем отсчеты  $x_3(n)$  в нулях функции вида  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ . Другими словами, при определении на

основе ДПФ ДПГ сигналов вида (21) эффект наложения есть, а его проявления нет, что и объясняет совпадение теоретических результатов (табл. 1 и табл. 2) с результатами эксперимента на моделях (табл. 3).

Рассмотрим применение ДПФ-П при значении параметра  $\theta = 1/2$  для анализа сигналов (22). Алгоритм определения аналитического сигнала в частотной области методом ДПФ-П приведен на рис. 5. Результаты работы алгоритма определения аналитического сигнала в частотной области методом ДПФ-П при значении параметра  $\theta = 1/2$  приведены в табл. 7.

Сравнивая теоретические значения сигналов  $x(n)$  (табл. 4),  $x_3(n)$  (табл. 5) со значениями аналитического сигнала  $x_{AC}(n)$  (табл. 7), которые полученными с помощью алгоритма определения ДПГ на основе ДПФ-П (рисунок 5), мы видим идеальное их совпадение. Действительно, при выполнении ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$  сигнала (22) отсутствует проявление эффекта утечки, поскольку бины ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$  попадают в нули функции вида  $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$  (рис. 6).

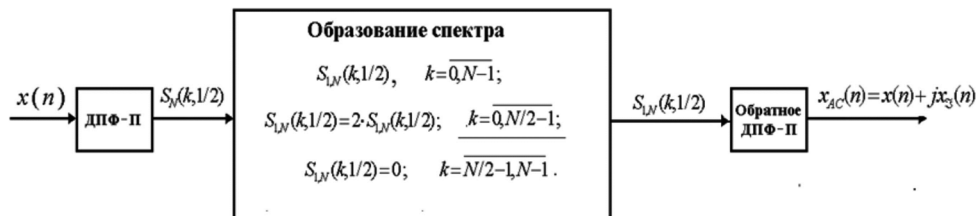
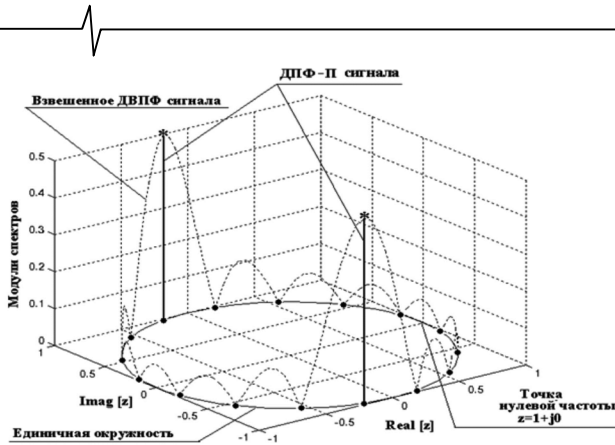


Рис. 5. Алгоритм определения аналитического сигнала в частотной области на основе ДПФ-П при значении параметра  $\theta = 1/2$

Таблица 7

$n$	$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_{AC}(n)$	$x_{AC}(n)$	1.000	-0.5556	-0.3827	0.9808	-0.7071	-0.1951	0.9239	-0.8315
		0.000i	+0.8315i	-0.9239i	+0.1951i	+0.7071i	-0.9808i	+0.3827i	+0.5556i
$n$	$n$	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{AC}(n)$	$x_{AC}(n)$	-0.000	0.8315	-0.9239	0.1951	0.7071	-0.9808	0.3827	0.5556
		-1.000i	+0.5556i	+0.3827i	-0.9808i	+0.7071i	+0.1951i	-0.9239i	+0.8315i



Взвешенное ДВПФ сигнала  $x(n)$  обозначено пунктирной линией; значения ДПФ-П сигнала обозначены звездочками, сетка частот ДПФ-П – точками;  $z = \exp(-j2\pi/N)$ .

Рис. 6. Взвешенное дискретно-временное преобразование

$$x_1(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) n \right]; \quad n = \overline{0, N-1};$$

$$N = 16, k = 4; \theta = 1/2$$

Другими словами, отсутствие проявления эффекта утечки при анализе сигналов вида (22) методом ДПФ-П при параметре  $\theta = 1/2$ , можно объяснить тем, что параметрическое  $N$  – периодическое продолжение ДФД сигнала (22), «навязываемое» ДПФ-П, при значении параметра  $\theta = 1/2$  совпадает с реальным продолжением ДФД сигнала (22) [1].

**Замечание 3.** В теории спектрального анализа ДФД и ДФК сигналов в том или ином дискретном, полном и ортогональном базисе сдвиг сигнала определяется как некоторая операция перестановки его отсчетов. Этот сдвиг, в свою очередь, определяет и некоторую операцию периодического продолжения исходного сигнала в этом базисе. Базисная система ДЭФ-П при определенном  $\theta$  задает продолжение исходного сигнала в виде параметрической  $N$ -периодичности:

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta \cdot N \cdot \text{ent}[n/N]}; \quad (23)$$

где  $\text{ent}[\cdot]$  – символ взятия целой части.

В частном случае при параметре  $\theta = 1/2$  мы приходим к новому понятию  $N$ -периодичности ДФД сигнала:  $N$ -антипериодическому ДФД сигналу:

$$x_{1/2}(n + N) = -x_{1/2}(n). \quad (24)$$

Интересно отметить, что функции  $\cos(\alpha)$  и  $\sin(\beta)$  являются антипериодическими функциями с периодом  $\pi$  и периодическими функциями с периодом  $2\pi$ .

Рассмотрим определение дискретного преобразования Гильберта ДФД сигналов на основе аппроксимации непрерывного спектра ДВПФ  $S_e(f)$  (16). Непосредственная реализация методами ЦОС, как ДВПФ, так и сигналов вида (16), по очевидной причине невозможна. Но возможно аппроксимировать непрерывный спектр ДВПФ  $S_e(f)$  (16), вычисляя его отсчеты с заданным интервалом по частоте. В ЦОС для определения значений ДВПФ дискретного финитного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  между значениями коэффициентов (бинов)

ДПФ широко применяется операция дополнения нулями во временной области (ОДНВ). ОДНВ – это искусственное увеличение интервала определения  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  за счет добавления нулевых отсчетов во временной области [5, 11, 12]. Отметим, что применение ОДНВ, позволяет существенно уменьшить влияние таких негативных эффектов ДПФ как: эффектов наложения, частотокола, утечки и гребешкового эффекта.

**Замечание 4.** ДПГ на основе ДВПФ (как и непрерывное преобразование Гильберта – НПГ) физически не реализуемо, поскольку требует знания значений исходного ДФД сигнала на бесконечном интервале. Выход из этого положения – доопределение, тем или иным способом, исходного ДФД сигнала на всю временную ось. Можно, например, выбрать продолжение исходного сигнала в виде его периодического продолжения (ДПФ). Или, дополнить исходный сигнал некоторым количеством нулевых отсчетов с помощью ОДНВ, принять полученный новый сигнал за период периодического сигнала. Наконец, применив ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ , можно получить антипериодическое продолжение исходного ДФД сигнала. В этом случае также возможно применение ОДНВ с последующим периодическим продолжением, полученного ДФД сигнала.

Алгоритмами определения ДПГ в частотной области, рассмотренными выше, возможно получение различных видов гильбертовских (аналитических) сигналов (см. сноску 3). Выбор дискретного преобразования Фурье (классического – ДПФ или параметрического – ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ ) и выбор формирования из исходного ДФД сигнала нового ДФД сигнала с помощью ОДНВ позволяет генерировать, по крайней мере, четыре вида гильбертовских (аналитических) сигналов.

**Вид 1 аналитического сигнала.** Гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ:

$$x_{ГС, ДПФ}(n) = x(n) + jx_{\Sigma, ДПФ}(n); \quad (25)$$

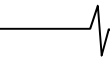
где  $x_{ГС, ДПФ}(n)$  – гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ;  $x_{\Sigma, ДПФ}(n)$  – новый ДФД сигнал (ДПГ сигнала  $x(n)$ ), Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра  $x(n)$  на  $\pi/2$ .

**Вид 2 аналитического сигнала.** Гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ :

$$x_{ГС, ДПФ-П, 1/2}(n) = x(n) + jx_{\Sigma, ДПФ-П, 1/2}(n); \quad (26)$$

где  $x_{ГС, ДПФ-П, 1/2}$  – гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ ;  $x_{\Sigma, ДПФ-П}(n)$  – новый ДФД сигнал (ДПГ сигнала  $x(n)$ ), параметрический Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно параметрического Фурье-спектра  $x(n)$  на  $\pi/2$ .

**Вид 3 аналитического сигнала.** Гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ с применением операции ОДНВ:



$$x_{ГС, ОДНВ, ДПФ}(n) = x_{ОДНВ}(n) + jx_{\mathcal{H}, ОДНВ, ДПФ}(n); \quad (27)$$

где  $x_{ГС, ОДНВ, ДПФ}$  – гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ;  $x_{ОДНВ}(n)$  – ДФД сигнал, полученный из ДФД сигнала  $x(n)$ , путем его дополнения нулевыми отсчетами;  $x_{\mathcal{H}, ОДНВ, ДПФ}(n)$  – ДПГ сигнала  $x_{ОДНВ}(n)$ , Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра  $x_{ОДНВ}(n)$  на  $\pi/2$ .

**Вид 4 аналитического сигнала.** Гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ :

$$x_{ГС, ДПФ-П, \nu_2}(n) = x_{ОДНВ}(n) + jx_{\mathcal{H}, ОДНВ, ДПФ-П, \nu_2}(n). \quad (28)$$

где  $x_{ГС, ДПФ-П, \nu_2}(n)$  – гильбертовский сигнал, полученный алгоритмом определения ДПГ в частотной области на основе ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ ;  $x_{\mathcal{H}, ОДНВ, ДПФ-П, \nu_2}(n)$  – новый ДФД сигнал (ДПГ сигнала  $x_{ОДНВ}(n)$ ), параметрический Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно параметрического Фурье-спектра  $x_{ОДНВ}(n)$  на  $\pi/2$ .

В качестве примера ДФД сигнала для генерации огибающей выберем произведение двух косинусоид:

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_1n\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_2n\right), \quad (29)$$

где  $n = \overline{0, N-1}$ ;  $N = 128$ ;  $k_1 = 1$ ;  $k_2 = 8$ .

Применив формулы суммы и разности тригонометрических функций, соотношение (29) представим в следующем виде:

$$x(n) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 + k_2)n\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 - k_2)n\right). \quad (30)$$

Исходя из вышеизложенного материала, ДПГ сигналов  $x(n)$  (29) и (30) описывается соотношением:

$$x_{\mathcal{H}}(n) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 + k_2)n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 - k_2)n\right). \quad (31)$$

После несложных математических преобразований получим согласно формуле (14) теоретические значения огибающей сигнала (29) и (30):

$$A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\mathcal{H}}^2(n)} = \left| \cos\frac{2\pi}{N}k_1n \right|. \quad (32)$$

ДФД сигнал (30) и его теоретическая огибающая приведены на рис. 7.

В качестве тестовых ДФД сигналов для генерации огибающих гильбертовских сигналов, задаваемых соотношениями (25, 26), выберем сигнал вида (29) при различных значениях частот.

**Тест 1.**

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_1n\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_2n\right); \quad (33)$$

**Тест 2.**

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 + 1/2)n\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_2n\right); \quad (34)$$

**Тест 3.**

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k_1n\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_2 + 1/2)n\right); \quad (35)$$

**Тест 4.**

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_1 + 1/2)n\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k_2 + 1/2)n\right); \quad (36)$$

где  $n = \overline{0, N-1}$ ;  $N = 128$ ;  $k_1 = 1$ ;  $k_2 = 8$ .

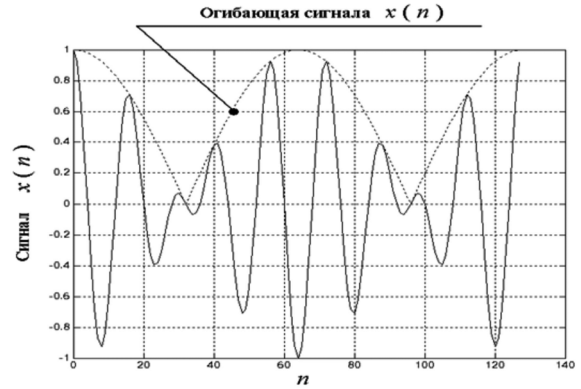


Рис. 7. Дискретный финитный действительный сигнал (30) и его огибающая

На рис. 8 и 9 приведены результаты тестирования и построения гильбертовских огибающих аналитических сигналов вида 1 и вида 2 для тестов 1, 2, 3 и 4 соответственно.

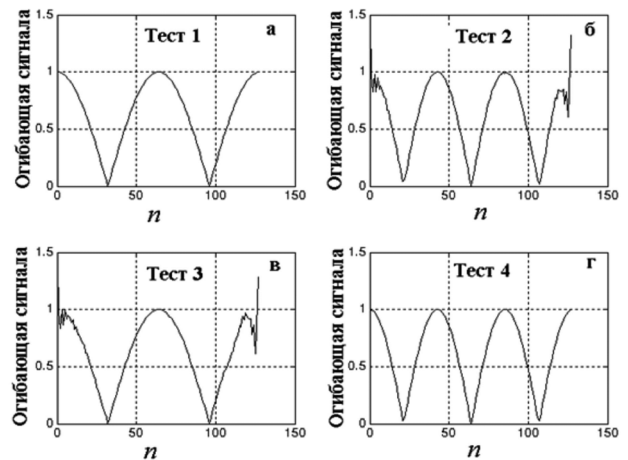
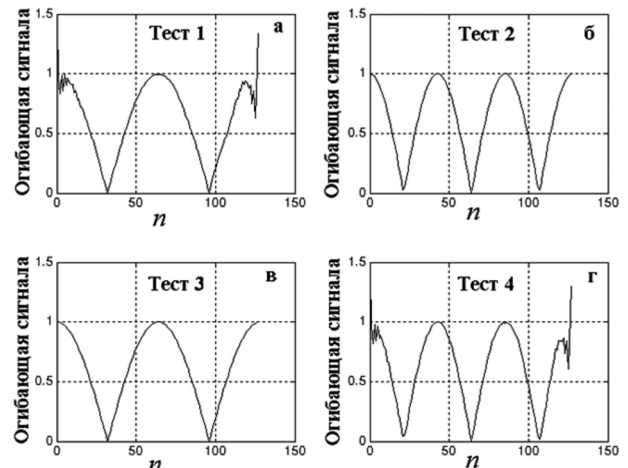


Рис. 8. Гильбертовские огибающие аналитического сигнала вида 1, для тестов: а – 1, б – 2, в – 3 и г – 4





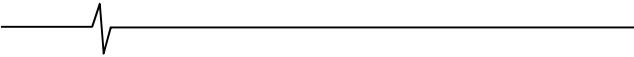


Рис. 9. Гильбертовские огибающие аналитического сигнала вида 2, для тестов: а – 1, б – 2, в – 3 и г – 4

В качестве тестовых ДФД сигналов для генерации огибающих гильбертовских сигналов видов 3 и 4, задаваемых соотношениями (27, 28), выберем тесты 1, 2, 3 и 4, каждый из которых дополним 128 нулевыми отсчетами (ОДНВ). Полученные тесты обозначим соответственно как тесты 5, 6, 7 и 8.

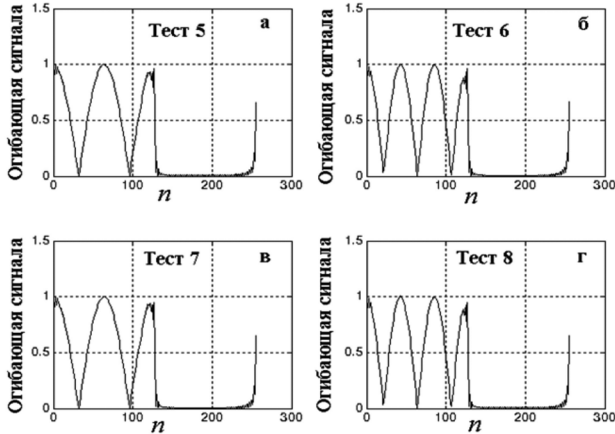


Рис. 10. Гильбертовские огибающие аналитического сигнала вида 3, для тестов: а – 5, б – 6, в – 7 и г – 8

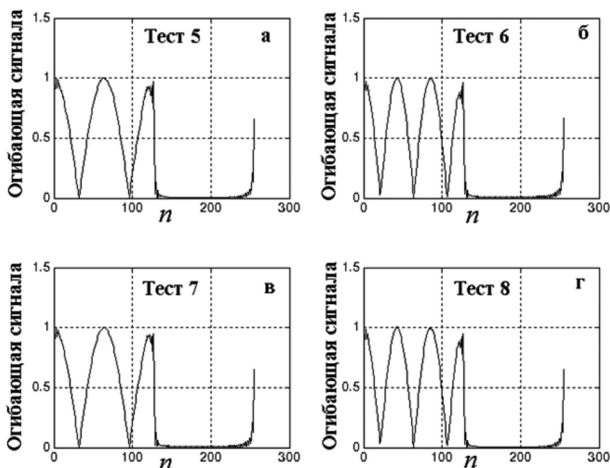


Рис. 11. Гильбертовские огибающие аналитического сигнала вида 4 для тестов: а – 5, б – 6, в – 7 и г – 8

Анализ огибающих ДФД сигналов (тестов 1-8), приведенных на рисунках 8-11, позволяет сделать следующие выводы:

Согласованность базисов применяемого дискретного преобразования Фурье со структурой ДФД сигналов крайне важна, поскольку позволяет получить меньшую абсолютную и относительную погрешность определения огибающих.

Дискретное преобразование Гильберта не является локальным преобразованием. Однако в силу характера функции  $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$  (достаточно быстрое спадание функции) дискретное преобразование Гильберта может отнесено к асимптотически локальным преобразованиям. Именно этот эффект четко проявляется на рис. 10 и 11 в характере огибающих тестов 5-8.

Операция дополнения ДФД сигналов нулевыми отсчетами позволяет в целом уменьшить абсолютную и

относительную погрешность определения огибающих.

## Заключение

Из всех методов определения аналитического сигнала (реализация дискретных преобразователей Гильберта во временной области методами КИХ-фильтрации, методами комплексной фильтрации и определение дискретного преобразования Гильберта в частотной области на основе ДПФ) самым точным является формирование аналитического сигнала на основе ДПФ.

Выбор дискретного преобразования Фурье (классического – ДПФ или параметрического – ДПФ-П с параметром  $\theta = 1/2$ ) и выбор формирования из исходного ДФД сигнала нового ДФД сигнала с помощью ОДНВ позволяет генерировать, по крайней мере, четыре вида гильбертовских (аналитических) сигналов.

Огибающие различных видов ДФД сигналов имеют существенные различия на концах интервала определения, как при применении операции дополнения нулевыми отсчетами во временной области, так без применения последней.

Не принятие во внимание при цифровой Фурье-обработке ДФД сигналов вида используемой огибающей, может приводить к потере информации о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений и процессов, а также досадным ошибкам.

## Литература

1. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базах Фурье: дис... д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.
2. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области. Современные информационные и электронные технологии, 2014. №15. С. 183-184.
3. Пономарева Н.В., Пономарева О.В., Хворенков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области. Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33-40
4. Ponomareva Olga, Ponomarev Alexey, Smirnova Natalia. Hilbert envelope extraction from real discrete finite signals considering the nonlocality of Hilbert transform. 22<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2020. 22. 2020. С. 9213286.
5. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
6. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. 406 p.
7. Прэйт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. 790 с.
8. Вакман Д.Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала. Радиотехника и электроника, 1972. №5. С. 973-978.
9. Ванштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
10. Финк Л.М. Сигналы. Помехи. Ошибки. М.: Радио и связь, 1984. 256 с.

11. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов / 2-е изд., пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс». 2006. 636 с.
12. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing, New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.
13. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию /А.М.Трахтман. М.: Сов. радио. 1972, 352 с.
14. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7)
15. Olga V. Ponomareva, Alexey V. Ponomarev and Natalya V. Smirnova Sliding Spatial Frequency Processing of Discrete Signals. Springer Nature.Switzerland AG 2020. M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_8).
16. Olga V. Ponomareva, Alexey V. Ponomarev and Natalya V. Smirnova Interpolation of Real and Complex Discrete Signals in the Spatial Domain. Springer Nature Switzerland AG 2020.M. Favorskaya and L. C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_9)
17. Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Complex-Conjugate Symmetry of Coefficients of Two-Dimensional Discrete Fourier Transform with Variable Parameters of Real Signals 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022, 2022.Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Methods for Increasing Speed of Two-Dimensional Discrete Fourier Transform of 2D Finite Discrete Signals 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022, 2022.
18. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. 2D Discrete Fast Fourier Transform with variable parameters.

- 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022, 2022.
19. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Evolution of One-Dimensional and Two-Dimensional Discrete Fourier Transform 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022, 2022.
20. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Fast Algorithms for Two-Dimensional Discrete Fourier Transform of Vibroacoustic Signals in Solving Problems of Control and Technical Condition of Machines and Mechanisms 2022 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2022, 2022.
21. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Two-Dimensional Discrete Fourier Transform with Variable Parameters in Solving Fundamental Problems of Dynamics and Vibrodiagnostics of Machines. 2022 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2022, 2022.
22. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples. Information and Control Systems. 2021. № 1 (110). С. 55-64.
23. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Смирнова Н.В. Алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье/ Информационные технологии. 2022. Т. 28. № 1. С. 9-19.
24. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Двумерные быстрые преобразования Фурье с варьируемыми параметрами. Цифровая обработка сигналов. 2022. № 3. С. 3-13.
25. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Перекрестная комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов/ Цифровая обработка сигналов. 2022. № 4. С. 3-12.

## НОВЫЕ КНИГИ

**Поборчая Н.Е.**

**Методы и алгоритмы оценивания параметров канала связи в условиях априорной неопределенности в системах с приемником прямого преобразования: Учебное издание для вузов, М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2023 г. 240 с.: ил.**

Изложены методы и алгоритмы совместного оценивания параметров сигнала (канала связи) в условиях априорной неопределенности относительно статистических характеристик канала связи и законов распределения шумов. Особое внимание уделено системам с приемником прямого преобразования. Рассмотрены вопросы синтеза и анализа процедур оценивания для систем связи с одной передающей и приемной антенной (SISO), с несколькими передающими и приемными антеннами (MIMO), а также для систем с ортогональным частотным мультиплексированием (OFDM).

Предложенные алгоритмы способствуют повышению помехоустойчивости приема информации или снижению вычислительной сложности процедур обработки сигнала.

Для научных работников, инженеров и аспирантов. Может быть полезна студентам старших курсов и магистрантам, обучающимся по направлению подготовки «Радиотехника» и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

