

СТРУКТУРА МНОГОМЕРНЫХ АНСАМБЛЕЙ СИГНАЛОВ И МЕТОДЫ ИХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА

Быховский М.А., доктор технических наук, профессор, e-mail: bykhmark@gmail.com

MULTIDIMENSIONAL SIGNAL ENSEMBLES, THEIR STRUCTURE AND METHODS OF OPTIMAL RECEPTION

Bykhovskiy M.A.

The paper examines the issues related to the structure of multidimensional signal ensembles with hyperphase modulation (HPPM). The author considers two functional designs of optimal demodulators of HPPM signals; one of which is synthesized on the basis of the Neumann-Pearson method, and the second one is based on a method that allows to determine the coordinates of signal points for HPPM signals by using a maximum likelihood method. The proposed methods allow to estimate with a high accuracy the probability of error when receiving HPPM signals.

The paper contains formulas and charts that allow to estimate the probability of error during signal reception depending on normalized signal duration, as well as on the specific speed of message transmission and on the signal-to-noise ratio at the demodulator input. The author presents the results of a comparison of the communication system with HPPM to traditional communication systems, in which two-dimensional signal ensembles and error-correcting codes (ECC) are used. It is shown that communication systems with HPPM provide 2 ... 3 dB higher energy efficiency, as well as 1.5 ... 2 times higher spectral efficiency as compared to traditional communication systems. It is noted that the technical implementation of communication systems with HPPM is substantially simpler than communication systems in which two-dimensional signal ensembles and long ECC are utilized.

Key words: Optimal multidimensional signals, error-correcting codes, message transmission rate, energy and spectral efficiency, optimal signal reception, reception immunity.

Ключевые слова оптимальные многомерные сигналы, помехоустойчивые коды, скорость передачи сообщений, энергетическая и спектральная эффективность, оптимальный приема сигналов, помехоустойчивость приема.

Введение

Основными характеристиками систем связи являются надежность передачи сообщений, характеризуемая значением вероятности ошибки при приеме определенной последовательности информационных символов (P_{ser}), энергетика линии связи, определяющая значение ρ_s – отношение сигнал/шум на входе демодулятора, необходимое для обеспечения требуемой надежности, и удельная скорость передачи сообщений (R_f бит/сек·Гц), равная количеству бит, передаваемых по каналу связи в одну секунду, отнесенное к ширине (F) его полосы частот. Важной характеристикой системы связи является также задержка между моментом поступления сообщения на входе системы связи и моментом его поступления на ее выходе (за исключением задержки, связанной с распространением сигнала в канале связи), которая определяется величиной $2(FT)$, где T длительность сигналов, принадлежащих к ансамблю сигналов (АС), который применяется для передачи сообщений.

Огромный вклад в установление основных закономерностей, связанных с передачей сообщений по каналам связи, внес американский ученый Клод Шеннон, создавший теорию информации. Его исследования по-

Исследуются вопросы, связанные со структурой ансамблей многомерных сигналов с гиперфазовой модуляцией (ГПФМ). Рассмотрены две функциональные схемы оптимальных демодуляторов сигналов таких сигналов, одна из которых синтезирована на основе метода Неймана-Пирсона, а вторая – на основе метода, позволяющего определять координаты сигнальных точек для сигналов ГПФМ. Предложены методы, позволяющие с высокой точностью оценить вероятность ошибки при приеме сигналов с ГПФМ.

Представлены формулы и графики, позволяющие оценить вероятность ошибки при приеме сигналов в зависимости от нормированной длительности сигналов, а также от удельной скорости передачи сообщений и от отношения сигнал/шум на входе демодулятора. Приведены результаты сравнения системы связи с ГПФМ и традиционными системами связи, в которых применяются двумерные ансамбли сигналов и помехоустойчивые коды (ПК). Показано, что системы связи с ГПФМ обеспечивают большую на 2...3 дБ энергетическую эффективность, а также большую в 1,5...2 раза спектральную эффективность по сравнению традиционными системами связи. Отмечается, что техническая реализация систем связи с ГПФМ существенно проще систем связи, в которых используются двумерные ансамбли сигналов и длинные ПК.

казали какие методы передачи сообщений по каналам связи должны использоваться при разработке перспективных систем связи, а также какими предельными характеристиками могут обладать «идеальные» системы связи, обеспечивающие необходимую надежность передачи сообщений, при минимально возможной энергетике и минимальной их задержке, связанной с обработкой сигналов при их демодуляции.

Важнейшим результатом теории информации является теорема Шеннона о пропускной способности аналогового канала связи, в котором действует гауссовский шум [1]. Именно такая модель канала во многих случаях адекватна реальным условиям передачи сообщений. Теорема Шеннона устанавливает соотношение между максимально возможным значением скорости $R_{fm} = \max(R_f)$ и энергетикой линии связи, определяемой параметром ρ_{so} :

$$R_{fm} = \log_2(1 + \rho_{so}) \text{ или } \rho_{so} = (2^{R_{fm}} - 1). \quad (1)$$

В [1] также показано, что в «идеальной» системе связи при $\rho_s = const$ может быть обеспечена практически абсолютная надежность связи, если для передачи сообщений используются сигналы достаточно большой нормированной длительности, равной (FT) , т.е. согласно этой теореме $P_{ser} \rightarrow 0$ при $(FT) \rightarrow \infty$.

Шеннон ввел в теорию связи наглядную геометрическую интерпретацию проблем, связанных с передачей сигналов. При этом каждому сигналу в соответствии ставилась сигнальная точка (CT_s) в N -мерном пространстве, где $N = 2 \text{int}(FT)$ (здесь $\text{int}(x)$ – целая часть числа x , далее будем считать, что (FT) – целое число), а ансамблю сигналов ставилось в соответствие множество CT_s .

В [1] были введены важные критерии оценки эффективности систем связи, определив их энергетическую и спектральную эффективность (ЭЭ и СЭ). Коэффициенты ЭЭ и СЭ вычисляются следующим образом: $\gamma_{ee} = 10 \lg(\rho_{so}/\rho_s) < 0$ дБ и $\gamma_{se} = (R_f/R_{fm}) < 1$, где ρ_s и R_f – параметры конкретных систем связи, которые сравниваются с «идеальной», для которой $\gamma_{ee} = 0$ дБ и $\gamma_{se} = 1$. Эти критерии широко используются при разработке новых систем связи [2]. Важно отметить, что в «идеальной» по Шеннону системе связи по аналоговому каналу связи передаются только информационные символы, значения которых могут принимать значения, лежащие в заданном интервале $[-Z, Z]$. Количество возможных последовательностей таких символов равно $M = 2^{R_f(FT)}$. Для их передачи в «идеальной» системе на передающем конце применяются только модулятор, с помощью которого номер определенной последовательности информационных символов известной длины преобразуется в евклидовы координаты сигнала в N -мерном пространстве для его передачи по каналу связи. На другой стороне линии связи применяется демодулятор, осуществляющий обработку принимаемого сигнала. В демодуляторе определяются его евклидовы координаты, и формируется номер принятой последовательности символов, который направляется пользователю системы.

В современных системах связи для обеспечения надежности применяются помехоустойчивые коды (ПК), кодовые комбинации (КК) которых помимо информационных символов содержат также и избыточные, уменьшающие кодовую скорость ($R_c < 1$). Для передачи символов КК применяются системы связи, в которых

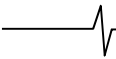
используются двумерные АС, обеспечивающие удельную скорость передачи сообщений, равную R_{fm} . При использовании ПК реальная удельная скорость передачи уменьшается до значения $R_{fo} = R_{fm} R_c$. Таким образом, применение в системах связи ПК обязательно приводит к снижению их СЭ. Следует иметь в виду, что полоса частот, выделяемая для создания системы связи, обеспечивающей заданную удельную скорость передачи сообщений, является весьма ценным природным ресурсом. Так, например, операторы сотовых систем связи платят государству миллиарды \$ за полосу частот, которая выделяется им для создания сетей связи на определенной территории. Поэтому экономическая эффективность систем связи, использующих двумерные АС, из-за необходимости использования в них ПК неизбежно существенно снижается СЭ.

В [1] доказательство теоремы (1) не носило конструктивного характера, так как вопросы, связанные с алгоритмами формирования конкретного оптимального АС, а также с демодуляцией принятых сигналов в [1] не рассматривались. В 1950 г. американским ученым Стефаном Райсом, создателем статистической радиотехники, было выполнено исследование системы связи, в которой для передачи сообщений использовались N -мерные АС, сигнальные точки которых расположены на поверхности N -мерной сферы, а прием этих сигналов осуществлялся методом максимального правдоподобия (МП) [3]. В [3] была получена оценка вероятности P_{ser} , из которой следовала теорема (1). Таким образом, Райсом оптимальность ансамбля поверхностно-сферических сигналов (ПСАС) была доказана путем анализа надежности системы связи, в которой выполняется оптимальная демодуляция принимаемых сигналов.

В 1959 г. Шеннон также представил конструктивное доказательство своей теоремы [4], рассмотрев не только ПСАС, но и объемно-сферический ансамбль сигналов (ОСАС), в котором CT_s лежат не только на поверхности, но и внутри N -мерной сферы. Эти АС оказались практически эквивалентными с точки зрения качества связи, которые они могут обеспечить. Впрочем, эта эквивалентность непосредственно следует из того, что при $N \gg 1$ весь объем сферы расположен вблизи ее поверхности. В [4] были получены существенно более точные оценки для P_{ser} , нежели в [3], и, кроме того, из представленного анализа следовало, что повышение надежности связи при использовании ПСАС или ОСАС связано с тем, что минимальное евклидово расстояние между СТ этих АС (D_m) увеличивается при $\rho_s = const$ по закону $D_m = \hat{d}_m \sqrt{(FT)\rho_s}$, где \hat{d}_m – нормированное значение этого расстояния. Значения \hat{d}_m и R_f – удельной скорости передачи сообщений, которую можно обеспечить, применяя ПСАС или ОСАС, связаны друг с другом соотношениями [4]:

$$R_f(\hat{d}_m) = \log_2(4/\hat{d}_m^2) \text{ или } \hat{d}_m(R_f) / 2 = 2^{-R_f/2}. \quad (2)$$

В работах [3] и [4] конкретные алгоритмы построения многомерных ПСАС и ОСАС также не рассматривались. Как и в [1], в [3] и [4] предполагалось, что сигналы эти



формируются путем случайного выбора отрезков гауссовского шума, длительность которых равна T . Шеннон показал [1, 4], что при таком выборе сигналов с весьма большой вероятностью будут сформированы оптимальные ПСАС и ОСАС.

Крупным недостатком любого АС, сигналы которого сформированы не по регулярным правилам, а случайным образом, является то, что при их демодуляции методом МП необходимо осуществлять полный перебор всех возможных сигналов данного АС, в результате которого можно будет найти тот, для которого евклидово расстояние до сигнала, поступившего на вход демодулятора, имеет минимальное значение. Поскольку с увеличением T количество сигналов в многомерных АС увеличивается по экспоненциальному закону, то практически невозможно осуществить такой перебор и реализовать оптимальный прием сигналов, принадлежащих АС, сформированному случайным образом. Этим, по-видимому, объясняется то, что до сего времени многомерные АС не нашли практического применения в современных системах связи.

В этих системах для обеспечения надежной связи в настоящее время применяются двумерные АС и ПК, у которых КК имеют весьма большую длину (N_{KK}). В настоящее время разработаны методы декодирования ПК с большой длиной КК, сложность которых растет пропорционально $(N_{KK})^2$. Каждую КК, символы которой передаются с помощью сигналов, принадлежащих выбранному АС, можно рассматривать как определенный сигнал (МС) многомерного ансамбля сигналов. Такой ансамбль в теории связи называют [2] сигнально-кодовой конструкцией (СКК). Минимальное евклидово расстояние между такими сигналами равно $D_{KK} = d_{AC} \sqrt{N_{KK} \hat{d}_H(R_c)}$, где d_{AC} – минимальное расстояние между сигналами, принадлежащими к используемому в системе связи АС, N_{KK} – длина КК, а $\hat{d}_H(R_c)$ – нормированное минимальное хэммигово расстояние между КК, R_c – кодовая скорость ПК. Для ПК, относящихся к классу кодов, наиболее эффективно исправляющих ошибки, возникающие при демодуляции сигналов, установлены верхние (U_{sup}) и нижние (U_{min}) границы области, в которой может находиться зависимость $\hat{d}_H(R_c): U_{min}(R_c) \leq \hat{d}_H(R_c) \leq U_{sup}(R_c)$ [2]. Наиболее точными границами являются верхняя граница Бассалыго-Элайеса и нижняя – Варшавова-Гильберта. Следует иметь ввиду, что $\hat{d}_H(R_c) < 1$, причем величина $\hat{d}_H(R_c)$ быстро уменьшается с увеличением кодовой скорости из-за того, что при этом уменьшается количество избыточных символов в КК и, как следствие, уменьшается количество ошибок в КК, которое может быть исправлено ПК. Величина D_{KK} , как и D_m в ПСАС, определяет надежность связи, так как эти параметры определяют размер зоны правильного (ЗП) приема в евклидовом пространстве; при поступлении сигнала на вход демодулятора – чем этот размер больше, тем меньшее значение имеет вероятность

ошибки P_{ser} . Как показывают расчеты [5], для ПСАС при одинаковой длине сигналов ПСАС и КК в ПК величина $D_m > D_{KK}$ и поэтому характеристики надежности связи у систем с ПСАС всегда ближе к «идеальным», чем у систем связи с ПК.

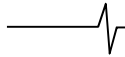
В книге [5] был предложен регулярный метод построения сигналов, принадлежащих ПСАС. Такой ансамбль из-за особенностей процедуры его формирования был назван в [5] гиперфазовой модуляцией (ГПФМ). В [5] показано, что этот сигнал с точки зрения возможности обеспечения надежности связи обладает всеми свойствами ПСАС, установленными в [4]. Такой ансамбль имеет регулярную структуру, что позволяет технически реализовать оптимальную демодуляцию принадлежащих к нему сигналов, используя метод МП. При этом, в отличие от оптимальной демодуляции случайно выбранных сигналов ПСАС, исследованной в [3] и [4], сложность реализации которых растет экспоненциально с увеличением (FT), для сигналов с ГПФМ эта сложность, как показано в [5], растет с увеличением (FT) только линейно. В [5] рассмотрены также вопросы, связанные с технической реализацией модуляторов и демодуляторов для ГПФМ, а также дано сравнение по надежности, систем связи в которых может быть применена ГПФМ, с рядом современных систем связи, в которых применяются различные ПК и СКК.

В данной статье, которая является продолжением статьи [6], исследуются вопросы, связанные со структурой ПСАС, которая определяет разделение множества всех сигналов на группы, зависящие от количества сигналов, расположенных на разных расстояниях от любого сигнала, принадлежащего ПСАС. С учетом структуры ПСАС в статье предложены методы, позволяющие с высокой точностью оценить вероятность ошибки при приеме сигналов ПСАС. Рассмотрены две функциональные схемы оптимальных демодуляторов сигналов ПСАС, одна из которых синтезирована на основе метода Неймана-Пирсона, а вторая, в которой методом максимального правдоподобия определяются координаты сигнальных точек для сигналов ПСАС.

В статье приведены формулы и графики, позволяющие оценить зависимость вероятности ошибки при приеме сигналов в зависимости от нормированной длительности сигналов, а также от удельной скорости передачи сообщений и от отношения сигнал/шум на входе демодулятора.

Структура многомерных поверхностно-сферических ансамблей сигналов

Если воспользоваться геометрической терминологией [4], то каждый сигнал $S_m(t)$, принадлежащий многомерному ПСАС, можно трактовать как соответствующую ему сигнальную точку CT_m на поверхности многомерной сферы. Сигнальная точка CT_m окружена CT_s , соответствующими другим сигналам ПСАС, которые находятся за пределами конусной области в N -мерном евклидовом пространстве, представляющей собой зону правильного приема (ЗП) сигнала $S_m(t)$. Ошибка при демодуляции



произоидет, если из-за действия шума CT_m , соответствующая принятому сигналу при передаче $S_m(t)$, окажется вне ЗП этого сигнала. Эта область на поверхности сферы имеет площадь, пропорциональную величине $\int_0^{\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta$, которая определяется величиной телесного угла $\Delta\varphi_1$, ось которого проходит через CT_m . Отношение площади всей многомерной сферы к площади ее поверхности, лежащей внутри конусной области, в которой находится ЗП сигнала $S_i(t)$, равно количеству сигналов в ПСАС [4]:

$$M_N = 2^{R_f(FT)} \cong \text{int} \left[\frac{2 \int_0^{\pi/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta} \right]. \quad (3)$$

В (3) удельная скорость передачи сообщений согласно (2) равна $R_f(\hat{d}_m) = \log_2(4/\hat{d}_m^2)$. Ниже при записи сигналов $S_i(t)$ будем использовать значения их уровней, нормированные к мощности шума, действующего на входе демодулятора. При такой нормировке одно из важных условий, которое должно выполняться для всех сигналов ПСАС, может быть записано в виде $\int_0^T S_i^2(t) dt = U_o = 2(FT)\rho_s$, а минимальное значение евклидова расстояния между любыми двумя сигналами ПСАС оказывается равным $D_m = \min \left\{ \sqrt{\int_0^T [S_i(t) - S_j(t)]^2 dt} \right\} = \min \left\{ 2\sqrt{(FT)\rho_s(1 - \lambda_{ij})} \right\} = (\sqrt{(FT)\rho_s}) \hat{d}_m$.

В формуле для D_m обозначено $\lambda_{ij} = \int_0^T S_i(t)S_j(t) dt / U_o = \cos(\Delta\varphi_{ij})$ – коэффициент взаимной корреляции двух сигналов $S_i(t)$ и $S_j(t)$ ($\Delta\varphi_{ij}$ – угол между двумя векторами, исходящими из центра многомерной сферы в CT_i и CT_j), $\hat{d}_m = 2 \sin(\Delta\varphi_1/2)$ – нормированное значение минимального евклидова расстояния между сигналами ПСАС. Для случая, когда $\Delta\varphi_{ij} = \Delta\varphi_1$ коэффициент корреляции сигналов $S_i(t)$ и $S_j(t)$ равен $\lambda_o = \cos(\Delta\varphi_1) = 1 - \sin^2(\Delta\varphi_1/2) = (1 - 0,5\hat{d}_m^2)$. Из этого соотношения видно, что при небольших значениях \hat{d}_m величина λ_o близка к 1.

При выборе любого сигнала в ПСАС (например, $S_m(t)$) все остальные могут быть разбиты на группы (на подмножества A_k). Сигналы, принадлежащие k -й группе, обозначим $S_{ki}(t)$ ($S_{ki}(t) \in A_k$). Если принять, что сигнальная точка (CT_m) выбранного сигнала расположена на полюсе многомерной сферы, на которой размещены все СТ ПСАС, то в множество A_1 войдут сигналы $S_{li}(t)$, которым соответствуют CT_{li} , находящиеся на минимальном расстоянии от CT_m , равном D_m . Относительно CT_m эти CT_{li} расположены в коль-

цевой области на поверхности сигнальной сферы, лежащей между двумя многомерными конусами, каждый из которых имеет телесный угол, равный $\Delta\varphi_1$ и $3\Delta\varphi_1$. Кольцевая область, расположенная между этими двумя углами, занимает площадь поверхности сферы, пропорциональную $\int_{\Delta\varphi_1}^{3\Delta\varphi_1} \sin^{N-2}(\theta) d\theta$, а количество сигналов

ПСАС, которые принадлежат этой группе, равно $M_1 \cong \text{int} \left[\frac{\int_{\Delta\varphi_1/2}^{3\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta} \right] = 2^{R_f(FT)}$. Полное количество (K) групп (множеств A_k) сигналов ПСАС равно, очевидно, $K = \text{int} \left(\frac{\pi - \Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1} \right)$, причем в множество A_k

входят все CT_{ki} , расположенные в кольцевой области поверхности сигнальной сферы, лежащей между двумя многомерными конусами, каждый из которых имеет телесный угол, равный $(2k-1)(\Delta\varphi_1/2)$ и $(2k+1)(\Delta\varphi_1/2)$. Угловое расстояние этих CT_{ki} от CT_m равно $k\Delta\varphi_1$, причем все сигналы, принадлежащие к k -й группе, имеют с сигналом, соответствующим CT_m , одинаковый коэффициент корреляции, равный $\lambda_{ki} = \cos(k\Delta\varphi_1) = (1 - 0,5\hat{d}_m^2)$. Количество принадлежащих k -й группе сигналов ПСАС, равно

$$M_k \cong \text{int} \left[\frac{\int_{(2k-1)\Delta\varphi_1/2}^{(2k+1)\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\Delta\varphi_1/2} \sin^{N-2}(\theta) d\theta} \right] = 2^{R_f(FT)}. \quad (4)$$

Отметим соотношения, которые следуют из (4): $R_{fk} = R_{f(K-k)}$ и $M_N = \sum_{k=1}^K M_k$. Как показано в [4] $\int_0^\pi \sin^{N-2}(\theta) d\theta \cong \frac{\sin^{N-1}(\alpha)}{(N-1)\cos(\alpha)}$, поэтому для расчета

значения M_k можно использовать следующую формулу $M_k \cong \Psi_{k+1}(\Delta\varphi_1) - \Psi_k(\Delta\varphi_1)$, где

$$\Psi_k(\Delta\varphi_1) = \left(\frac{\sin[(2k-1)\Delta\varphi_1/2]}{\sin(\Delta\varphi_1/2)} \right)^{2(FT)-1} \left(\frac{\cos(\Delta\varphi_1/2)}{\cos[(2k-1)\Delta\varphi_1/2]} \right) \quad (k = 1 \dots K).$$

Важно иметь в виду, что для каждого сигнала $S_m(t)$ в ПСАС на минимальном от него евклидовом расстоянии расположено всего M_1 сигналов. Отсюда следует, что вероятность ошибок при демодуляции любого переданного сигнала $S_m(t)$ возникает, в основном, потому что из-за действия шума происходит смещение сигнальной точки принятого сигнала в область правильного приема одного из M_1 сигналов, ближайших к переданному.

Помехоустойчивость оптимального приема сигналов ПСАС

Для синтеза оптимального демодулятора сигналов, имеющих одинаковую энергию и реализующего их прием

по методу МП, можно воспользоваться методом Неймана-Пирсона. В результате получим демодулятор, функциональная схема которого показана на рис. 1 [7].

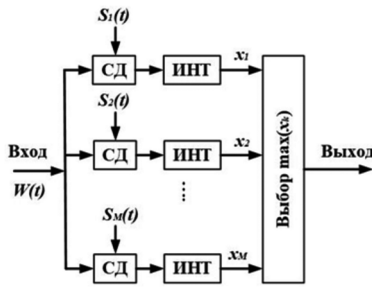


Рис. 1. Функциональная схема демодулятора МП поверхностно-сферического АС

Эта схема содержит $M_N = 2^{R_j FT}$ каналов приема сигналов, входящих в ПСАС, используемый для передачи сообщений. В этом демодуляторе осуществляются вычисления значения функций правдоподобия для всех возможных сигналов, входящих в ПСАС, вычисленные значения сравниваются друг с другом по величине и принимается решение о приеме того сигнала, для которого функция правдоподобия имеет наибольшее значение. Такой демодулятор обеспечивает максимальную помехоустойчивость приема сообщений. Следует, однако, иметь в виду, что техническая реализация демодулятора рис. 1 практически невозможна из-за ее огромной сложности, так как число сигналов в ансамбле ПСАС весьма значительно ($M_N \gg 1$). Ниже будет приведена другая схема оптимального демодулятора, который может быть практически реализован, так как его сложность растет все лишь линейно с увеличением нормированной длины сигналов, входящих в ПСАС, и не зависит от количества сигналов в ПСАС.

Представим метод анализа помехоустойчивости приема сообщений в демодуляторе рис. 1. На его вход поступает сигнал $W(t) = S_m(t) + n(t)$, где $S_{ki}(t)$ – сигналы, принадлежащие множествам A_k ($S_{ki}(t) \in A_k$, $k = 1 \dots K$, $i = 1 \dots M_K$), энергия которых, как пояснялось в предыдущем разделе, одинакова и равна U_o . Как видно из рис. 1, сигналы $S_{ki}(t)$ подаются на входы корреляторов, в каждом из которых имеется синхронный детектор (СД) и интегратор (ИНТ), причем на опорные входы СД поступают сигналы ПСАС. На выходах корреляторов формируются нормированные напряжения, равные $\int_0^T W(t) \hat{S}_{ki}(t) dt$, где T – длительность сигналов, $\hat{S}_{ki}(t) = S_{ki}(t) / \sqrt{U_o}$ (отметим, для всех сигналов ПСАС справедливо равенство $\int_0^T \hat{S}_{ki}^2(t) dt = 1$). Если был передан сигнал $S_m(t)$, то на выходах корреляторов на рис. 1, относящихся к множеству сигналов $S_{ki}(t) \in A_k$, в которое входят M_K сигналов, будут действовать напряжения, равные:

$$\begin{aligned} x_m &= \sqrt{U_o} + v_m, \\ x_{ki} &= \int_0^T W(t) \hat{S}_{ki}(t) dt = U_{ki} + \lambda_{ki} v_m + v_{ki}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $U_o = \int_0^T S_m^2(t) dt = (FT) \rho_s$, $U_{ik} = \int_0^T \hat{S}_{ki}(t) S_m(t) dt = \lambda_{ki} \sqrt{U_o}$, $\lambda_{ki} = \cos(k \Delta \varphi)$. Величины v_m и v_{ki} ($i = 1 \dots M_K$) являются случайными, они распределены по гауссовскому закону и являются некоррелированным. Эти величины имеют среднее значение, равное 0, и дисперсии, равные, соответственно, $\sigma^2 = 1$ и $\sigma_{ki}^2 = (1 - \lambda_{ki}^2)$.

Ошибка при приеме сигнала $S_m(t)$ произойдет в том случае, если напряжение на выходе хотя бы одного из $(M_N - 1)$ каналов приема, показанных на схеме рис. 1, превзойдет напряжение, действующее на выходе m -го канала приема, т.е., если будут выполнены условия $x_m \leq \max(x_{ki})$. Обозначим $P_{ser} = Pr[x_m \leq \max(x_{ki})]$ вероятность ошибки при приеме сигнала $S_m(t)$. Для определения ее точного значения необходимо учитывать все указанные условия для $k = 1 \dots K$, и $i = 1 \dots M_K$, общее число которых равно $(M_N - 1)$.

Поскольку при точном вычислении P_{ser} оказывается весьма сложно учесть все отмеченные выше условия, то будем отдельно оценивать значения P_{serk} сверху для k -й группы сигналов $S_{ki}(t) \in A_k$, учитывая указанные выше условия, относящиеся только к этой группе. Это позволяет записать оценку сверху вероятности ошибки приема сигнала $S_m(t)$, с помощью следующей формулы [8]:

$$P_{ser} \leq \sum_{k=1}^K P_{serk}, \quad (7)$$

где $P_{serk} = Pr\{C(\lambda_{km}, U_o, v_m)(1 - \lambda_{km})(\sqrt{U_o} + v_m) \leq Z_k\}$, где $C(\lambda_{km}, U_o, v_m) = (1 - \lambda_{km})(\sqrt{U_o} + v_m)$, $Z_k = \max_{i \neq m} v_{ki}$ при $S_{ki}(t) \in A_k$ и $i = 1 \dots M_K$. Из (7) следует, что каждая вероятность P_{serk} представляет собой вероятность выполнения только одного из $K = \text{int}\left(\frac{\pi - \Delta \varphi_1}{\Delta \varphi_1}\right)$ условий для

сигналов $S_i(t) \in A_k$. В [8] показано, что вероятность выполнения условия ($Pr[Z_k \geq \text{при } v_m = \text{const}]$ может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} Pr[Z_k \geq C(\lambda_{km}, U_o, v_m)] &\leq \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^{M_k} Pr[v_{ki} \geq C(\lambda_{km}, U_o, v_m)] \right\}^{\gamma_k}, \end{aligned} \quad (8)$$

где каждый параметр γ_k может быть произвольным числом из интервала $0 \leq \gamma_k \leq 1$, которое выбирается таким образом, чтобы оценка сверху (8) имела бы минимальное значение, т.е. была бы наиболее точной. Учитывая, что v_{ki} и v_m являются независимыми гауссовскими величинами, имеющими распределения вероятностей, равные $p(v_m) = \frac{\exp(-0,5v_m^2 / \sigma^2)}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ и

$$p(v_{ki}) = \frac{\exp(-0,5v_{ki}^2 / \sigma_{ki}^2)}{\sqrt{2\pi\sigma_{ki}}}, \quad \text{где } \sigma^2 = 1 \text{ и } \sigma_{ki}^2 = (1 - \lambda_{km}^2),$$

оценку вероятности $Pr[v_{ki} \geq C(\lambda_{km}, U_o, v_m)]$ при $v_m = const$ можно определить по следующей формуле:

$$Pr[v_{ki} \geq C(\lambda_{km}, U_o, v_m)] \leq (M_k)^{\gamma_k} \left[\int_{w_{mk}(v_m)}^{\infty} p(v_{ki}) dv_{ki} \right]^{\gamma_k}, \quad (9)$$

где $w_{mk}(v_m) = \sqrt{v_{ki} \geq C(\lambda_{km}, U_o, v_m)} / \sigma_{ki}$. Вычисляя в (9) интеграл и учитывая соотношение $\int_X \exp(-0,5x^2) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} < 0,5 \exp(-0,5X^2)$, находим следующую оценку вероятности P_{serk} в (7):

$$P_{serk}(\gamma_k) \leq (M_k)^{\gamma_k} \int_{-\infty}^{\infty} p(v_m) \left[\int_{w_{mk}(v_m)}^{\infty} p(v_{ki}) dv_{ki} \right]^{\gamma_k} dv_m < \left(\frac{\beta M_k}{2} \right)^{\gamma_k} \int_{-\infty}^{\infty} p(v_m) \exp \left[-\gamma_k \beta \frac{(\sqrt{U_o} + v_m)^2}{2} \right] dv_m < \frac{1}{2(\sqrt{1 + \gamma_k \beta})} \left(\frac{\beta M_k}{2} \right)^{\gamma_k} \exp \left[-\frac{\gamma_k \beta U_o}{2(1 + \gamma_k \beta)} \right], \quad (10)$$

где $\beta = \left(\frac{1 - \lambda_{km}}{1 + \lambda_{km}} \right)$. Вычисляя в (10) значение γ_k из условия $\frac{d[P_{serk}(\gamma_k)]}{d\gamma_k} = 0$, найдем, что, если $0 \leq Q(U_o, M_k) \leq 1$, то $\gamma_k = f[Q(U_o, M_k)] \Delta Q(U_o, M_k)$. При этом

$$P_{serk} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 + \gamma_k \beta}} \exp \left\{ -\left[\sqrt{\beta U_o / 2} - \sqrt{\ln(\beta M_k / 2)} \right]^2 \right\}$$

если же $Q(U_o, M_k) > 1$, то $\gamma_k = 1$ и

$$P_{serk} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 + \beta}} \exp \left\{ -\left[\frac{\beta U_o}{2(1 + \beta)} - \ln(\beta M_k / 2) \right] \right\} \quad (11)$$

В (11) $f(x) = 0,5[1 + \text{sign}(x)]$, $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$ и $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $Q(U_o, M_k) = \left(\sqrt{\frac{\beta U_o}{2 \ln(\beta M_k / 2)}} - 1 \right)$. Условие $Q(U_o, M_k) > 1$ выполняется в том случае, если $U_o > \left(\frac{4 \ln(\beta M_k / 2)}{\beta} \right)$. Учитывая, что $U_o = (FT)\rho_s$ и $M_k = 2^{R_k(FT)}$, формулы (11) могут быть представлены в виде

$$P_{serk} \leq \frac{\sqrt{1 + \lambda_{km}}}{2} \exp \left[-(FT) \Phi(\rho_s, R_{fk}, \beta) \right], \quad \text{где} \quad (12)$$

$$\Phi(\rho_s, R_{fk}, \beta) = \max \left\{ \left[\sqrt{\beta \rho_s} - \sqrt{R_{fk} \ln(2)} \right]^2, \frac{\beta \rho_s}{1 + \beta} - R_{fk} \ln(2) \right\}.$$

Подставив значения P_{serk} из (12) в (7), получим оценку сверху для вероятности ошибки P_{ser} при демодуляции сигналов ПСАС.

Метод демодуляции сигналов ПСАС, основанный на оптимальной оценке его евклидовых координат

В оптимальном демодуляторе сигналов ПСАС, схема которого приведена на рис. 1, необходимо вычислить коэффициент корреляции между принятым сигналом и всеми сигналами ПСАС. Ввиду того, что при большой нормированной длительности сигналов ПСАС их количество огромно, реализовать такой демодулятор, как уже указывалось, практически невозможно.

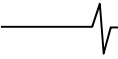
В [5] предложен другой метод демодуляции таких сигналов, основанный на последовательном синхронном детектировании принятого сигнала и оптимальной оценке его евклидовых координат. Количество вычислений, которое требуется выполнить при такой оценке, пропорционально размерности ПСАС, что значительно меньше количества сигналов в этом ансамбле. Поэтому такой демодулятор по сложности технической реализации сопоставим со сложностью демодуляции сигналов, принадлежащих к традиционным видам модуляции, таких, например, как квадратурно-амплитудная модуляция (QAM – Quadrature amplitude modulation), или амплитудно-фазовая манипуляция (APSK – Amplitude Phase Shift Keying).

Сигналы ПСАС, предложенные в [5], имеют следующий вид:

$$S_m(t) = \sqrt{(FT)\rho_s} \sum_{l=1}^{2(FT)-1} s_l(t) R_l \sin(I_l \Delta \varphi_l). \quad (13)$$

В (13) функции $s_l(t)$ представляют собой любые ортогональные нормированные функции, удовлетворяющие условиям $\int_0^T s_l^2(t) dt = 1$, $\int_0^T s_{l1}(t) s_{l2}(t) dt = 0$ при $l1 \neq l2$. Ортогональность сигналов $s_l(t)$ может обеспечиваться, например, за счет их разделения во временной области (в системах с TDMA – Time-division multiple access) или в частотной (в системах с OFDM – Orthogonal frequency-division multiple access). При TDMA время T передачи сигналов разделяется на (FT) интервалов, длительность которых составляет $\tau = T/(FT)$, и в течение l -го интервала времени передаются два сигнала $s_{2l-1}(t) = \sqrt{2} \sin(\omega_o t)$ и $s_{2l}(t) = \sqrt{2} \cos(\omega_o t)$, где ω_o – несущая частота, на которой осуществляется передача сигналов с ГПФМ.

В (13) целые числа I_l – индексы модуляции цифрового сообщения при ГПФМ. Каждому номеру m передаваемого сообщения ($m = 1 \dots M_N$, где $M_N = 2^{R_f(FT)}$) соответствуют $2(FT) - 1$ индексов модуляции, которые могут быть определены с помощью алгоритма, описанного в [5]. Из (13) видно, что многомерный сигнал $S_m(t)$ представляет собой сумму $2(FT) - 1$ элементарных ортогональных сигналов (ЭОС) $s_l(t)$, модулированных по амплитуде, которая пропорциональна величине $R_l \sin(I_l \Delta \varphi_l)$. Эта амплитуда определяет значение l -й



координаты CT_m , расположенной на поверхности сферы, соответствующей сигналу $S_m(t)$ в $2(FT)$ -мерном евклидовом пространстве.

В (13) $R_1 = 1$, $R_l = \prod_{k=1}^{l-1} \cos(I_k \Delta \varphi_k)$, где $\Delta \varphi_l (I_1 \dots I_{l-1}, \Delta \varphi) = 2 \arcsin(\hat{d}_m / 2R_l)$, $\hat{d}_m = 2 \sin(\Delta \varphi_l / 2)$ – минимальное значение нормированного евклидова расстояния между сигналами ПСАС. Величины $\Delta \varphi_l (l = 1 \dots [2(FT) - 1])$ определяют координаты CT_m в сферической системе координат. Все значения $\Delta \varphi_l$ зависят только от $\Delta \varphi_1$ и от индексов модуляции I_1, I_2, \dots, I_{l-1} . Индексы I_l могут принимать любые целые значения из интервала $-M_l \leq I_l \leq M_l$, где $M_1 = \text{int}\left(\frac{\pi}{2\Delta \varphi_1}\right)$, $M_l(I_1 \dots I_{l-1}, \Delta \varphi) = \text{int}\left(\frac{\arccos(\hat{d}_m / 2R_l)}{\Delta \varphi_l}\right)$ при $2 \leq l \leq 2[(FT) - 1]$, $M_{[2(FT)-1]}(I_1 \dots I_{l-1}, \Delta \varphi) = \text{int}\left(\frac{2\pi}{\Delta \varphi_{2(FT)-2}}\right)$ [5].

Отметим важные особенности ГПФМ:

1) при любых значениях $\Delta \varphi_l$ справедливо соотношение $\sum_{l=1}^{2(FT)-1} [R_l \sin(I_l \Delta \varphi_l)]^2 = 1$;

2) евклидово расстояние между двумя сигналами $S_{m_1}(t)$ и $S_{m_2}(t)$, у которых l -е угловые координаты отличаются на 1 (равны I_l и $I_l \pm 1$), имеет минимальное значение, равное $D_m = \sqrt{\int_0^T [S_{m_1}(t) - S_{m_2}(t)]^2 dt} = (\sqrt{(FT)\rho_s}) \hat{d}_m$, где $\hat{d}_m = 2 \sin(\Delta \varphi_l / 2)$;

3) сигналы с ГПФМ представляют сигналы с памятью – параметры l -х угловых координат зависят от значений, которые присвоены всем предшествующим координатам с меньшим номером;

4) максимально возможное значение амплитуды ЭОС уменьшается с увеличением l , так как $R_{l1} \geq R_{l2}$, если $l1 \leq l2$;

5) с увеличением l величины $\Delta \varphi_l$ увеличиваются при изменении индекса модуляции I_l на ± 1 , значение l -й угловой координаты CT_m увеличивается на большую величину, так как $\Delta \varphi_{l1} \leq \Delta \varphi_{l2}$ при $l1 \leq l2$;

6) количество значений $2M_l$, которое может принимать l -я угловая координата CT_m , с увеличением l уменьшается ($M_{l1} \geq M_{l2}$ при $l1 \leq l2$).

Целесообразно отметить, что многомерный АС для передачи сообщений может быть построен и с помощью двумерной QAM. Он также будет состоять из $2[(FT) - 1]$ ЭОС, модулированных по амплитуде. Однако в таком сигнале все ЭОС имеют одинаковые максимальное значение амплитуды, а также одинаковым является коли-

чество значений, которое может принимать каждая координата CT_m такого сигнала в N -мерном пространстве. Кроме того, сигналы с QAM не являются сигналами с памятью, так как модуляция по амплитуде их ЭОС осуществляется информационными символами передаваемого сообщения независимо. Поэтому евклидово расстояние между CT_m многомерного АС, построенного с помощью QAM, в отличие от ГПФМ, с увеличением размерности такого ансамбля при $\rho_s = \text{const}$ не увеличивается.

Выше был выполнен анализ оптимального демодулятора сигналов с ГПФМ, синтезированного на основе критерия Неймана-Пирсона. Это демодулятор, по существу, осуществляет демодуляцию сигналов методом полного перебора всех возможных сигналов, определяя при демодуляции тот сигнал $S_m(t)$, который находится на наименьшем евклидовом расстоянии от принятого $W(t) = S_m(t) + n(t)$.

Однако, так как каждый сигнал в N -мерном евклидовом пространстве может быть представлен CT_m , евклидовы координаты которой передаются, как следует из (13), с помощью ЭОС $s_l(t)$, оптимальный демодулятор может быть построен так, что в нем методом максимального правдоподобия осуществлялась бы оценка значений координат принятого сигнала, которые не обязательно являются целыми числами. В этом демодуляторе должно быть применено многопороговое решающее устройство (МРУ), в котором осуществляется преобразование оценок евклидовых координат в оценки сферических координат, зависящих от индексов модуляции сигнала $S_m(t)$, могущих принимать только определенные дискретные значения. Полученные оценки сферических координат сравниваются в МРУ с известными порогами и в демодуляторе принимается решение о значении соответствующего индекса модуляции сигнала $S_m(t)$ исходя из того, к какому из возможных значений порога полученная оценка ближе. Такой алгоритм демодуляции реализует метод максимального правдоподобия, так как минимизирует евклидово расстояние между принятым сигналом и одним из сигналов ПСАС по каждой из его координат. В отличие от алгоритма Неймана-Пирсона, реализация которого требует полного и огромного по объему перебора всех возможных сигналов, достоинством такого алгоритма демодуляции сигналов ПСАС является то, что в нем методом МП вычисляются только $2[(FT) - 1]$ евклидовых координат принятого сигнала. Такие вычисления технически реализуются гораздо проще полного перебора.

Если для передачи сигналов ПСАС применяются ортогональные сигналы с TDMA, то оценивание евклидовых координат сигналов с ГПФМ осуществляется с помощью синхронной обработки сигналов $W(t)$ так, как это показано на рис. 2 [5]. Эта схема аналогична схеме демодулятора сигналов с QAM, но в ней учитываются особенности ГПФМ, в частности, рекуррентные соотношения между значениями координат сигналов с ГПФМ.

Принимаемый сигнал $W(t)$ поступает на входы двух квадратурных каналов приема, содержащих СД, на

опорные входы которых подаются ЭОС (как отмечалось выше, это могут быть гармонические сигналы $s_{2l-1}(t) = \sin(\omega_o t)$ и $s_{2l}(t) = \cos(\omega_o t)$).

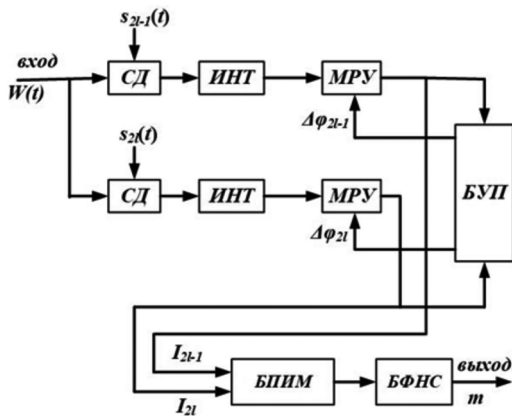


Рис. 2. Синхронный демодулятор сигналов с ГПФМ

Результаты перемножения в СД сигналов $W(t)$ с $s_{2l-1}(t)$ и $s_{2l}(t)$ поступают на интегратор (ИНТ), на выходе которого формируются оценки максимального правдоподобия [5] $(2l-1)$ -й и $2l$ -й координат сигнальной точки принятого сигнала, равных, как видно из (13), $w_{2l-1} = (FT)\rho_s R_{2l-1} \sin(I_{2l-1}\Delta\varphi_{2l-1}) + n_{2l-1}$ и $w_{2l} = (FT)\rho_s R_{2l} \sin(I_{2l}\Delta\varphi_{2l}) + n_{2l}$. (14)

Следует отметить, что из формулы (7) из [6] следует, что $\Delta\varphi_l \approx (\hat{d}_m / R_l)$, где $\hat{d}_m = 2\sin(\Delta\varphi_l / 2) \cong \Delta\varphi_l$. Величина $\Delta\varphi_l$ принимает небольшие значения для ПСАС, в которых сообщения передаются с удельной скоростью $R_f \geq 3$ бит/сек·Гц. В этих случаях можно считать, что в (14) приближенно выполняются соотношения $R_l \sin(I_l \Delta\varphi_l) \cong I_l \hat{d}_m$. При этом, если ввести нормированные напряжения $\hat{w}_{2l-1} = w_{2l-1} / ((FT)\rho_s)$ и $\hat{w}_{2l} = w_{2l} / ((FT)\rho_s)$, то напряжения, поступающие на вход многопорогового решающего устройства (МРУ), можно записать в виде

$$\hat{w}_{2l-1} \cong \hat{d}_m I_{2l-1} + \hat{n}_{2l-1} \text{ и } \hat{w}_{2l} \cong \hat{d}_m I_{2l} + \hat{n}_{2l}, \quad (15)$$

где $\hat{n}_{2l-1} = n_{2l-1} / \sqrt{(FT)\rho_s}$ и $\hat{n}_{2l} = n_{2l} / \sqrt{(FT)\rho_s}$. Отметим, что соотношения (15) по форме не отличаются от соотношений, описывающих работу обычного демодулятора сигналов с амплитудной модуляцией, за исключением того, уровень нормированного шума в данном случае уменьшен в $\sqrt{(FT)\rho_s}$ раз – пропорционально квадратному корню из нормированной длительности сигналов ПСАС. Решение о значениях индексов модуляции I_l в МРУ принимается в соответствии с условием: $(I_l = \text{int}(\hat{w}_l / \hat{d}_m))$, если выполняются условия $|\hat{n}_l| \leq \hat{d}_m / 2$.

Как видно из уравнений (14), описывающих точно работу демодулятора ПСАС, для определения индексов модуляции необходимо знать параметры R_l и $\Delta\varphi_l$. Эти параметры связаны, как показано в [6], рекуррентными

соотношениями, позволяющими их вычислить, если известны значения параметров R_j и $\Delta\varphi_j$ при $j < l$. Это обстоятельство используется в демодуляторе рис. 2: индекс модуляции I_1 , определенный в первом квадратурном канале после приема первого ЭОС сигнала $S_m(t)$, поступает в блок управления порогом (БУП) принятия решения о значении следующего индекса модуляции, зависящего от параметров $\Delta\varphi_2(I_1)$ и $R_2(I_1)$, которые направляются, согласно рис. 2, в нижний квадратурный канал синхронного демодулятора. При ГПФМ, как показано в [6], величины $\Delta\varphi_2$ и R_2 равны $\Delta\varphi_2 = 2\arcsin(\hat{d}_m / 2R_2) \cong \hat{d}_m / R_2$ и $R_2 = \cos(I_1 \Delta\varphi_1)$. Используя их, находим напряжение, с помощью которого в МРУ этого канала определяется индекс модуляции $I_2 = \text{int}(\hat{w}_2 / \hat{d}_m)$. Значение индекса I_2 поступает на вход БУП, в котором вычисляются данные $\Delta\varphi_3(I_1, I_2) \cong \hat{d}_m / R_3(I_1, I_2)$ и $R_3 = \cos(I_1 \Delta\varphi_1) \cos(I_2 \Delta\varphi_2)$, необходимые для определения на третьем этапе демодуляции индекса модуляции I_3 в верхнем квадратурном канале. Демодуляция всех других индексов модуляции сигнала с ГПФМ осуществляется последовательно аналогичным образом. Отметим, что с выходов МРУ значения I_l ($l = \dots 2(FT) - 1$) поступают блок памяти индексов модуляции (БПИМ) из которого совокупность целых чисел $(I_1, I_2 \dots I_{2(FT)-1})$ подается на вход блока формирования номера принятого сообщения (БФНС). В этом блоке она преобразуется в целое число $m(I_1, I_2 \dots I_{2(FT)-1})$ – номер принятого сигнала $S_m(t)$. Алгоритм формирования числа $m(I_1, I_2 \dots I_{2(FT)-1})$ описан в [5], где также показано, что количество вычислений, необходимых для преобразований $m \rightarrow m(I_1, I_2 \dots I_{2(FT)-1})$ на передающем и $m(I_1, I_2 \dots I_{2(FT)-1}) \rightarrow m$ на приемном концах линии связи пропорционально (FT) – нормированной длительности сигналов ПСАС. Сложность выполнения операций при демодуляции сигналов с ГПФМ в устройстве рис. 2 сопоставима со сложностью демодуляции сигналов с QAM.

Более полное рассмотрение обработки принимаемого сигнала в демодуляторе будет изложено в отдельной работе, которая посвящена подробному рассмотрению вопросов построения модуляторов и демодуляторов в системах связи с ПСАС.

Важно отметить, что условия $|\hat{n}_l| \leq \hat{d}_m / 2$, которые используются в устройстве рис. 2 для определения значений индексов I_l , не гарантируют, в отличие от обычной демодуляции сигналов с амплитудной модуляцией, того, что решение о приеме сигналов ПСАС будет принято правильно. В нем определяются координаты сигнальной точки ПСАС, которая расположена наиболее близко к CT_m , соответствующей сигналу $S_m(t)$, поступившему на вход демодулятора.

Если указанные условия выполнены, однако условие

$$D_{\Delta} = \sqrt{\sum_{l=1}^{2(FT)} (\hat{n}_l)^2} < D_m \text{ не соблюдается, где } D_{\Delta} \text{ – евклидово}$$

расстояние между сигналами $S_m(t)$ и $W(t)$, а D_m – минимальное расстояние между сигналами в ПСАС, то при приеме сигнала произойдет ошибка. Отметим, что осуществление контроля за величиной D_{Δ} в устройстве рис. 2 позволяет обнаружить те интервалы времени, когда при демодуляции сигналов произошла ошибка. Эту возможность в системах связи с ГПФМ можно использовать, если для повышения помехоустойчивости приема сообщений применяется перезапрос сигналов, принятых с ошибками.

Чтобы сигнал $S_m(t)$ был принят правильно, необходимо, чтобы соблюдалось условие $D_{\Delta} \leq D_m$. Оценка вероятности ошибки при приеме сигналов в устройстве, схема которого показана на рис. 2, путем детального анализа всех, в том числе нелинейных, операций, которые осуществляются в нем над принятым сигналом, является весьма сложной задачей. Однако такая оценка может быть получена таким образом, как это сделано в [4] и [5]. Для того, чтобы получить такую оценку, следует оценить вероятность нарушения условия

$$D_{\Delta} = \sqrt{\sum_{l=1}^{2(FT)} (\hat{n}_l)^2} \leq D_m. \quad (17)$$

Это событие может произойти в том случае, если в результате смещения CT_m из-за действия шума она окажется за пределами зоны приема (ЗП) сигнала $S_m(t)$. Эта зона для ПСАС представляет собой конусную область Ω_c в N -мерном пространстве, в которой CT_m находится на оси конуса и на расстоянии, равном $\sqrt{2(FT)\rho_s}$ от центра сферы, на которой расположены все CT_s ПСАС [4]. Если координаты w_l ($l = \dots 2(FT) - 1$) CT_m , определенные формулой (14), окажутся вне ЗП, то при демодуляции сигнала произойдет ошибка, равная

$$P_{ser}(R_f, \rho_s, FT) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(w_1, w_2 \dots w_{2(FT)-1})_{w_l \in \bar{\Omega}_c} \prod_{l=1}^{2(FT)-1} dw_l, \quad (16)$$

где $\bar{\Omega}_c$ – область N -мерного пространства, дополнительная к области Ω_c , $p(w_1, w_2 \dots w_{2(FT)-1})$ – плотность распределения вероятностей величин w_l . Непосредственное вычисление многомерного интеграла в (16) весьма сложно, однако эту задачу можно существенно упростить. Для этого при интегрировании в (16) можно расширить несколько область $\bar{\Omega}_c$, включив в нее определенные части ЗП из области Ω_c , в которые смещение CT_m из-за действия шума может произойти с весьма малой вероятностью. При этом следует учитывать, что величина $v = D_{\Delta}^2$ является случайной и имеет

плотность распределения вероятностей χ^2

$$\left(p_{\chi^2}(v) = \frac{v^{FT-1} e^{-v/2}}{2^{FT} \Gamma(FT)} \right), \text{ где } \Gamma(FT) \text{ – гамма-функция.}$$

Таким образом, часть ЗП, в которую из-за действия шума может сместиться CT_m , представляет собой шаровую область, квадрат радиуса которой определяется величиной v . При больших значениях (FT) плотность распределения вероятностей $p_{\chi^2}(v)$ приближается к дельта-функции $p_{\chi^2}(v) \rightarrow \delta(v - 2FT)$. Это указывает на то, что с большой вероятностью CT_m может быть смещена из-за действия шума на расстояние, равное $2FT$ в произвольном направлении относительно оси конуса ЗП. Как показано в [5], к области $\bar{\Omega}_c$ следует отнести те части кольцевой области смещения в ЗП, которые расположены относительно CT_m на расстоянии, большем $\sqrt{2(FT)\rho_s} \operatorname{tg}(\Delta\varphi_1/2)$, за исключением кольцевой области смещения с телесным углом $(\Delta\varphi_1)$, исходящей из CT_m в направлении других СТ, которые расположены относительно CT_m на наименьшем евклидовом расстоянии, равном D_m . К области $\bar{\Omega}_c$ следует отнести также часть ЗП, которая находится в отмеченной выше кольцевой области смещения с телесным углом $(\Delta\varphi_1)$, в которой расположены СТ этого АС, являющиеся ближайшими к CT_m , находясь от нее на расстоянии, большем $\sqrt{2(FT)\rho_s} \sin(\Delta\varphi_1/2)$.

Таким образом, для оценки сверху вероятности ошибки $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ при демодуляции сигналов с ГПФМ, с учетом (16) и сделанных пояснений, можно записать следующую формулу:

$$P_{ser}(R_f, \rho_s, FT) \leq \left(\frac{\pi - 2\Delta\varphi_1}{\pi} \right) \times \times \Pr\{D_{\Delta} \geq \sqrt{2(FT)\rho_s} \operatorname{tg}(\Delta\varphi_1/2)\} + + \left(\frac{2\Delta\varphi_1}{\pi} \right) \Pr\{D_{\Delta} \geq \sqrt{2(FT)\rho_s} \sin(\Delta\varphi_1/2)\} = = \Pr\{D_{\Delta} \geq \sqrt{2(FT)\rho_s} \operatorname{tg}(\Delta\varphi_1/2)\} + + \left(\frac{2\Delta\varphi_1}{\pi} \right) \Pr_{\Delta}\{\sqrt{2(FT)\rho_s} \sin(\Delta\varphi_1/2) \leq \leq D_{\Delta} \leq \sqrt{2(FT)\rho_s} \operatorname{tg}(\Delta\varphi_1/2)\}. \quad (17)$$

Вычисления показывают, что в этой формуле значение вероятности \Pr_{Δ} существенно меньше первого слагаемого. Поэтому для расчета оценки $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ можно использовать формулу

$$P_{ser}(R_f, \rho_s, FT) \leq \Pr\{D_{\Delta} \geq \sqrt{2(FT)\rho_s} \operatorname{tg}(\Delta\varphi_1/2)\} = = \int_{2(FT)\rho_s \operatorname{tg}^2(\Delta\varphi_1/2)}^{\infty} p_{\chi^2}(v) dv \leq \exp\left\{- (FT) \left[\left(\frac{\rho_s}{2^{R_f} - 1} \right) - - 1 - \ln\left(\frac{\rho_s}{2^{R_f} - 1} \right) \right] \right\}.$$

Последняя формула в (18) получена в [5] с помощью оценки интеграла методом Чернова [7]. Из (18) следует формула Шеннона (1) для пропускной способности гауссовского канала связи, т.к. в (18) $\rho_s = (2^{R_{fm}} - 1)$, где R_{fm} – удельная пропускная способность канала связи, а также то, что $P_{ser} \rightarrow 0$ при $(FT) \rightarrow \infty$ только в том случае, если $R_f < R_{fm}$. Отметим, что описанный метод оценки P_{ser} для ПСАС существенно проще того, который изложен в [4].

Анализ структуры ПСАС и помехоустойчивости приема сигналов

В данном разделе дан анализ полученных выше результатов. С помощью формул (3...5) рассчитаны параметры двух ПСАС, позволяющих передавать сообщения по каналу связи с удельной скоростью, равной $R_f = 7$ бит/сек·Гц; их размерность равна $N = 60$ и $N = 288$. Эти параметры представлены в табл. 1. В ней указаны следующие параметры: $M_N = \sum_{k=1}^K M_k$ – полное количество сигналов в ПСАС, K – количество групп сигналов, M_k – количество сигналов, находящихся в k -й группе на угловом расстоянии, равном $k \Delta\varphi_1$ для любого сигнала этого ансамбля, а также параметры $R_{fk} = \frac{\log_2(M_k)}{(FT)}$.

Таблица 1. Параметры ПСАС при $N = 60$ и $N = 288$

$k/(K-k)$	$(FT) = 30, M_o = 6,4 \cdot 10^{63}, K = 18, R_f = 7$ бит/сек·Гц	$(FT) = 144, M_o = 5,8 \cdot 10^{305}, K = 18, R_f = 7$ бит/сек·Гц
	M_k / R_{fk}	M_k / R_{fk}
1/17	$7,98 \cdot 10^{27} / 3,09$	$4,76 \cdot 10^{135} / 3,13$
2/16	$3,1 \cdot 10^{40} / 4,48$	$6,5 \cdot 10^{196} / 4,54$
3/15	$2,3 \cdot 10^{48} / 5,35$	$8,6 \cdot 10^{234} / 5,45$
⋮	⋮	⋮
8/10	$1,5 \cdot 10^{63} / 6,99$	$4 \cdot 10^{304} / 7,02$
9/9	$3,2 \cdot 10^{63} / 7,05$	$4,97 \cdot 10^{305} / 7,05$

Анализ данных этой таблицы показывает:

- 1) количество сигналов в рассматриваемых ПСАС, а также в отдельных их группах A_k весьма значительно;
- 2) количество групп сигналов определяется, как следует из (4) и (5), величиной $\Delta\varphi_1$; оно примерно обратно пропорционально этой величине $\Delta\varphi_1$;
- 3) в k -й и в $(K-k)$ -й группах количество сигналов одинаково;
- 4) наибольшее количество сигналов принадлежит группе A_{k_o} , порядковый номер которой равен $k_o = int(K/2)$.

Указанные свойства ПСАС можно пояснить следующими наглядными соображениями. Если принять, что сигнал $S_m(t)$ расположен на полюсе N -мерной сферы, то первая группа ближайших к нему сигналов расположена в кольцевой полосе на поверхности этой сферы, точки которой имеют сферические координаты, обеспечивающие угловое расстояние между ними и сигналом

$S_m(t)$, равное $\Delta\varphi_1$. С увеличением k кольцевая полоса, в которой расположены сигналы k -й группы, приближается к экватору многомерной сферы, площадь поверхности этой полосы увеличивается и, соответственно, увеличивается количество сигналов, которые на ней расположены.

Это происходит вплоть до $k_o = int(K/2)$, когда сигналы k_o -й группы оказываются расположенными на экваторе многомерной сферы и угловое расстояние между сигналом $S_m(t)$ и этими сигналами составляет величину $k_o \Delta\varphi_1 \cong \pi/2$. В этой группе, как видно из табл. 1, имеется наибольшее количество сигналов (оно указано в последней строке табл. 1). Это количество почти равно или лишь немного меньше общего числа сигналов в ПСАС. При увеличении $k > k_o$ полоса кольцевой поверхности, на которой расположены сигналы k -й группы, удаляется от сигнала $S_m(t)$ и от экватора сферы, приближаясь к ее полюсу, противоположному тому, на котором расположен сигнал $S_m(t)$. При этом площадь поверхности этой полосы уменьшается, уменьшается также, как видно из табл. 1, количество расположенных в этой полосе сигналов. Вследствие симметрии, которым обладает ПСАС, количество сигналов в k -й и в $(K-k)$ -й группах, расположенных на одинаковом угловом расстоянии от полюсов сферы, одинаково.

На рис. 3 представлена зависимость R_{fk} / R_f от k при $(FT) = 8, 32$ и 128 и $R_f = 7$ бит/сек·Гц. Из рис. 1 видно, что отношение R_{fk} / R_f , определяющее в логарифмическом масштабе отношение количества сигналов в k -й группе к общему количеству сигналов в ПСАС, от величины (FT) , определяющей размерность ПСАС, практически не зависит. Из рис. 1 видно, что $M_1 \approx \sqrt{M_N}$.

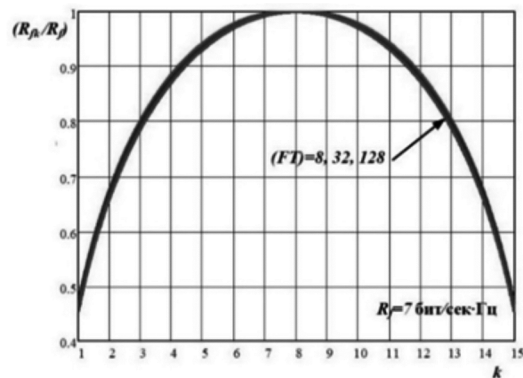


Рис. 3. Отношение количества сигналов в k -й группе к общему количеству сигналов в ПСАС

Выполним анализ надежности приема сообщений в системах связи, в которых применяется сигналы с ГПФМ. Зависимости, характеризующие помехоустойчивость приема таких сигналов, рассчитанные по формулам (7), (12) и (20), представлены на рис. 4 и 5.

Зависимости вероятности ошибки $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ при демодуляции сигналов с ГПФМ от ρ_s при разных значениях R_f и (FT) показаны на рис. 4. При этом

сплошные кривые на этих рисунках построены по формулам (7) и (12) при $(FT) = 120$, пунктирные – при $(FT) = 30$, а штрих-пунктирные – при $(FT) = 15$; для всех этих кривых параметр R_f может быть равен $R_f = 3,5, 5, 6,5$ и $8,5$ бит/сек·Гц. Точечные кривые построены по формуле (18) при тех же значениях R_f и $(FT) = 30$.

Зависимости на рис. 4 позволяют для заданных значений R_f и (FT) определить энергетику линии связи (параметр ρ_s), необходимую для обеспечения требуемой надежности передачи сообщений, оцениваемой величиной $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$. Их анализ показывает, что при использовании ПСАС изменение параметра ρ_s всего на несколько дБ или даже меньше приводит к значительному повышению надежности приема сообщений, причем чем больше (FT) – нормированная длительность сигналов, тем при меньших значениях $\Delta\rho_s$ достигается высокая надежность приема. Таким образом, зависимости на рис. 4 имеют пороговый характер, типичный для случая приема многомерных АС, отмеченный ранее в [1].

Для двумерных сигналов зависимости $P_{ser}(R_f, \rho_s, 1)$ имеют гораздо более плавный характер, чем для ПСАС. Так, например, при передаче сообщений с помощью QAM с удельной скоростью, равной $R_f = 5$ бит/сек·Гц вероятность ошибки равна $P_{ser} = 10^{-3}$ при $\rho_s = 17$ дБ, и $P_{ser} = 10^{-10}$ при $\rho_s = 26$ дБ, т.е. $\Delta\rho_s = 9$ дБ. Обеспечивая в системах связи с QAM уровень сигналов, поступающих на вход демодулятора до $\rho_s = 17$ дБ, и исправляя с помощью ПК возникающие в демодуляторе ошибки, можно за счет применения весьма длинных кодов и «мягких» методов декодирования кодовых комбинаций уменьшить вероятность ошибок в сообщениях до малой величины (равной $P_{ser} = 10^{-8} - 10^{-10}$). В рассматриваемом

примере с QAM использование ПК позволяет получить энергетический выигрыш, равный 9 дБ.

Как видно из рис. 4, в системе связи с ПСАС при большом значении нормированной длительности сигналов при $R_f = 5$ бит/сек·Гц и $(FT) = 120$ для $\rho_s = 16,5$ дБ имеем $P_{ser}(5, \rho_s, 120) = 10^{-3}$, а для $\rho_s = 17,5$ дБ имеем $P_{ser}(5, \rho_s, 120) = 10^{-10}$, т.е. повышение отношения сигнал/шум на входе демодулятора всего на 1 дБ (с 16,5 до 17,5 дБ) позволяет обеспечить высокую надежность приема сообщения при энергетических характеристиках системы связи, близких к предельным по Шеннону. Отсюда следует, что при использовании ПСАС в системе связи применение ПК для повышения надежности приема сообщений теряет всякий смысл.

Важно отметить, что в формуле (7), по которой рассчитывались зависимости $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$, представленные на рис. 4, основной вклад в значение P_{ser} вносит первое слагаемое в сумме (7) ($P_{ser} \cong P_{ser1}$). При этом при всех значениях $k \geq 2$ выполняются условия $P_{ser1} \gg P_{serk}$ и вероятности P_{serk} на значение P_{ser} практического влияния не оказывают. Сравнение точечных зависимостей на рис. 4, рассчитанных по формуле (18), и штриховых, для которых параметры R_f и (FT) имеют такое же значение, показывают, что при $P_{ser} = const$ определенные по формуле (18) значения ρ_s практически не отличаются от тех, которые рассчитывались по формуле (7). Таким образом, оба развитые в этой статье метода оценки помехоустойчивости приема сигналов ПСАС позволяют оценить вероятность ошибки $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ с одинаковой точностью.

На рис. 5 представлены зависимости вероятности ошибки $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ от (FT) при разных значениях R_f и параметра $\Delta\rho_s$. Параметр $\Delta\rho_s$ следующим образом определяет параметр $\rho_s = \rho_{so} 10^{0,1\Delta\rho_s}$, где $\rho_{so} = (2^{R_f} - 1)$ – предел Шеннона, приведенный в (1).

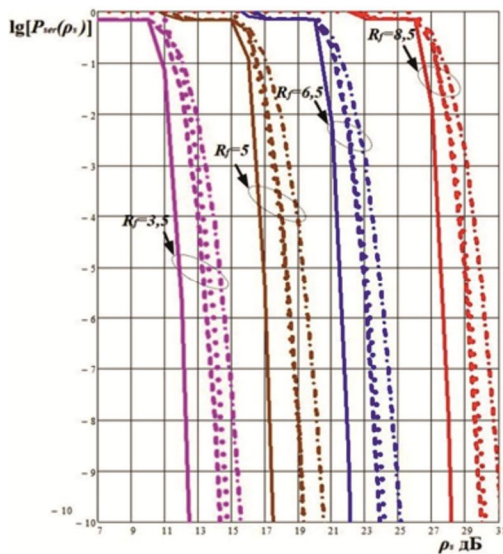


Рис. 4. Зависимость $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ от ρ_s при разных значениях R_f и $\Delta\rho_s$

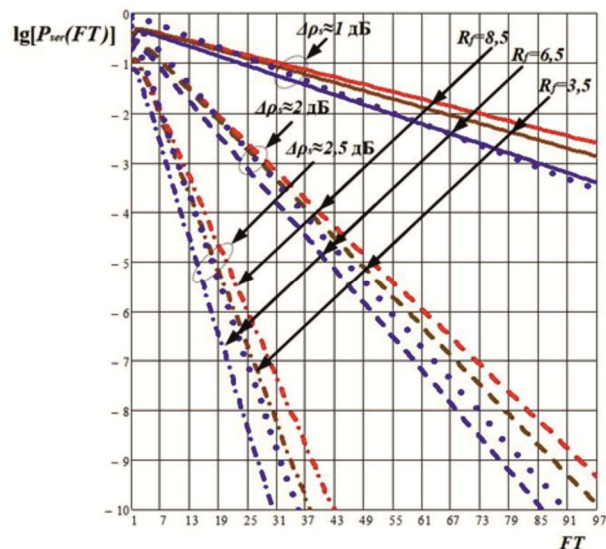


Рис. 5. Зависимость $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ от FT при разных значениях R_f и FT

Параметр $\Delta\rho_s$ показывает, на сколько дБ отношение сигнала к шуму на входе демодулятора при оптимальной демодуляции сигналов ПСАС конечной длительности (при определенном значении (FT)) превышает предел Шеннона для случая, когда удельная скорость передачи сообщений равна R_f . Сплошные кривые на рис. 5 построены по формулам (7) и (12) для $R_f = 3,5, 5, 6,5$ и $8,5$ бит/сек·Гц и $\Delta\rho_s \cong 1$ дБ, пунктирные – для $\Delta\rho_s \cong 2$ дБ, а для штрих-пунктирные – для $\Delta\rho_s \cong 2,5$ дБ. Точечные зависимости на рис. 5, рассчитанные по формуле (18), приведены для тех же значений $R_f = 6,5$ бит/сек·Гц и значений $\Delta\rho_s$, которые были указаны. Они также весьма близки к значениям $\Delta\rho_s$, которые получаются при расчете $P_{ser}(R_f, \rho_s, FT)$ по формуле (7). Из результатов анализа помехоустойчивости приема сигналов с ГПФМ, видно, что при их оптимальном приеме для $3 \text{ бит/сек}\cdot\text{Гц} \leq R_f \leq 10 \text{ бит/сек}\cdot\text{Гц}$ и сравнительно незначительных энергетических потерях ($\Delta\rho_s \cong 2 \dots 2,5$ дБ) относительно предела Шеннона весьма высокая надежность приема сообщений ($P_{ser} = 10^{-10}$) может быть достигнута при сравнительно небольших значениях нормированной длительности сигналов ПСАС, равных $(FT) \approx 30 \dots 90$. Как следует из выполненного выше анализа, в исследованной выше системе связи, в которой для передачи сообщений применяются ПСАС, высокая надежность приема сообщений обеспечивается без применения помехоустойчивых кодов.

Следует отметить, что в современных системах спутниковой связи стандарта DVB-S2 [9] для обеспечения надежности применяются двумерные ансамбли сигналов с APSK и низкоплотностный код (код LDPC). Для обеспечения высокой надежности связи длина кода LDPC выбрана в этом стандарте равной $(FT) = 64800$ или 16200 . Представляет интерес сравнить характеристики этих систем с теми, которые могут быть получены, если в таких системах для передачи сообщений применять ПСАС. Анализ системных параметров стандарта DVB-S2 представлен в [9] и [10]. Этот анализ показал, что применение для передачи сообщений сигналов с ГПФМ в этих системах позволяет сократить время передачи одного сообщения при сохранении высокой надежности его приема, по сравнению с рассмотренными в стандарте DVB-S2 системами, в которых используются двумерные AC с APSK и весьма длинные коды LDPC. Кроме того, сравнение показало, что системы связи с ГПФМ обеспечивают ЭЭ выше на $2 \dots 3$ дБ по сравнению со спутниковыми системами указанного стандарта при всех режимах их работы, а также то, что эти системы имеют в $1,5 \dots 2$ раза большую СЭ. Системы связи с ГПФМ, в которых ПК не применяются, существенно проще систем связи, в которых используются двумерные AC и длинные ПК, так как техническая реализация процедур оптимального «мягкого» декодирования длинных кодов является весьма сложной.

Следует также отметить, что применение ГПФМ весьма перспективно в системах беспроводной связи 6G [11], в

которых сообщения должны будут передаваться с огромной скоростью, порядка Тбит/сек, так как этот вид модуляции единственный, имеющий максимально возможную спектральную эффективность, что для высокоскоростных систем связи имеет особо важное значение.

Заключение

В данной работе представлен достаточно простой в части технической реализации алгоритм приема сигналов, принадлежащих к многомерным поверхностно-сферическим ансамблям сигналов (ПСАС), которые, как установлено Шенноном, являются оптимальными для передачи сообщений в гауссовых каналах связи. Подробно исследована структура ПСАС. Разработан метод оценки помехоустойчивости приема таких сигналов и на основании полученных формул выполнены расчеты, показавшие, что высокая помехоустойчивость приема сигналов с ГПФМ может быть обеспечена, даже если их нормированная длительность имеет сравнительно небольшое значение. Это позволяет существенно упростить техническую реализацию систем связи, в которых такие сигналы используются. Отмечается, что применение в современных системах связи для передачи сообщений многомерных сигналов с ГПФМ вместо используемых в настоящее время двумерных сигналов и длинных помехоустойчивых кодов позволит существенно повысить их энергетическую и спектральную эффективность.

Автор признателен чл.-кор. РАН профессору А.В. Дворковичу за полезные замечания по данной работе.

Литература

1. Shannon C. Communication in the presence of noise, Proc. IRE, № 1, 1949. (Перевод на русский язык статьи «Связь при наличии шума», опубликованной в книге Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Из-во иностранной литературы // под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова).
2. Варгуаузин В.А., Цикин И.А. Методы повышения энергетической и спектральной эффективности цифровой радиосвязи. СПб.: БХБ-Петербург, 2013.
3. Rice, S.O. Communication in the Presence of Noise-Probability of Error for Encoding Schemes. Bell System Technical Journal, 29(1), 1950, pp. 60-93.
4. Shannon C. Probability of error for optimal codes in Gaussian channel. Bell System Techn. J., May, 1959. (Перевод на русский язык статьи «Вероятность ошибки для оптимальных кодов в гауссовском канале», опубликованной в книге Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Из-во иностранной литературы. // Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова).
5. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи сообщений в гауссовском канале связи. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018, стр. 310.
6. Быховский М.А. Метод формирования оптимальных многомерных сигнальных конструкций и их свойства. Цифровая обработка сигналов. № 3, 2022, 63-71с.
7. Прокис Дж. Цифровая связь. Перевод с английского под ред. Д.Д. Кловского // М.: Советское радио, 2000.
8. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Советское радио, 1974, стр. 720.
9. Быховский М.А. Анализ международного стандарта DVB-S2, определяющего параметры современных систем спутниковой связи. Цифровая обработка сигналов. № 1, 2020, 18-25 с.
10. Быховский М.А. Эффективные методы передачи сигналов в спутниковых системах связи. Цифровая обработка сигналов, № 2, 2020, стр. 27-33.
11. Nandana Rajatheva et al. Scoring the Terabit/s Goal: Broadband Connectivity in 6G. Electrical Engineering and Systems Science. Signal Processing. 2020, pp. 1-45.