

## АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕДУР КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ И ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ ОПОРНЫХ СИГНАЛАХ

*Кузьмин Е.В., к.т.н., доц., доцент кафедры радиотехники ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»,  
e-mail: ekuzmin@sfu-kras.ru, kuzminev@mail.ru*

### ANALYSIS OF THE FREQUENCY RESPONSES OF THE CORRELATION PROCESSING PROCEDURES FOR ARBITRARY AND PHASE SHIFT KEYING REFERENCE SIGNALS

*Kuzmin E.V.*

*Analytical expressions for dot products of a harmonic signal with arbitrary parameters and quadrature reference signals have been analytically obtained. The Rayleigh identity is used as a methodological basis, which made it possible to calculate the above dot products in the frequency domain. The general case is considered, which assumes reference signals with a known spectrum (but without specifying them), as well as a special case in which analytical solutions are obtained for spread spectrum phase shift keying reference signals generated by a binary pseudo-random sequence. The behavior of dot products – responds of quadrature correlators to an external harmonic signal for one and  $M > 1$  periods of the reference phase shift keying signal is studied. The frequency responses of typical correlation processing procedures are obtained: a quadrature correlation scheme, a family of phase discriminators, and an early-late time-delay discriminator. Simulation modeling was carried out and confirmed the correctness of the analytical solutions obtained in the article, which illustrated graphically.*

**Key words:** correlator, frequency response, spread spectrum phase shift keying signal, phase discriminator, early-late time-delay discriminator, signal delay, Fourier transform, Rayleigh identity.

**Ключевые слова** коррелятор, частотная характеристика, шумоподобный сигнал с фазовой манипуляцией, фазовый дискриминатор, ранне-поздний временной дискриминатор, задержка сигнала, преобразование Фурье, формула Рэлея.

#### Введение

Корреляторы широко используются в практике приема и обработки сигналов, являются основой для построения различных устройств и систем. Одним из наиболее популярных примеров применения корреляторов является квадратурная корреляционная схема<sup>1</sup> (рис. 1), находящая применение, в частности, при построении процедур поиска, различения и обнаружения сложных<sup>2</sup> сигналов (см., например, [1, с. 81], [2, с. 123]), а также позволяющая формировать максимально-правдоподобные оценки амплитуды и фазы<sup>3</sup> сигналов [3, с. 593]. Кроме того, корреляторы применяются для реализации дискриминаторов<sup>4</sup> (рис. 2, 3), являющихся важнейшими структурными элементами следящих измерителей параметров сигналов [2, с. 146, 155].

*Получены аналитические выражения для скалярных произведений гармонического сигнала с произвольными параметрами и квадратурных опорных сигналов. В качестве методической основы, позволившей вычислить указанные скалярные произведения в частотной области, применена обобщенная формула Рэлея. Рассмотрен общий случай, предполагающий опорные сигналы с известным спектром (но без их конкретизации), а также частный случай, при котором аналитические решения получены для шумоподобных фазоманипулированных опорных сигналов, порожденных бинарной псевдослучайной последовательностью. Исследовано поведение скалярных произведений – откликов квадратурных корреляторов на внешний гармонический сигнал для одного и  $M > 1$  периодов опорного фазоманипулированного сигнала. Получены частотные характеристики типовых процедур корреляционной обработки: квадратурной корреляционной схемы, семейства фазовых дискриминаторов, ранне-позднего временного дискриминатора. Проведено имитационное моделирование, подтвердившее правильность полученных в статье аналитических решений, проиллюстрированных графически.*

<sup>1</sup> Квадратурный корреляционный приемник. Примененные на рис. 1–3 обозначения элементов структурных схем являются общепринятыми, поэтому дополнительно не оговариваются, а обозначения сигналов раскрываются по тексту статьи.

<sup>2</sup> В частности, шумоподобных сигналов (ШПС).

<sup>3</sup> При дополнении схемы (рис. 1) модулем взятия арктангенса тригонометрического от отношения выходных эффектов квадратурных каналов.

<sup>4</sup> К примеру, – временных (дискриминаторов задержки), частотных, фазовых.

Экспериментально показано [4, с. 208], что при внешнем гармоническом сигнале значения выходной величины коррелятора могут существенно варьироваться в зависимости от частотного положения такого сигнала. Встречающееся в практике разнообразие возможных вариантов совместного использования группы корреляторов, с целью построения обозначенных выше и иных

процедур<sup>5</sup> обработки сигналов, определяет необходимость получения аналитических выражений для их частотных характеристик (ЧХ), под которыми будем понимать совокупность значений выходных эффектов (откликов), получаемых при различных частотах внешнего гармонического сигнала. Это востребовано для выявления особенностей ЧХ, и оказывается чрезвычайно полезным при определении отклика произвольной процедуры<sup>6</sup> корреляционного типа на внешнее гармоническое воздействие с произвольными параметрами, которое в общем случае может трактоваться как измерительный сигнал (ИС), а в частном – к примеру, как помеховый сигнал. Аналитические решения для выходного эффекта процедур корреляционной обработки – отклика на ИС, позволяют проводить теоретический анализ воздействия ИС, исключают необходимость разработки соответствующих имитационных моделей, что облегчает и ускоряет процесс решения практических задач, открывает возможность формализации в частотной области разнообразных комбинаций из групп корреляторов. Вместе с тем в литературе недостаточно освещены такие вопросы. Среди известных работ наиболее близки по тематике следующие. Так, в уже процитированной монографии [4, с. 208] представлены результаты экспериментального исследования, демонстрирующие неравномерность значений отклика коррелятора на помеховый гармонический сигнал при конкретной псевдослучайной последовательности (ПСП), образующей полезный фазоманипулированный (ФМ) сигнал, выступающий опорным для коррелятора. В статье [5] представлена рассчитанная ЧХ фильтра, согласованного с ФМ-сигналом. В статье [6] экспериментально исследуется ЧХ специфического корреляционного устройства, построенного на основе цифровой элементной базы и персонального компьютера. Известны также публикации [7, с. 215-219], [8-17] и др., в которых неравномерность частотных характеристик процедур обработки сигналов представлена косвенно – т.е. показана неравномерность зависимостей, характеризующих тот или иной показатель качества обработки в зависимости от частоты внешнего гармонического сигнала, являющегося помеховым. В работе автора [18] получено обобщенное выражение частотной характеристики классического одноканального коррелятора для случая произвольного опорного сигнала. Однако аналитические решения для отклика коррелятора на ИС с произвольными параметрами при опорном шумоподобном ФМ-сигнале, порождаемом произвольной бинарной ПСП, отсутствуют. Кроме того, не изучено поведение ЧХ типовых процедур обработки сигналов корреляционного типа, предполагающих различные «комбинации» групп корреляторов (см. ранее). Очевидно, что частотные характеристики всех указанных и других возможных устройств и процедур обработки сигналов, основанных на корреляторах,

определяются видом модуляции и параметрами опорных сигналов – копий полезных сигналов. Однако, точные аналитические решения для ЧХ при этом очевидными не являются, поэтому для их формализации требуется проведение соответствующего анализа.

Далее, для целостности и общности изложения, кратко покажем вывод частотной характеристики одноканального классического коррелятора [18], дополним его анализом мощности (среднего квадрата) произвольного ИС на выходе коррелятора. После этого получим и графически проиллюстрируем частотные характеристики типовых процедур обработки сигналов корреляционного типа: синфазного и квадратурного коррелятора, квадратурной корреляционной схемы, фазовых дискриминаторов (ФД), а также ранне-позднего временного дискриминатора (ВД). Кроме того, получим необходимые вспомогательные аналитические выражения для спектральных плотностей опорных сигналов<sup>7</sup>.

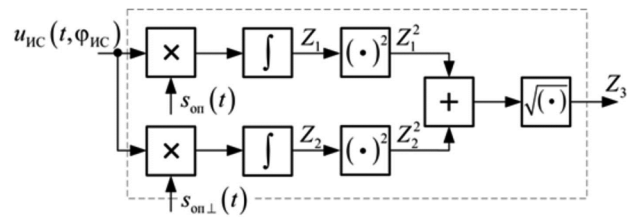


Рис. 1. Квадратурная корреляционная схема.

Описание и дополнительные пояснения в тексте статьи

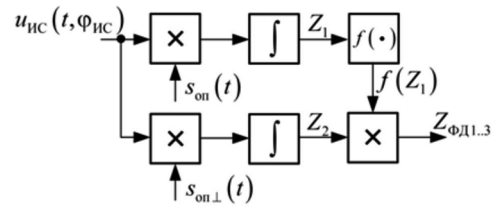


Рис. 2. Фазовый дискриминатор.

Описание и дополнительные пояснения в тексте статьи

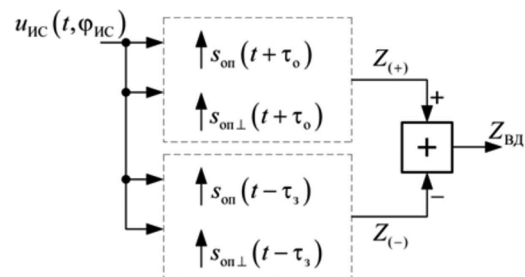


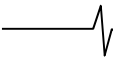
Рис. 3. Временной дискриминатор. Пунктиром показаны квадратурные корреляционные схемы (см. рис. 1)

**Цель статьи** – теоретический анализ зависимостей выходных эффектов типовых процедур корреляционной обработки от параметров внешнего гармонического сигнала (в первую очередь от его частоты) для случаев произвольных и шумоподобных фазоманипулированных опорных сигналов.

<sup>5</sup> Корреляционного типа. Далее рассматриваются и обсуждаются именно такие процедуры обработки сигналов.

<sup>6</sup> Структура которой является заданной, известной.

<sup>7</sup> Спектральные плотности (спектры) запаздывающих и опережающих опорных сигналов ВД, формируемых за счёт циклических сдвигов, имеют особенности, подлежащие обязательному учёту при анализе частотных характеристик. Этот вопрос в статье рассматривается детально.



**Аналитическое решение для скалярного произведения измерительного сигнала и произвольного опорного сигнала на основе обобщенной формулы Рэлея<sup>8</sup>.  
Случай одиночного опорного сигнала**

Кратко приведем согласно [18] решение задачи отыскания аналитического решения для отклика коррелятора на внешний гармонический измерительный сигнал  $u_{ИС}(t)$  при произвольном опорном сигнале  $s_{оп}(t)$  на интервале корреляционной обработки  $t \in [0, T_c]$ ,  $T_c$  – длительность опорного сигнала. Далее, получим выражение для мощности (среднего квадрата) внешнего ИС на выходе такого коррелятора. Воспользуемся линейностью корреляционного интеграла, допускающей возможность раздельного рассмотрения прохождения процессов, входящих в аддитивную смесь. Будем полагать, что на входе коррелятора действует только измерительный сигнал<sup>9</sup>

$$u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}) = A_{ИС} \cos(\omega_{ИС}t + \varphi_{ИС}), \quad (1)$$

обладающий произвольными амплитудой  $A_{ИС}$ , угловой частотой<sup>10</sup>  $\omega_{ИС}$  и начальной фазой  $\varphi_{ИС}$ . Выражение для опорного сигнала коррелятора  $s_{оп}(t)$ , являющегося копией полезного сигнала, пока конкретизировать не будем. Найдем скалярное произведение<sup>11</sup>  $Z = \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{оп}(t) \rangle$ , которое представляется возможным вычислить в частотной области на основе обобщенной формулы Рэлея [19, с. 56]:

$$\begin{aligned} Z &= \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{оп}(t) \rangle = \\ &= \int_0^{T_c} u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}) s_{оп}(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{ИС}(j\omega) S_{оп}^*(j\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_{ИС}(j\omega)$  – спектральная плотность ИС,  $S_{оп}(j\omega)$  – спектральная плотность опорного сигнала<sup>12</sup>. Как видно из (2), для вычисления искомого скалярного произведения необходимо формализовать спектральные плотности ИС и опорных сигналов. Известно, что спектральная плотность  $U_{ИС}(j\omega)$  непрерывного однонального гармонического процесса, к примеру – гармонического измерительного сигнала (1)  $u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}) \Leftrightarrow U_{ИС}(j\omega)$ , записывается в следующем виде [19, с. 59]:

$$U_{ИС}(j\omega) = A_{ИС} \pi [\exp(j\varphi_{ИС}) \delta(\omega - \omega_{ИС}) + \exp(-j\varphi_{ИС}) \delta(\omega + \omega_{ИС})], \quad (3)$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция (функция Дирака); символ « $\Leftrightarrow$ », использованный здесь и далее, означает переход от временной функции к частотной функции и обратно за счет пары преобразований Фурье.

Подставив спектральную плотность ИС (3) в (2) получим аналитические выражения для скалярного произведения  $Z = \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{оп}(t) \rangle$  и дополнительно искомой зависимости<sup>13</sup> мощности (среднего квадрата)  $P_{ИС\text{вых}}(A_{ИС}, \omega_{ИС}, \varphi_{ИС}) = Z^2(A_{ИС}, \omega_{ИС}, \varphi_{ИС})$  измерительного сигнала  $u_{ИС}(t, \varphi_{ИС})$  (1) на выходе коррелятора с опорным сигналом  $s_{оп}(t) \Leftrightarrow S_{оп}(j\omega)$ . Скалярное произведение ИС и произвольного опорного сигнала оказывается следующим<sup>14</sup> [18]:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{ИС} \pi [\exp(j\varphi_{ИС}) \delta(\omega - \omega_{ИС}) + \exp(-j\varphi_{ИС}) \delta(\omega + \omega_{ИС})]) S_{оп}^*(j\omega) d\omega = \\ &= 0,5 A_{ИС} [\exp(j\varphi_{ИС}) S_{оп}^*(j\omega_{ИС}) + \exp(-j\varphi_{ИС}) S_{оп}^*(j(-\omega_{ИС}))]. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что мощность (средний квадрат) ИС на выходе коррелятора может быть определена как квадрат скалярного произведения  $P_{ИС\text{вых}} = Z^2$ . Возводя (4) в квадрат получим данную зависимость:

$$\begin{aligned} P_{ИС\text{вых}}(\omega_{ИС}) &= Z^2(\omega_{ИС}) = \\ &= 0,25 A_{ИС}^2 [\exp(j2\varphi_{ИС}) S_{оп}^{2*}(j\omega_{ИС}) + \exp(-j2\varphi_{ИС}) S_{оп}^{2*}(j(-\omega_{ИС})) + 2 |S_{оп}(j\omega_{ИС})|^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

На основе полученных выражений для скалярного произведения  $Z$  (4) и мощности  $P_{ИС\text{вых}} = Z^2$  (5), имеющих общий характер с точки зрения вида опорного сигнала коррелятора, легко записать выходной эффект (и его квадрат – мощность) произвольной комбинации из группы корреляторов. В частности, – выражения для выходной величины квадратурной корреляционной схемы  $Z_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$  (рис. 1), а также соответствующей ей мощности  $P_{ИС\text{вых}3} = Z_3^2$  при рассматриваемом воздействии  $u_{ИС}(t, \varphi_{ИС})$  и произвольных квадратурных опорных сигналах  $s_{оп}(t) \Leftrightarrow S_{оп}(j\omega)$  и  $s_{оп\perp}(t) \Leftrightarrow S_{оп\perp}(j\omega)$ <sup>15</sup>:

<sup>8</sup> В литературе встречаются и другие названия обобщенной формулы Рэлея, к примеру: равенство Парсевеля, теорема Планшереля [19, с. 56].

<sup>9</sup> Полезный сигнал на входе коррелятора, аналогичный опорному, для проведения анализа частотных характеристик естественно полагается отсутствующим.

<sup>10</sup> Далее, для краткости будет упоминаться как частота ИС.

<sup>11</sup> Символом  $\langle, \rangle$  здесь и далее обозначено скалярное произведение процессов, рассматриваемых на оговариваемом временном интервале.

<sup>12</sup> Символ «звездочка», используемый в тексте статьи, означает комплексное сопряжение.

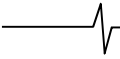
<sup>13</sup> Поскольку рассматривается задача отыскания частотных характеристик, далее будет упоминаться зависимость только от частоты  $\omega_{ИС}$ ,

либо указание о такой зависимости будет вовсе опускаться. Строго говоря, получаемые далее выражения позволяют учитывать зависимость от всех трёх параметров внешнего ИС.

<sup>14</sup> При вычислении интегралов в выражениях (4) учтено «фильтрующее» свойство дельта-функции:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) S(x) dx = S(x_0)$ ;

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x + x_0) S(x) dx = S(-x_0)$ .

<sup>15</sup> Символом « $\perp$ » в статье показывается, что сигнал  $s_{оп\perp}(t)$  ортогонален сигналу  $s_{оп}(t)$ .



$$Z_3(\omega_{ИС}) = \sqrt{Z_1^2(\omega_{ИС}) + Z_2^2(\omega_{ИС})}, \quad (6)$$

$$P_{ИС\text{вых}3}(\omega_{ИС}) = Z_3^2(\omega_{ИС}) = Z_1^2(\omega_{ИС}) + Z_2^2(\omega_{ИС}), \quad (7)$$

$$Z_{1,2}(\omega_{ИС}) = 0,5A_{ИС}[\exp(j\varphi_{ИС})S_{оп\perp}^*(j\omega_{ИС}) + \exp(-j\varphi_{ИС})S_{оп\perp}^*(j(-\omega_{ИС}))].$$

**Случай непрерывной группы (пачки) опорных сигналов**

Выше показан анализ скалярного произведения (4) и мощности (5) внешнего ИС  $u_{ИС}(t, \varphi_{ИС})$  на выходе коррелятора с одиночным опорным сигналом  $s_{оп}(t)$  длительности  $T_c$ . Однако в практике приема сложных сигналов используется так называемое когерентное накопление [2, с. 135], предполагающее вычисление корреляционного интеграла на увеличенном временном интервале, равном, как правило  $MT_c$ , где  $M > 1$  – целое. В таком случае опорный сигнал коррелятора является группой (пачкой, серией)  $s_{M\text{оп}}(t)$  из  $M$  примыкающих друг к другу сигналов, следующих последовательно с периодом  $T_c$ :

$$s_{M\text{оп}}(t) = \sum_{k=1}^M s_{оп}(t - (k-1)T_c). \quad (8)$$

Легко показать, что спектральная плотность  $S_{M\text{оп}}(j\omega)$  группы из  $M$  опорных сигналов (8) определяется следующим образом:

$$s_{M\text{оп}}(t) \Leftrightarrow S_{M\text{оп}}(j\omega) = S_{оп}(j\omega) \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega(k-1)T_c). \quad (9)$$

В этом случае отклик коррелятора на ИС – скалярное произведение  $Z_M = \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{M\text{оп}}(t) \rangle$ , а также соответствующая мощность  $P_{ИС\text{вых}M} = Z_M^2$ , могут быть определены с использованием спектральной плотности ИС (3) и спектральной плотности группы из  $M$ -кратно периодически повторяющегося опорного сигнала (9). Используя спектральные плотности (3) и (9), скалярное произведение  $Z_M = \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{M\text{оп}}(t) \rangle$  можно привести к виду аналогичному (4) путем проведения интегрирования с учетом фильтрующего свойства дельта-функции, но проще воспользоваться уже полученным результатом общего характера (4), и подставив спектральную плотность (9) в (4) записать результат для скалярного произведения в следующем виде:

$$\begin{aligned} Z_M &= \langle u_{ИС}(t, \varphi_{ИС}), s_{M\text{оп}}(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{ИС}(j\omega) S_{M\text{оп}}^*(j\omega) d\omega = \\ &= 0,5A_{ИС}[\exp(j\varphi_{ИС})S_{оп}^*(j\omega_{ИС}) \times \\ &\times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{ИС}(k-1)T_c) + \\ &+ \exp(-j\varphi_{ИС})S_{оп}^*(j(-\omega_{ИС})) \times \\ &\times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{ИС}(k-1)T_c)], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $U_{ИС}(j\omega)$  имеет прежний смысл, а  $S_{M\text{оп}}(j\omega)$  – спектральная плотность (9) опорного сигнала вида (8). Подстановка (9) в (5), либо возведение в квадрат результата (10) приводит к выражению для мощности измерительного сигнала  $P_{ИС\text{вых}M} = Z_M^2$  на выходе коррелятора при опорном сигнале вида (8).

Итак, получены обобщенные аналитические выражения для зависимостей выходной величины коррелятора при входном ИС с произвольными параметрами для случаев наличия и отсутствия когерентного накопления, при произвольном виде опорного сигнала. Далее, конкретизируем модель опорного сигнала, получим частотные характеристики типовых процедур корреляционной обработки при внешнем ИС и изучим их поведение.

**Скалярное произведение измерительного сигнала и шумоподобного фазоманипулированного сигнала**

Одним из наиболее распространенных видов сигналов, применяемых в различных радиоэлектронных системах, являются шумоподобные ФМ-сигналы, порождаемые псевдослучайными последовательностями (например, [2, 20-22] и др.). Реализация корреляционного приема ФМ-сигнала предполагает формирование в приемнике его квадратурных копий:

$$s_{оп}(t) = s_{ФМ}(t, \varphi_0) = A_{оп}g(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11)$$

$$s_{оп\perp}(t) = s_{ФМ\perp}(t, \varphi_0) = A_{оп}g(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12)$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \text{rect}[t - nT], \quad g_n = \{\pm 1\}_{n=0}^{N-1}, \quad (13)$$

$$\text{rect}[t] = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases}$$

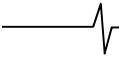
где  $A_{оп}$  – амплитуда опорных сигналов;  $g(t)$  – видеосигнал, образуемый символами  $g_n = \{\pm 1\}_{n=0}^{N-1}$  бинарной ПСП длины  $N$ ,  $\text{rect}[t]$  – одиночный прямоугольный импульс длительности  $T$ ,  $\omega_0$  – угловая центральная частота ФМ-сигналов;  $\varphi_0$  – начальная фаза; смысл других использованных обозначений понятен без дополнительных пояснений. Сигналы (11), (12) формируются на временном интервале  $t \in [0, T_c]$ ,  $T_c = NT$  – длительность опорных сигналов.

Спектральные плотности опорных сигналов (11) и (12) определяются спектральной плотностью  $G(j\omega)$  видеосигнала ПСП  $g(t)$  (13), которая записывается известным образом [20, с. 40]:

$$g(t) \Leftrightarrow G(j\omega) = G_0(j\omega) \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j\omega nT), \quad (14)$$

$$G_0(j\omega) = (1 - \exp(-j\omega T)) / j\omega,$$

где  $G_0(j\omega)$  – спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса положительной полярности, единичной амплитуды и длительности  $T$ . Запишем на основе выражения (14) спектральные плотности квадратурных опорных ФМ-сигналов (11), (12). Воспользуемся общеизвестной теоремой о модуляции (см., например, [19, с. 59]), позволяющей на основе знания спектра



функции  $g(t) \rightleftharpoons G(j\omega)$  (14) записать выражения для спектров произведений  $g(t)\cos(\omega_0 t)$  и  $g(t)\sin(\omega_0 t)$ :

$$\Phi[g(t)\cos(\omega_0 t)] = 0,5G[j(\omega - \omega_0)] + 0,5G[j(\omega + \omega_0)], \quad (15)$$

$$\Phi[g(t)\sin(\omega_0 t)] = 0,5jG[j(\omega + \omega_0)] - 0,5jG[j(\omega - \omega_0)], \quad (16)$$

где  $\Phi[\bullet]$  – оператор преобразования Фурье. Выполняя тригонометрические преобразования<sup>16</sup> над выражениями (11) и (12) запишем пару квадратурных опорных ФМ-сигналов в следующем виде:

$$s_{\Phi M}(t, \varphi_0) = A_{\text{он}} g(t) \{ \cos(\varphi_0) \cos(\omega_0 t) - \sin(\varphi_0) \sin(\omega_0 t) \}, \quad (17)$$

$$s_{\Phi M \perp}(t, \varphi_0) = A_{\text{он}} g(t) \{ \cos(\varphi_0) \sin(\omega_0 t) + \sin(\varphi_0) \cos(\omega_0 t) \}. \quad (18)$$

Далее, используя (14), (15) и (16), запишем преобразование Фурье для сигналов (17) и (18) соответственно:

$$S_{\Phi M \cos}(j\omega) = \Phi[s_{\Phi M}(t, \varphi_0)] = \Phi[A_{\text{он}} g(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] = 0,5A_{\text{он}} [\exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega - \omega_0)T))}{j(\omega - \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega - \omega_0)nT) + \exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega + \omega_0)T))}{j(\omega + \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega + \omega_0)nT)], \quad (19)$$

$$S_{\Phi M \sin}(j\omega) = \Phi[s_{\Phi M \perp}(t, \varphi_0)] = \Phi[A_{\text{он}} g(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] = 0,5A_{\text{он}} j [\exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega + \omega_0)T))}{j(\omega + \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega + \omega_0)nT) - \exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega - \omega_0)T))}{j(\omega - \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega - \omega_0)nT)]. \quad (20)$$

Подстановка спектральных плотностей опорных сигналов  $S_{\text{он}}(j\omega) = S_{\Phi M \cos}(j\omega)$  (19) и  $S_{\text{он}\perp}(j\omega) = S_{\Phi M \sin}(j\omega)$  (20) в выражения (4) и (5) позволяет рассчитать значения скалярных произведений  $Z_1 = \langle u_{\text{ИС}}(t, \varphi_{\text{ИС}}), s_{\Phi M}(t, \varphi_0) \rangle$ ,  $Z_2 = \langle u_{\text{ИС}}(t, \varphi_{\text{ИС}}), s_{\Phi M \perp}(t, \varphi_0) \rangle$ , а также  $Z_3$  (6) и соответствующие им мощности  $P_{\text{ИС вых}l} = Z_l^2$  ( $l = 1, 2, 3$ ) внешнего ИС (1) на выходах корреляторов при опорных сигналах вида (11) и (12) для произвольной последовательности  $g_n$ , порождающей шумоподобный ФМ-сигнал. Однако для получения результата более общего характера целесо-

образно подставить (19) и (20) в (10), что приведет к скалярным произведениям  $Z_{1M} = \langle u_{\text{ИС}}(t, \varphi_{\text{ИС}}), s_{M\Phi M}(t, \varphi_0) \rangle$ ,  $Z_{2M} = \langle u_{\text{ИС}}(t, \varphi_{\text{ИС}}), s_{M\Phi M \perp}(t, \varphi_0) \rangle$  внешнего ИС и «групповых» опорных ФМ-сигналов вида  $s_{M\Phi M}(t, \varphi_0)$ , получаемых подстановкой (11), (12) в (8). Такой подход, при  $M > 1$ , соответствует случаю когерентного накопления, а при  $M = 1$  – случаю вычисления корреляционных интегралов за время, равное длительности периода опорных сигналов  $T_c$ . Подставим спектральные плотности (19), (20) в (10) и получим соответственно аналитические выражения для скалярных произведений  $Z_{1M}$  и  $Z_{2M}$  измерительного сигнала (1) и квадратурных опорных сигналов (11), (12) для произвольного числа периодов  $M$  когерентного накопления в корреляторах. Указанная подстановка приводит к нижеприведенным результатам. Скалярные произведения оказываются равными (21) и (22):

$$Z_{1M}(\omega_{\text{ИС}}) = 0,5A_{\text{ИС}} [\exp(j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \cos}^*(j\omega_{\text{ИС}}) \times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) + \exp(-j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \cos}^*(j(-\omega_{\text{ИС}})) \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c)] = 0,25A_{\text{ИС}} A_{\text{он}} [\exp(j\varphi_{\text{ИС}}) \times \left[ \exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)T))}{j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)nT) + \exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)T))}{j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)nT) \right] \times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) + \exp(-j\varphi_{\text{ИС}}) \times \left[ \exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)T))}{j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)nT) + \exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)T))}{j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)} \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)nT) \right] \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c)], \quad (21)$$

$$Z_{2M}(\omega_{\text{ИС}}) = 0,5A_{\text{ИС}} [\exp(j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \sin}^*(j\omega_{\text{ИС}}) \times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) + \exp(-j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \sin}^*(j(-\omega_{\text{ИС}})) \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c)] = 0,5A_{\text{ИС}} [\exp(j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \sin}^*(j\omega_{\text{ИС}}) \times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) + \exp(-j\varphi_{\text{ИС}}) S_{\Phi M \sin}^*(j(-\omega_{\text{ИС}})) \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c)] \quad (22)$$

<sup>16</sup>  $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ ;  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ .

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c)] = \\
& = -0,25 A_{\text{ИС}} A_{\text{оп}} j [\exp(j\varphi_{\text{ИС}}) \times \\
& \times \left[ \exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)T))}{j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)} \times \right. \\
& \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)nT) - \\
& \left. - \exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)T))}{j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)} \times \right. \\
& \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)nT) \\
& \times \sum_{k=1}^M \exp(j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) + \exp(-j\varphi_{\text{ИС}}) \times \\
& \times \left[ \exp(-j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)T))}{j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)} \times \right. \\
& \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} + \omega_0)nT) - \\
& \left. - \exp(j\varphi_0) \frac{(1 - \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)T))}{j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)} \times \right. \\
& \times \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-j(-\omega_{\text{ИС}} - \omega_0)nT) \\
& \left. \times \sum_{k=1}^M \exp(-j\omega_{\text{ИС}}(k-1)T_c) \right].
\end{aligned}$$

Возведение в квадрат скалярных произведений (21) и (22) позволяет получить зависимости средних квадратов ИС на выходах квадратурных корреляторов  $P_{\text{ИС вых } 1M} = Z_{1M}^2$  и  $P_{\text{ИС вых } 2M} = Z_{2M}^2$  соответственно, а последующее суммирование квадратов (21) и (22) согласно (6), (7), приводит к зависимостям  $Z_{3M} = \sqrt{Z_{1M}^2 + Z_{2M}^2}$  и  $P_{\text{ИС вых } 3M} = Z_{1M}^2 + Z_{2M}^2$  для квадратурной корреляционной схемы.

### Частотные характеристики типовых процедур корреляционной обработки при опорных ФМ-сигналах. Общие условия получения частотных характеристик

Для определенности при выполнении расчетов положено, что синфазный и квадратурный корреляторы «настроены» соответственно на косинусный (11) и синусный (12) ФМ-сигналы, порожденные бинарной ПСП  $g_n = \{\pm 1\}_{n=0}^{N-1}$  длины  $N = 511$  [20, с. 59] и соответствующим ей видеосигналом  $g(t)$  (13). На основе полученных выражений (21), (22) рассчитаны значения<sup>17</sup>  $Z_1$ ,  $Z_2$ , а их подстановка в (6) обеспечивала вычисление  $Z_3$ . Таким образом, получены зависимости выходных эффек-

тов синфазного и квадратурного корреляторов, а также выходного эффекта квадратурной корреляционной схемы в зависимости от частоты ИС  $\omega_{\text{ИС}}$  – т.е. получены частные характеристики данных процедур. Далее, на основе  $Z_1$  и  $Z_2$ , рассчитаны аналогичные характеристики для семейства ФД. Кроме того, формализованы необходимые выражения для расчета частотных характеристик ВД, что будет показано далее.

На рис. 4-16 показаны фрагменты нормированных<sup>18</sup> к своим максимальным значениям частотных характеристик  $Z_n$  рассмотренных в статье типовых процедур корреляционной обработки сигналов. На всех представленных зависимостях по осям абсцисс отложена безразмерная величина  $\mu_n = \omega_{\text{ИС}}/\omega_0$ . Из-за быстропеременных особенностей полученных зависимостей интервал анализа по частоте выбран сравнительно малым<sup>19</sup>, что позволяет визуально изучить их детализацию. Для зависимостей, полученных при  $M=1$ , интервал анализа по частоте составляет<sup>20</sup>  $\Delta f_a = \pm 0,04/T$ , а для зависимостей, соответствующих пяти когерентным накоплениям ( $M=5$ ), интервал  $\Delta f_a = \pm 0,01/T$ . Шаг табулирования во всех случаях равен  $2 \cdot 10^{-5}/T$ . Каждая из зависимостей, рассчитанных на основе полученных в статье аналитических выражений, была верифицирована за счет проведения имитационного моделирования рассмотренных процедур (рис. 1-3) при соответствующих им опорных сигналах. Входным воздействием выступал сигнал  $u_{\text{ИС}}(t, \varphi_{\text{ИС}})$ , частота которого  $\omega_{\text{ИС}}$  изменялась. Результаты имитационного моделирования выборочно нанесены<sup>21</sup> круглыми символами на аналитические зависимости<sup>22</sup>, что демонстрирует их прекрасное совпадение.

### Частотные характеристики одноканальных корреляторов и квадратурной корреляционной схемы

Как уже было отмечено во введении, квадратурная корреляционная схема (рис. 1) находит широкое применение при реализации процедур поиска и обнаружения ШПС, а также при оценивании амплитуды сигналов, поэтому, безусловно, анализ ее частотных характеристик представляет теоретический и практический интерес. Заметим, что аналитические выражения (21) и (22) внешне выглядят громоздкими, однако, следует учитывать, что, во-первых, «объемность» этих выражений не означает наличие вычислительной сложности при их та-

<sup>18</sup> Нижний индекс «н», означающий нормировку, для исключения избыточности обозначений на рис. 11–16 не показан.

<sup>19</sup> Для лучшей наглядности результатов. Увеличение интервала анализа приводит к «сжатию» характеристик, что позволяет визуализировать лишь их «оггибающую», оставляя при этом важные детали недоступными для рассмотрения.

<sup>20</sup> Полученные в статье выражения позволяют выполнять расчёт частотных характеристик для произвольных интервала и шага анализа по частоте.

<sup>21</sup> Использована пятикратная децимация.

<sup>22</sup> Сплошная линия – теоретический расчет, круглые символы – имитационное моделирование.

<sup>17</sup> Для демонстрации результатов автор ограничился рассмотрением поведения скалярных произведений, понимая, что элементарное их возведение в квадрат приводит к мощностным величинам (средним квадратам).

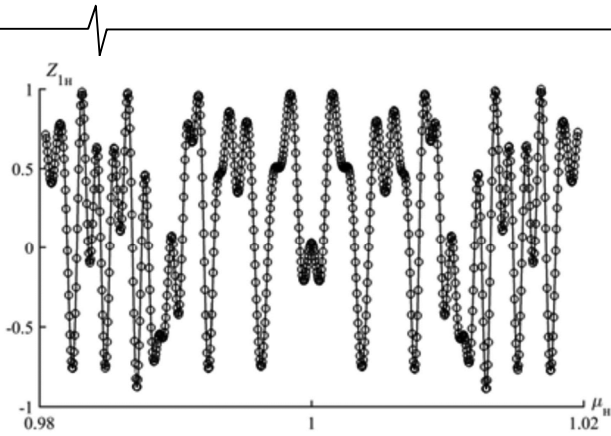


Рис. 4. Фрагмент нормированной ЧХ одноканального коррелятора при  $M=1$ , опорном сигнале (11) и нулевых начальных фазах ИС (1) и сигнала (11)

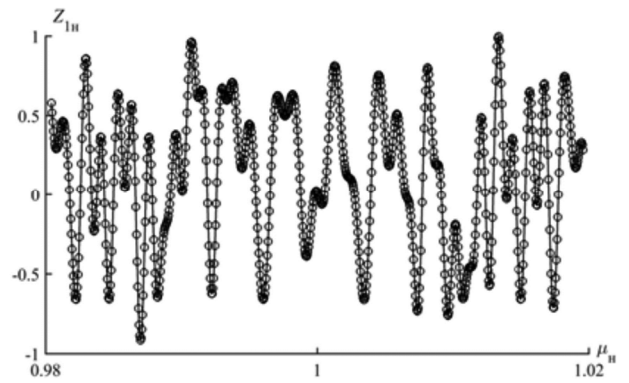


Рис. 5. Фрагмент нормированной ЧХ одноканального коррелятора при  $M=1$ , опорном сигнале (11), начальных фазах  $\varphi_0=0$ ,  $\varphi_{ис}=\pi/4$

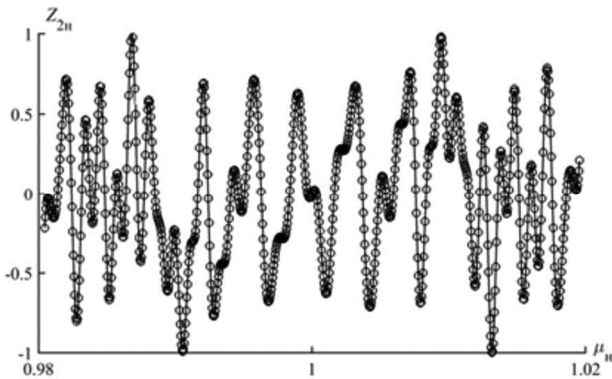


Рис. 6. Фрагмент нормированной ЧХ одноканального коррелятора при  $M=1$ , опорном сигнале (12) и нулевых начальных фазах ИС (1) и сигнала (12)

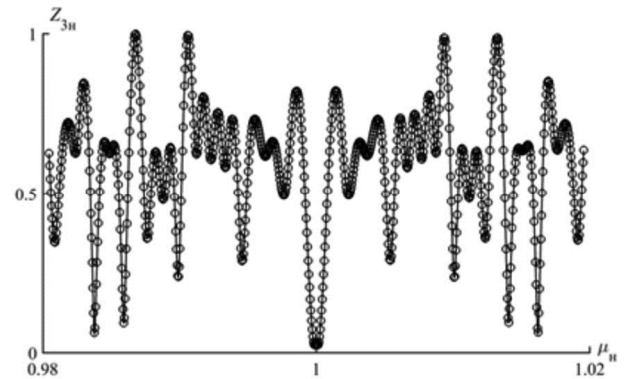


Рис. 7. Фрагмент нормированной ЧХ квадратурной корреляционной схемы (рис. 1) при  $M=1$  и опорных сигналах (11), (12). Начальные фазы равны нулю

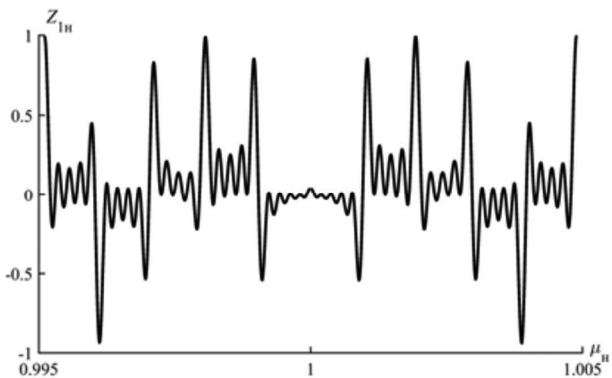


Рис. 8. Фрагмент нормированной ЧХ одноканального коррелятора при  $M=5$ , опорном сигнале (11) и нулевых начальных фазах ИС и опорного сигнала

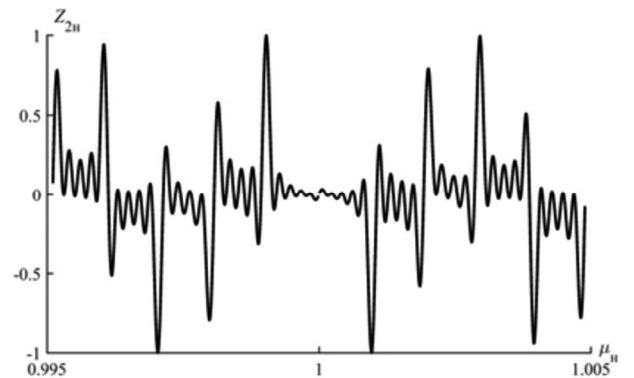


Рис. 9. Фрагмент нормированной ЧХ одноканального коррелятора при  $M=5$ , опорном сигнале (12) и нулевых начальных фазах

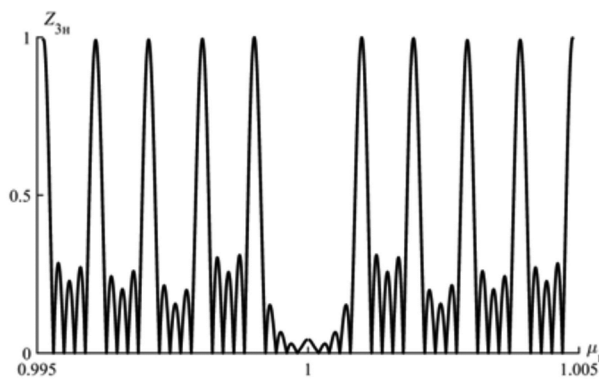


Рис. 10. Фрагмент нормированной ЧХ квадратурной корреляционной схемы (рис. 1) при  $M=5$  и прежних прочих условиях

булировании, а во-вторых, – выражения записаны в наиболее общем виде, учитывающем поведение скалярных произведений справа и слева относительно оси ординат.

На рис. 4-10 представлены фрагменты нормированных ЧХ (21), (22), соответствующих одноканальному коррелятору (рис. 4-6, 8, 9) и квадратурной корреляционной схеме (рис. 7, 10). Зависимости, показанные на рис. 4-7, соответствуют интервалу корреляционной обработки, равному длительности опорного сигнала  $T_c$  (т.е.  $M=1$ ), а зависимости на рис. 8-10 соответствуют режиму когерентного накопления сигнала в корреляторе(ах) при числе накоплений  $M=5$ . Рис. 4, 6-10 получены при нулевых начальных фазах опорных  $\varphi_0=0$  и измерительного сигналов  $\varphi_{ис}=0$ . Рис. 5 получен при  $\varphi_0=0$  и  $\varphi_{ис}=\pi/4$ .

### Частотные характеристики фазовых дискриминаторов

Центральным элементом систем фазовой синхронизации приемников сложных сигналов являются фазовые дискриминаторы. Известны [2, с. 146] фазовые дискриминаторы<sup>23</sup> вида:  $Z_{Фд1} = \text{th}(Z_1)Z_2$ ,  $Z_{Фд2} = \text{sign}(Z_1)Z_2$ <sup>24</sup>,  $Z_{Фд3} = Z_1Z_2$ , а также некоторые другие –  $Z_{Фд4} = \arctg(Z_2/Z_1)$ ,  $Z_{Фд5} = Z_2/Z_1$  [2, с. 506], [22, с. 168]. Как видно из представленных выражений для алгоритмов перечисленных ФД  $Z_{Фд1..5}$ , основой их аналитического описания являются величины выходных эффектов синфазного и квадратурного корреляторов  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно. Представленные выше алгоритмы ФД поясняются структурной схемой на рис. 2, где  $f(\bullet)$  – решающая функция, соответствующая вышепоказанному описанию ФД 1-3. При дополнении структурной схемы (рис. 2) модулями взятия отношения  $Z_2/Z_1$  и арктангенса тригонометрического<sup>25</sup> от такого отношения, получают алгоритмы  $Z_{Фд4,5}$ . С использованием оговоренных данных рассчитаны ЧХ фазовых дискриминаторов. На рис. 11-13 показаны полученные при  $M=1$  характеристики для дискриминаторов  $Z_{Фд1}$ ,  $Z_{Фд2}$  и  $Z_{Фд4}$  соответственно. Рис. 14 соответствует дискриминатору  $Z_{Фд1}$  при количестве производимых когерентных накоплений, равных  $M=5$ .

### Частотные характеристики ранне-позднего временного дискриминатора.

#### Формализация спектров опережающего и задержанного опорных ФМ-сигналов

В системах слежения за задержкой сложных сигналов часто применяются ранне-поздние временные дискриминаторы  $Z_{ВД} = Z_{(+)} - Z_{(-)}$  (рис. 3), которые реализуют путем вычитания выходных эффектов т.н. опережающего  $Z_{(+)}$  и запаздывающего  $Z_{(-)}$  каналов<sup>26</sup> (см., например, [2, с. 155, 508], [22, с. 174]). Такая процедура корреляционной обработки, в отличие от предыдущих рассмотренных, имеет свою специфику, определяемую особенностями опорных сигналов ВД, не позволяющую воспользоваться (19), (20) для подстановки в (10) и рассчитать выходные эффекты  $Z_1$  и  $Z_2$  для каждого из каналов ВД. Поясним особенности опорных сигналов ранне-позднего ВД, нюансировка формирования которых заключается в следующем. Рассмотрим запаздывающий канал ВД  $Z_{(-)}$ , требующий формирования вспомогательных опорных видеосигналов<sup>27</sup> вида  $g(t - \tau_3)$ , обладающих спектром<sup>28</sup>  $G(j\omega) \exp(-j\omega\tau_3)$ . Такое аналитическое описание предполагает «грубый» сдвиг видеосигнала  $g(t)$  вправо на временной интервал, равный необходимой задержке  $\tau_3$ , при этом предполагается, что на интервале  $t \in [0, \tau_3]$  сигнал будет отсутствовать. Кроме того, смещенный таким образом сигнал оказывается «выходящим» за границы временного интервала  $t \in [0, T_c]$  на величину сдвига  $\tau_3$ . Аналогичным образом, возможно сформулировать «грубое» опережение опорных сигналов на величину, равную интервалу опережения  $\tau_0$ . В профессиональных приемниках сложных сигналов, в том числе в программных приемниках, необходимые временные сдвиги для опорных сигналов ВД вносятся иначе<sup>29</sup>: запаздывание  $\tau_3$  и опережение  $\tau_0$  вносятся «сразу» – от начального момента времени и исключительно в границах временного интервала  $t \in [0, T_c]$ , за счет т.н. циклического сдвига. При таком формировании опорных сигналов, в зависимости от направления сдвига, происходит своеобразная перестановка «начала» и «конца». Эти манипуляции над опорными сигналами, приводящие к корректному внесению необходимых для функционирования ВД временных сдвигов, не учитываются в спектре показанным интуитивно-направляющимся способом  $g(t - \tau_3) \Leftrightarrow G(j\omega) \exp(-j\omega\tau_3)$ , который применим лишь в оговоренных для него условиях. Дополнительной особеннос-

<sup>23</sup> В представленном выражении для  $Z_{Фд1}$  не показано деление  $Z_1$  на дисперсию шума в аргументе функции гиперболического тангенса  $\text{th}(\bullet)$ . Опущен знак (учет которого элементарно выполняется) перед выражениями  $Z_{Фд}$ , не влияющий на решение обсуждаемой в статье задачи.

<sup>24</sup>  $\text{sign}(\bullet)$  – функция знака.

<sup>25</sup> Что на рис. 2 не показано.

<sup>26</sup> Каждый из которых соответствует квадратурной корреляционной схеме (рис. 1).

<sup>27</sup> Которые умножаются на ортогональные гармонические колебания центральной частоты.

<sup>28</sup> В силу свойства запаздывания преобразования Фурье.

<sup>29</sup> На основе методов и средств цифрового синтеза сигналов, а также за счёт специальных математических функций, обеспечивающих внесение запаздывания либо опережения в массив отсчётов несмещённого сигнала.



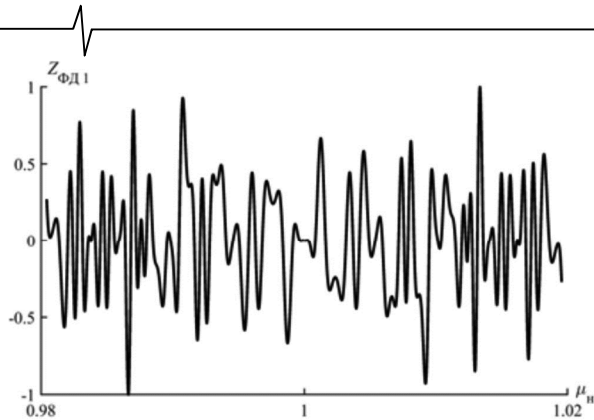


Рис. 11. Фрагмент нормированной ЧХ фазового дискриминатора (рис. 2) при  $M=1$ , решающей функции  $\text{th}(x)$  и опорных сигналах (11), (12)

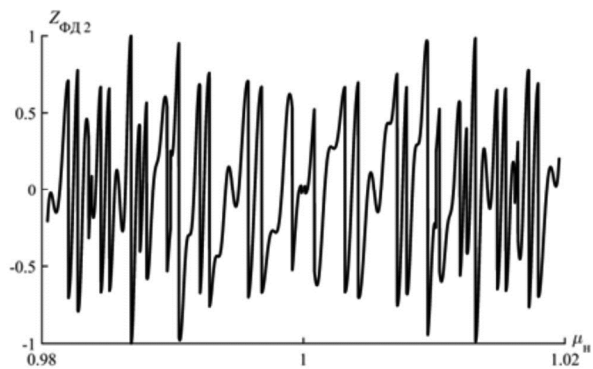


Рис. 12. Фрагмент нормированной ЧХ фазового дискриминатора (рис. 2) при  $M=1$ , решающей функции  $\text{sign}(x)$  и опорных сигналах (11), (12)

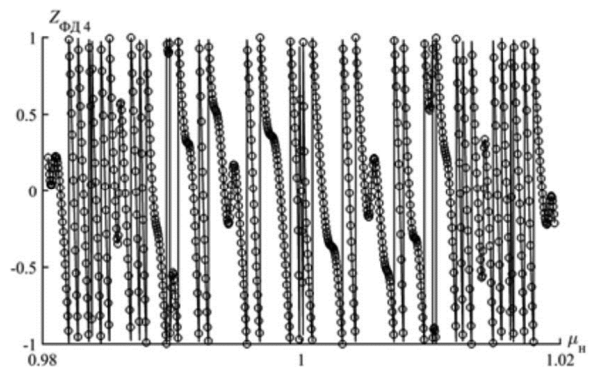


Рис. 13. Фрагмент нормированной ЧХ фазового дискриминатора (рис. 2) при  $M=1$ , решающем правиле  $\arctg(Z_2 / Z_1)$  и опорных сигналах (11), (12)

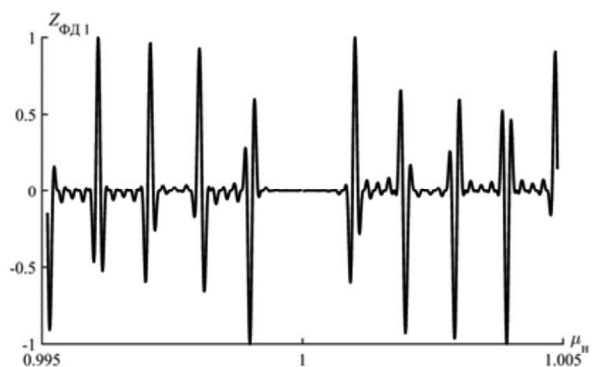


Рис. 14. Фрагмент нормированной ЧХ фазового дискриминатора (рис. 2) при решающей функции вида  $\text{th}(x)$  и  $M=5$

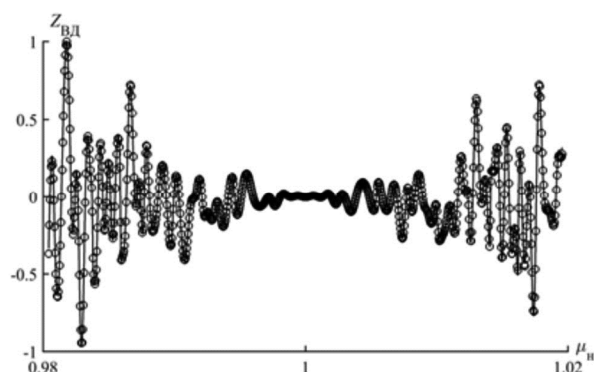


Рис. 15. Фрагмент нормированной ЧХ временного дискриминатора (рис. 3) при  $M=1$  и опорных сигналах (11), (12), порождаемых запаздывающим и опережающим видеосигналами ПСП (23), (24)

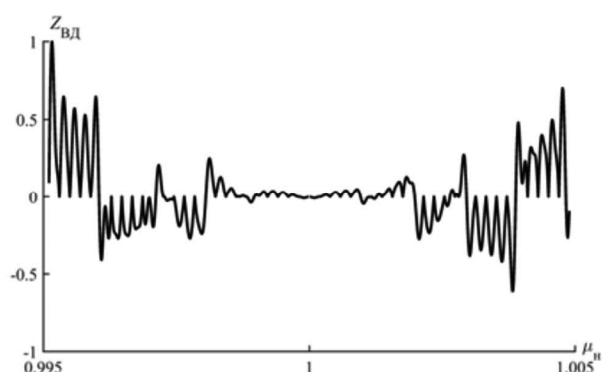


Рис. 16. Фрагмент нормированной ЧХ временного дискриминатора (рис. 3) при  $M=5$  и прежних прочих условиях

тью ранне-позднего ВД является сравнительно малое возможное значение вносимых запаздываний и опережений, исчисляемое в долях<sup>30</sup> временного интервала, равного длительности чипа ПСП  $T$  [22, с. 177].

Далее, получим спектральные плотности запаздывающего и опережающего опорных сигналов ВД для произвольной последовательности  $g_n = \{\pm 1\}_{n=0}^{N-1}$ . Для запаздывающего  $g_s(t)$  и опережающего  $g_o(t)$  видеосигналов ПСП, с использованием несмещенного видеосигнала (13), можем соответственно записать:

$$g_s(t) = \begin{cases} g(t + (T_c - \tau_3)), & t \in [0, \tau_3], \\ g(t - \tau_3), & t \in [\tau_3, T_c]. \end{cases} \quad (23)$$

$$g_o(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0, T_c - \tau_0], \\ g(t - (T_c - \tau_0)), & t \in [T_c - \tau_0, T_c]. \end{cases} \quad (24)$$

Спектральные плотности  $G_s(j\omega) \Leftrightarrow g_s(t)$ ,  $G_o(j\omega) \Leftrightarrow g_o(t)$  запаздывающего сигнала  $g_s(t)$  (23) и опережающего сигнала  $g_o(t)$  (24) определяются соответственно выражениями:

$$G_s(j\omega) = \int_0^{T_c} g_s(t) e^{-j\omega t} dt = \quad (25)$$

$$= g_{N-1} (1 - e^{-j\omega\tau_3} - e^{-j\omega T_c} + e^{j\omega \frac{T_c}{N}} e^{-j\omega\tau_3} e^{-j\omega T_c}) / j\omega +$$

<sup>30</sup> К примеру,  $0.25T$ ,  $0.5T$ .

$$\begin{aligned}
 & +(e^{-j\omega\tau_0} / j\omega)(1 - e^{-j\omega\frac{T_c}{N}}) \sum_{n=0}^{N-2} g_n e^{-j\omega n \frac{T_c}{N}}, \\
 G_o(j\omega) &= \int_0^{T_c} g_o(t) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= g_o(1 - e^{-j\omega\frac{T_c}{N}} e^{j\omega\tau_0} + e^{-j\omega T_c} e^{j\omega\tau_0} - e^{-j\omega T_c}) / j\omega + \\
 & +(e^{j\omega\tau_0} / j\omega)(1 - e^{-j\omega\frac{T_c}{N}}) \sum_{n=1}^{N-1} g_n e^{-j\omega n \frac{T_c}{N}}.
 \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение (25) описывает спектр запаздывающего видеосигнала ПСП на долю чипа ПСП, причем смещение выполняется за счет циклического сдвига (перестановка «конца» в «начало»). Выражение (26) описывает спектр опережающего видеосигнала ПСП на долю чипа ПСП, причем смещение выполняется за счет циклического сдвига (перестановка «начала» в «конец»). Отметим, что выражения для спектров (25), (26), полученные в интересах проведения анализа частотных характеристик ВД, являются дополнительным самостоятельным результатом статьи, обладают общностью с точки зрения вида и параметров ПСП, применимы при необходимости учёта в спектральной области задержек видеосигнала ПСП, исчисляемых в долях чипа.

Используя полученные выражения для спектров (25), (26), на основе комбинаций из (10), соответствующих рис. 3, проведен анализ ЧХ ранне-позднего ВД с опорными ФМ-сигналами, порождаемыми вспомогательными видеосигналами ПСП (23), (24). Результаты данного анализа представлены на рис. 15, 16, которые соответствуют случаям  $M=1, 5$ . Интервал вносимого запаздывания и опережения в (23) и (24), для формирования соответствующих опорных сигналов в каналах ВД, составлял  $0,5T$ .

### Обсуждение результатов

Как видно из рис. 4-16, рассчитанных на основе полученных в настоящей статье аналитических выражений, частотные характеристики типовых процедур корреляционного типа являются заметно неравномерными, что согласуется с известными результатами натуральных [4] и вычислительных экспериментов [5-17]. Как следует из полученной аналитики, при одинаковом опорном сигнале величина отклика<sup>31</sup> одноканального коррелятора на гармонический ИС зависит не только от частотного положения последнего, но и от его фазового сдвига, что демонстрируется за счет рис. 4 и рис. 5. Частотные характеристики пары квадратурных корреляторов имеют хорошо визуально заметные отличия в поведении (рис. 4, рис. 6). Отклик квадратурной корреляционной схемы ожидаемо принимает исключительно положительные значения (рис. 7, 10). Результаты, представленные на рис. 4-16, убедительно демонстрируют, что при единой порождающей опорные сигналы ПСП, полу-

чаемые частотные характеристики различных процедур корреляционного типа имеют существенные отличия в восприимчивости к внешнему гармоническому сигналу.

Введение режима когерентного накопления сигнала в корреляторах существенным образом изменяет поведение частотных характеристик всех рассмотренных процедур. Этому обстоятельству свидетельствует попарное сравнение результатов на рис. 4 и 8, рис. 6 и 9, рис. 7 и 10, соответствующих паре корреляторов с ортогональными опорными сигналами и квадратурной корреляционной схеме, образованной на их основе. Аналогичные наблюдения фиксируются и при попарном сравнении частотных характеристик рассмотренных дискриминаторов: рис. 11 и 14, рис. 15 и 16. Таким образом, можно констатировать, что количество производимых когерентных накоплений существенно изменяет восприимчивость процедур обработки сигналов корреляционного типа к частоте внешнего гармонического сигнала.

### Заключение

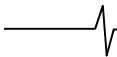
Аналитическим путем проведен анализ зависимостей выходной величины процедур корреляционной обработки сигналов при внешнем гармоническом измерительном сигнале с произвольными параметрами. В качестве теоретического «инструментария» для проведения аналитической вычислительной работы применена обобщенная формула Рэлея. При этом рассмотрен как наиболее общий случай, предполагающий возбуждение опорного входа коррелятора произвольным сигналом, так и часто встречающийся частный случай, интересный широкой практике, соответствующий квадратурным шумоподобным фазоманипулированным опорным сигналам, порождаемым псевдослучайной последовательностью.

Полученные теоретические решения верифицированы имитационным моделированием при рассмотрении частных случаев: одноканальные корреляторы, квадратурная корреляционная схема, фазовые дискриминаторы, ранне-поздний временной дискриминатор. Верификация показала отличное совпадение теоретических расчетов и моделирования, что свидетельствует о достоверности всех полученных аналитических выражений. Влияние на принимаемые значения и поведение частотных характеристик рассмотренных типовых процедур корреляционной обработки сигналов оказывают следующие факторы: вид модуляции опорных сигналов, включая структуру и параметры порождающей ПСП; все параметры внешнего гармонического ИС; длительность интервала интегрирования в корреляторах – количество производимых когерентных накоплений.

Рассмотренные в статье примеры процедур обработки сигналов далеко не исчерпывают область применения теоретических решений данной работы. Полученные в статье точные аналитические выражения ценны своей общностью и позволяют получать значение откликов коррелятора<sup>32</sup> и всевозможных «конструкций»

<sup>31</sup> А значит и мощность внешнего ИС на выходе коррелятора.

<sup>32</sup> И, что важно, значение мощности гармонического сигнала на выходе корреляторов.



из групп корреляторов на внешний гармонический сигнал с произвольными параметрами, при задании спектра опорного сигнала как аналитически (что рассмотрено в статье), так и численно – путем подстановки рассчитанных<sup>33</sup> (или заданных) спектров опорных сигналов. Последнее является целесообразным в том случае, если строгое аналитическое решение для спектра опорного сигнала получить невозможно, либо функция спектра является громоздкой<sup>34</sup>.

### Литература

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехника, 2010.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
4. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
5. Смирнов Н.И., Горгадзе С.Ф. Помехоустойчивость асинхронных систем передачи с шумоподобными сигналами при действии узкополосных помех. Радиотехника. 1993. № 7. С. 27-36.
6. Калинин В.А., Беагон В.С., Калинин А.В. Корреляционный радиометр для антенных и интерферометрических измерений. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 5(3). С. 88-94.
7. Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е. и др. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью. М.: Радио и связь, 2003.
8. Коратаев П.Д., Миронов В.А., Неровный В.В. Поиск и обнаружение BPSK сигналов в условиях узкополосной помехи. Теория и техника радиосвязи. 2015. № 1. С. 15-21.
9. Кузьмин Е.В., Зограф Ф.Г. Повышение вероятности правильного поиска шумоподобного сигнала по времени запаздывания на фоне тональной помехи. Успехи современной радиоэлектроники. 2016. № 11. С. 137-140.
10. Bek M.K., Shaheen E.M., Elgamel S.A. Analysis of the global position system acquisition process in the presence of interference. IET Radar, Sonar & Navigation. 2016, vol. 10, no. 5, pp. 850-861.
11. Ye F., Tian H., Che F. CW interference effects on the performance of GPS receivers. Progress In Electromagnetics Research Symposium - Fall (PIERS - FALL), 19-22 November 2017, Singapore. pp. 66-72.
12. Куликов Г.В., Нестеров А.В., Лелюх А.А. Помехоустойчивость приема сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией в присутствии гармонической помехи. Журнал радиоэлектроники. 2018. № 11. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/nov18/9/text.pdf>.
13. Du R., Yue L., Yao S., Zhang D., Wang Y. Single-tone interference method based on frequency difference for GPS receivers. Progress In Electromagnetics Research M. 2019. vol. 79. pp. 61-69.
14. Кузьмин Е.В. О влиянии квантования по уровню на эффективность процедуры поиска шумоподобного сигнала по задержке на фоне шума и гармонической помехи. Цифровая обработка сигналов. 2020. № 2. С. 41-45.
15. Куликов Г.В., До Чунг Тиен. Эффективность фазового алгоритма адаптивной фильтрации при приеме сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией. Журнал радиоэлектроники. 2020. № 4. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/apr20/9/text.pdf>.
16. Кузьмин Е.В. Повышение эффективности обработки сигналов на фоне гармонической помехи за счёт выбора функции предварительного взвешивания для частотного режектора. Цифровая обработка сигналов. 2021. № 4. С. 16-20.
17. Кузьмин Е.В., Зограф Ф.Г. Влияние гармонической помехи на эффективность процедуры беспорогового поиска шумоподобного сигнала по времени запаздывания с переходом в частотную область определения. Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67. № 8. С. 774-781.
18. Кузьмин Е.В. Анализ частотных характеристик процедур квадратурной корреляционной обработки комплексных сигналов. Цифровая обработка сигналов. 2020. № 4. С. 13-20.
19. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000.
20. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
21. Ярлыков М.С. Оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы приема и обработки ВОС-сигналов в перспективных глобальных навигационных спутниковых системах. Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 1. С. 39-61.
22. Understanding GPS: principles and applications. 2nd ed. / Eds. E.D. Kaplan, C.J. Hegarty. Boston; London: Artech-House, 2006.

<sup>33</sup> На основе дискретного (быстрого) преобразования Фурье, применяемого к отсчетам опорного сигнала.

<sup>34</sup> Например, для сложных сигналов с частотной модуляцией, манипуляцией.