

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ЗАМИРАНИЙ

Маслаков М.Л., к.т.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, e-mail: maslakovml@gmail.com

ESTIMATION OF THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF THE ENVELOPE SIGNALS WITH MODULATION IN CASES OF FADING

Maslakov M.L.

The article considers the problem of statistical analysis modulated signals received from fading channels. The goal of the work is estimation of probability distribution density of the envelope signal. The Parzen method are used for get this estimation. The results of numerical simulation are presented.

Key words: probability density function, envelope signal, fading, quadrature amplitude modulation, phase shift-keying modulation, noise variance.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей, комплексная огибающая, замирания, квадратурная амплитудная модуляция, фазовая манипуляция, дисперсия шума.

Введение

В ряде практических приложений анализа и обработки сигналов и случайных процессов часто переходят к рассмотрению их комплексных огибающих [1]. На основе такого анализа получают, например, оценки отношения сигнал/шум и вероятности ошибки на бит в задачах оценивания состояния и качества радиолиний [2]; оценку искажений траекторного сигнала в задаче автофокусировки радиолокационных изображений [3] и т.д.

При статистическом анализе сигнальных созвездий модулированных цифровых (в смысле передачи информации) сигналов, принятых на фоне аддитивного шума, обычно ограничиваются рассмотрением статистических свойств амплитуды комплексной огибающей, либо фазы, что естественно для сигналов, соответственно, с квадратурной амплитудной (QAM) либо фазовой (PSK) модуляцией [4]. Статистические свойства амплитуды и фазы огибающей достаточно полно рассмотрены в [5-9].

Однако, для принятия решения о переданном символе, а также оценке достоверности данного символа, в случае передачи сигналов через каналы с замираниями необходимо учитывать «полную картину» о статистических свойствах комплексной огибающей принимаемого сигнала. Т.е. как об амплитуде или модуле комплексной огибающей, так и о фазе. В случае применения параметрических методов оценивания часто рассматривают закон Релея [5-7] или Райса [5, 6] для амплитуды и круговое нормальное распределение [9] или распределение Мизеса [8, 9] для фазы. Для оценки параметров при этом применяют метод максимума правдоподобия [10]. Такой подход не всегда позволяет получить корректную оценку достоверности принятого символа. Так, например, отклонение значения фазы от истинного может быть «мало», однако, в силу замираний, отклонение

Рассматривается задача статистического анализа модулированных сигналов. Целью работы является построение плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей сигналов, принятых из каналов с замираниями. Для построения плотности применяется метод Парзена. Показаны результаты численного моделирования.

значения амплитуды для того же символа может быть «велико». Кроме того, в случае, когда передается длительный сегмент одинаковых символов (бит), например нулей, требуется соответствующий учет частотности передаваемых символов путем введения дополнительного параметра, что на порядок увеличивает число вычислений.

Поэтому большой интерес представляют непараметрические методы оценки [10, 11]. Однако, каналы с замираниями характеризуются также нестационарностью, т.е. изменчивостью характеристик. В результате чего объем выборки, который может быть использован для построения плотности распределения вероятностей, «не велик», что существенно ограничивает применение, например, гистограммного метода [10].

Целью данной работы является построение эмпирической плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей модулированных сигналов, принятых из нестационарного канала с замираниями.

Модель сигнала

Как известно [4], математическую запись для сигнала с QAM или PSK модуляцией можно записать в виде следующего выражения:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega t + \varphi_n) p(t - (n-1)T_{sym}), \quad (1)$$

где N – количество передаваемых символов, A_n – амплитуды передаваемых символа, $\omega = 2\pi f$ – несущая частота, φ_n – фазы передаваемых символов, T_{sym} – длительность символа, $p(t)$ – импульсная функция.

Часто $p(t)$ представляет собой функцию вида

$$p(t) = \begin{cases} 1, t \in [0; T_{sym}] \\ 0, t \notin [0; T_{sym}] \end{cases} \quad (2)$$

Положив $\hat{s}(t)$ как преобразование Гильберта сигнала $s(t)$, запишем комплексный сигнал, называемый аналитическим сигналом (см. [1])

$$\dot{u}(t) = s(t) + i\hat{s}(t), \quad (3)$$

вещественная часть которого есть (1).

Перепишем (3) подробнее

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \sum_{n=1}^N (A_n \cos(\omega t + \varphi_n) + \\ &+ iA_n \sin(\omega t + \varphi_n)) p(t - (n-1)T_{sym}) = \\ &= \sum_{n=1}^N A_n e^{i\varphi_n} p(t - (n-1)T_{sym}) e^{i\omega t} = \\ &= \sum_{n=1}^N \dot{u}_n p(t - (n-1)T_{sym}) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\dot{F}(t) = \sum_{n=1}^N \dot{u}_n p(t - (n-1)T_{sym}) \quad (5)$$

есть комплексная огибающая [1].

Комплексные значения \dot{u}_n в (5), соответствующие передаваемым символам, далее будем называть коэффициентами комплексной огибающей модулированного сигнала $s(t)$. Для удобства дальнейших записей рассмотрим комплексный вектор вида

$$\dot{U} = \{\dot{u}_n\} = \{I_n + iQ_n\}, n = 1...N \quad (6)$$

где $I_n = A_n \cos \varphi_n$, $Q_n = A_n \sin \varphi_n$ – синфазная и квадратурная составляющие.

Тогда для сигнала (1), принятого из канала с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ), т.е. в случае

$$\tilde{s}(t) = s(t) + \xi(t), \quad (7)$$

где $\xi(t)$ – АБГШ, коэффициенты огибающей можно записать в следующей форме

$$\dot{U}_\xi = \dot{U} + \dot{V}, \quad (8)$$

где $\dot{V} = \{\xi_{I,n} + i\xi_{Q,n}\}, n = 1...N$ – вектор соответствующих синфазно-квадратурных составляющих аддитивного шума $\xi(t)$.

Здесь $\xi_{I,n}, \xi_{Q,n}$ есть независимые нормальные величины с дисперсией σ_ξ^2 .

Модель сигнала, принятого из канала с замираниями

Плотность вероятности амплитуды огибающей суммы сигнала и шума, обычно, описывают законом Райса, в частном случае, сводящимся к закону Релея (см. подробнее в [5]). Действительно, полагая, что синфазная и квадратурная компоненты имеют нормальные гауссовские распределения с одинаковой дисперсией (при этом полагаем их независимыми), то величина:

$$A = |\dot{U}| = \sqrt{I^2 + Q^2} \quad (9)$$

распределена по закону Райса, а при нулевых значениях математического ожидания – по закону Релея.

Отметим, что замирания, например, в коротковолновом канале связи часто описывают законом Релея [7]. Численно коэффициенты для характеристики такого канала можно получить аналогично (9), задав два независимых нормальных процесса с нулевым средним, единичной дисперсией и заданной функцией корреляции. Данный метод изложен в [12].

Соответствующие процессы, определяющие синфазную и квадратурную составляющие, обозначим как $\zeta_I(t)$ и $\zeta_Q(t)$. Таким образом, характеристика канала есть:

$$\dot{H}(t) = \zeta_I(t) + j\zeta_Q(t). \quad (10)$$

Тогда перейдя к векторной записи, аналогичной (6), запишем коэффициенты, характеризующие искажения в канале, в форме:

$$\dot{H} = \{\zeta_{I,n} + i\zeta_{Q,n}\}, n = 1...N. \quad (11)$$

Таким образом, коэффициенты комплексной огибающей модулированного сигнала, принятого из канала с замираниями на фоне аддитивного шума, получим из следующего выражения:

$$\dot{U}_\delta = \text{diag}(\dot{H}) \cdot \dot{U} + \dot{V}. \quad (12)$$

В свою очередь элементы вектора (12) есть $\dot{U}_\delta = \{I_{\delta,n} + iQ_{\delta,n}\}, n = 1...N$.

Построение плотности вероятности

Во введении были отмечены причины, затрудняющие, а при определенных условиях делающие невозможным применение таких популярных методов, как метод максимума правдоподобия и метод гистограмм. С учетом постановки задачи и цели данной работы, заключающейся в построении двумерной плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей модулированных сигналов, принятых из нестационарного канала с замираниями, что подразумевает использование выборки относительно небольшого объема, наиболее эффективным методом представляется метод Парзена или метод ядерных функций.

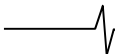
Описание данного метода можно найти в [10, 13]. Суть метода заключается в получении оценки плотности в форме

$$\hat{W}_h(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N K_h(x - x_n) = \frac{1}{Nh} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{x - x_n}{h}\right), \quad (13)$$

где $K(x)$ – неотрицательная функция, называемая ядром, h – параметр сглаживания, а $K_h(x)$ – в свою очередь, называют взвешенным ядром.

Обобщим выражение (13) для получения оценки двумерной плотности вероятности коэффициентов комплексной огибающей модулированного сигнала. С учетом принятых обозначений выражение для плотности вероятности запишем следующим образом:

$$\hat{W}_h(I, Q) = \frac{1}{Nh^2} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{I - I_{\delta,n}}{h}, \frac{Q - Q_{\delta,n}}{h}\right), \quad (14)$$



где для многомерного случая в качестве ядра часто берут ядро в виде гауссианы [14], положив нулевые математические ожидания и единичную дисперсию, т.е.

$$\frac{1}{h^2} K\left(\frac{I}{h}, \frac{Q}{h}\right) = \frac{1}{2\pi h^2} \exp\left(-\frac{I^2 + Q^2}{2h^2}\right). \quad (15)$$

Выбор параметра сглаживания h является нетривиальной задачей. Различные подходы для его оценки рассмотрены, например, в [10, 15]. При этом важным условием корректной оценки плотности является выполнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}_h(I, Q) dIdQ = 1. \quad (16)$$

Пример 1

Рассмотрим передачу данных сигналами с BPSK модуляцией. Коэффициенты комплексной огибающей $\{i_n\} = \{I_n + iQ_n\}$, $n = 1 \dots N$ в этом случае могут принимать значения: $\{1 + i0\}$ либо $\{-1 + i0\}$. На рис. 1 приведены сигнальные созвездия для BPSK сигнала, принятого из канала с АБГШ, а также из канала

с замираниями по законам Релея и Райса.

Отношение сигнал/шум (ОСШ) при этом составляет 20 дБ. Соответствующие оценки двумерной плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей приведены на рис. 2.

Для наглядности на рис. 3 представлены соответствующие контуры плотностей распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей.

Для получения данных оценок плотностей была использована выборка, состоящая из $N = 200$ символов.

Аналогичные результаты могут быть получены и для модуляции более высокой позиционности.

Пример 2

Рассмотрим случай сигналов с QPSK или QAM-4 модуляцией. Коэффициенты комплексной огибающей в

этом случае могут принимать значения: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$,

$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ либо $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

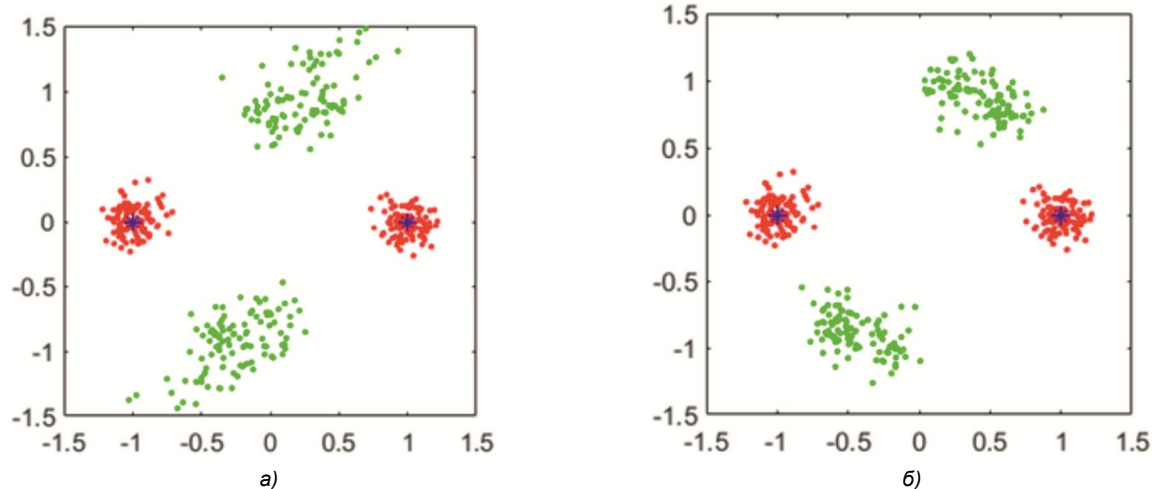


Рис. 1. Примеры сигнальных созвездий BPSK сигнала, принятого из канала АБГШ (красные точки), и из канала с замираниями (зеленые) по законам Релея (а) и Райса (б)

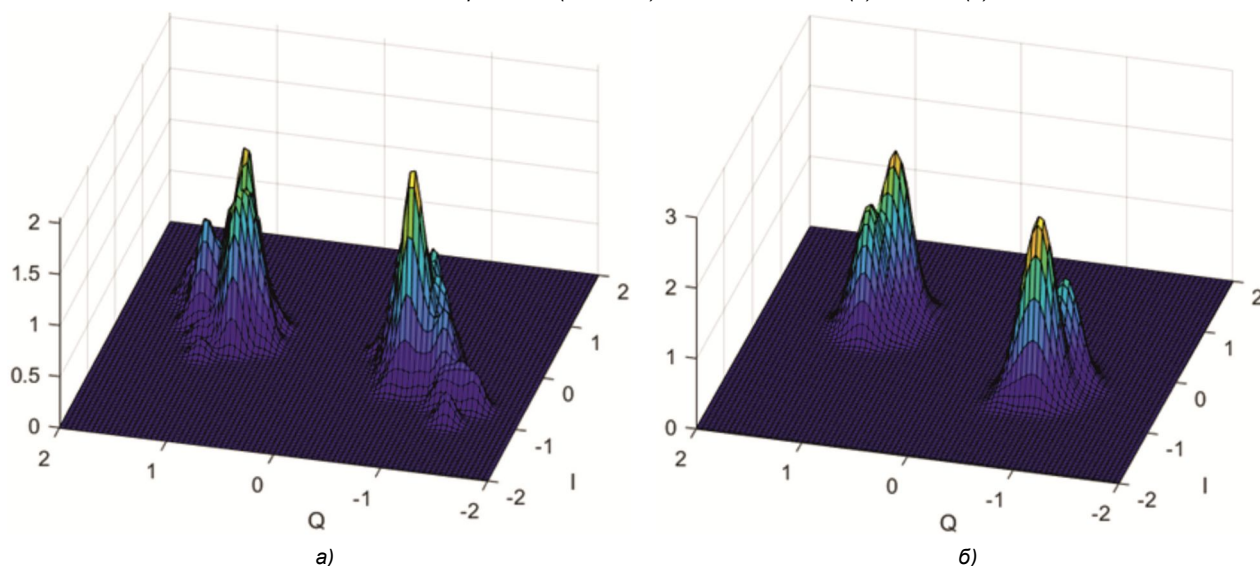


Рис. 2. Плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей BPSK сигнала, принятого из канала с замираниями по законам Релея (а) и Райса (б)

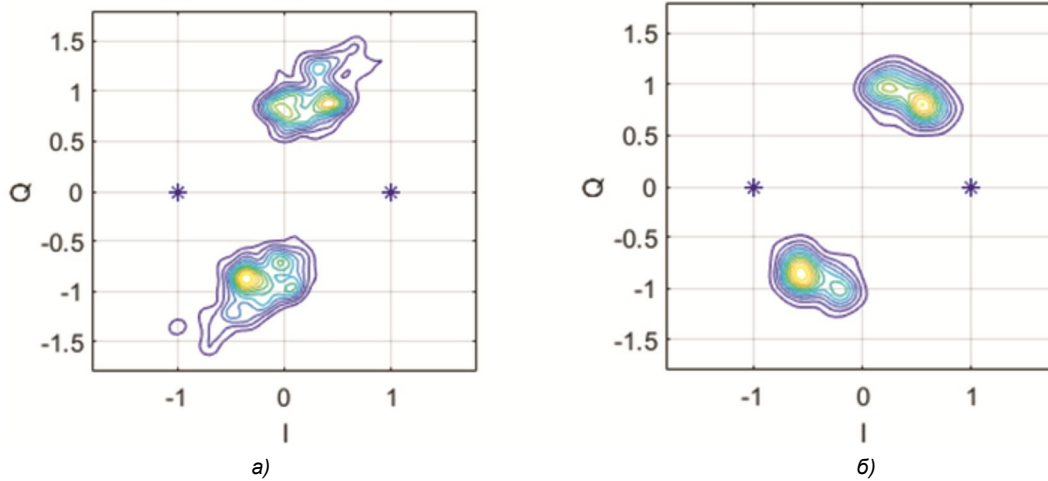


Рис. 3. Контуры плотностей распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей BPSK сигнала, принятого из канала с замираниями по законам Релея (а) и Райса (б)

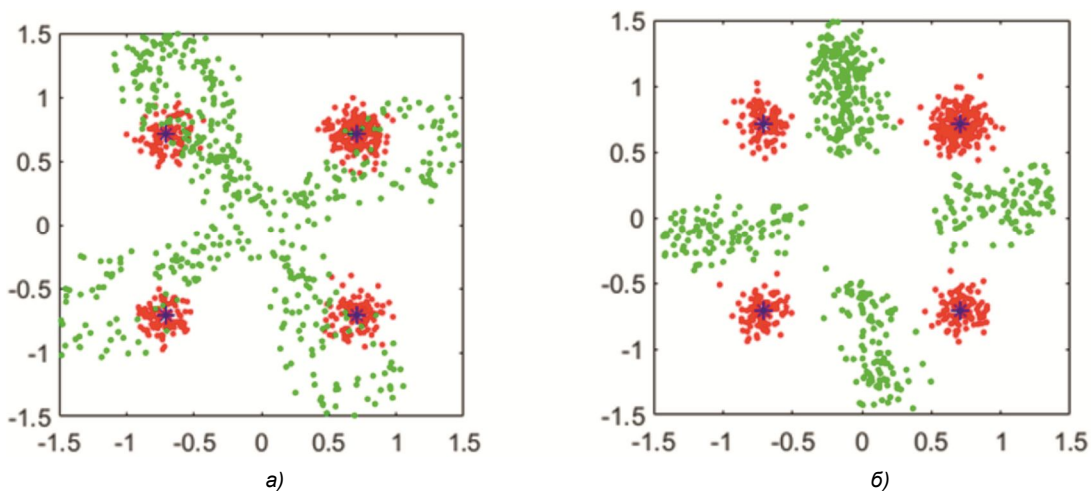


Рис. 4. Примеры сигнальных созвездий QPSK сигнала, принятого из канала АБГШ (красные точки), и из канала с замираниями (зеленые) по законам Релея (а) и Райса (б) при большом числе нулевых символов

Дополнительно предположим, что число нулевых символов составляет 40% от общего числа передаваемых символов. Вероятности (а точнее частоты) остальных символов в среднем составляют $\approx 20\%$. Подобная ситуация характерна для систем пакетной передачи данных. В случаях, когда длина пакета неизменна, а длительности некоторых из возможных формализованных сообщений меньше длины пакета, либо количество таких сообщений переменна в пределах длины каждого пакета, то оставшаяся часть передаваемого пакета заполняют нулями. Подобным образом поступают, например, в [16].

Примеры сигнальных созвездий в этом случае для QPSK сигнала, принятого из канала с АБГШ, а также характерный вид сигнальных созвездий для сигналов, принятых из канала с замираниями по законам Релея и Райса, показаны на рис. 4. Отметим, что рассматриваемый далее случай эквивалентен сигналам QAM-4.

Как и в прошлом примере, ОСШ составляет 20 дБ. Объем выборки для получения оценок плотностей здесь составляет $N = 500$ символов.

Далее на рис. 5 показаны оценки плотностей распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей для сигналов с QPSK модуляцией, принятого из канала с АБГШ, а также из канала с замираниями по законам Релея и Райса, полученные методом Парзена.

Также для наглядности на рис. 6 представлены соответствующие контуры плотностей распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей для сигналов QPSK, принятых из канала с замираниями.

Как видно из представленных результатов, использованный в работе метод позволяет получать оценки двумерных плотностей распределения вероятностей по относительно небольшой выборке. Полученные эмпирические плотности обладают гладкостью, независимы от частоты отдельных символов, а также позволяют сделать выводы о «глубине» и характере замираний в канале связи.

Заключение

В работе показано применение метода Парзена для оценки эмпирической плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей модулированных сигналов, принятых из канала с замираниями. Данный подход может быть использован при статистическом анализе принимаемых сигналов и получении оценок достоверности отдельно взятых символов, а также в задаче оценки ОСШ. Кроме того, подобный анализ может быть использован при статистическом анализе характеристик канала, в том числе для реализации псевдодетерминированных моделей каналов связи.

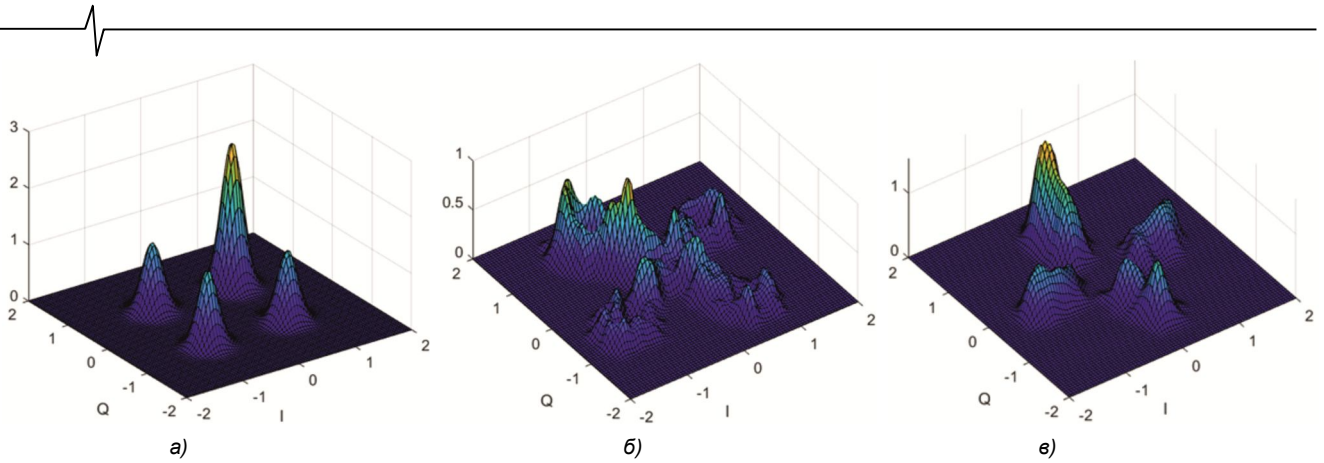


Рис. 5. Плотности распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей для сигнала QPSK, принятого из канала с АБГШ (а) и из канала с замираниями по законам Релея (б) и Райса (в)

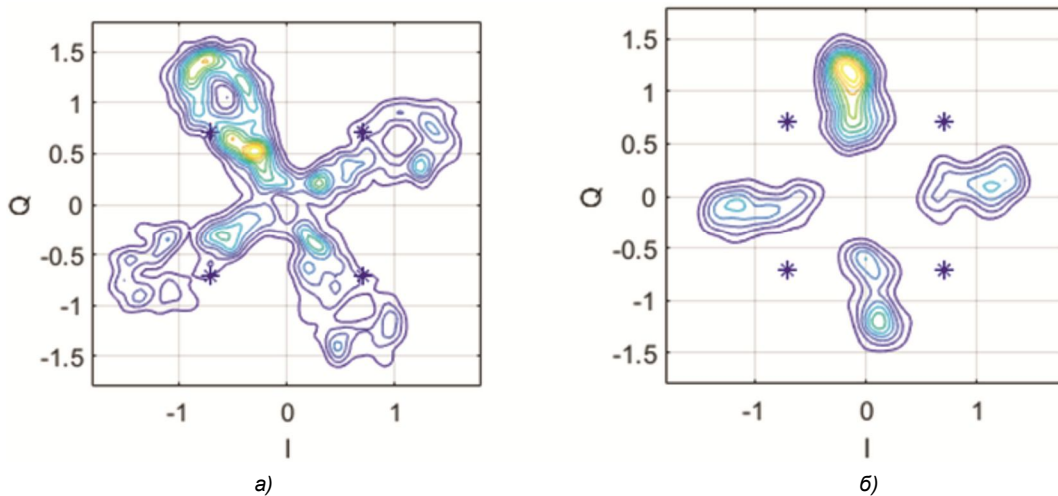


Рис. 6. Контуры плотностей распределения вероятностей коэффициентов комплексной огибающей BPSK сигнала, принятого из канала с замираниями по законам Релея (а) и Райса (б)

Литература

1. Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи. М.: Радио и связь, 1999.
2. Смаль М.С. Бестестовые способы оценивания состояния коротковолнового радиоканала в адаптивных радиолиниях. Дис. на соиск. канд. техн. наук. Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 2018.
3. Кондратенков Г.С., Фролов А.Ю. Радиовидение. Радиолокационные системы дистанционного зондирования Земли. М.: Радиотехника, 2005.
4. Xiong F. Digital Modulation Techniques, Second Edition. Boston: Artech House, Inc, 2006.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1969.
7. Калинин А.И., Черенкова С.Л. Распространение радиоволн и работа радиолиний. М.: Связь, 1971.

8. Mardia K.V., Jupp P.E. Directional Statistics. John Wiley & Sons, Inc, 2000.
9. Jammalamadaka S.R., SenGupta A. Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001.
10. Сирота А.А. Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
11. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. Томск.: Изд-во Томского университета, 1976.
12. Бакалов В.П. Цифровое моделирование случайных процессов. М.: САЙНС-ПРЕСС, 2002.
13. Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode. Annals of Mathematical Statistics. 1962, vol. 33 (3), pp. 1065-1076.
14. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.
15. Silverman B.W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. London: Chapman & Hall/CRC, 1986.
16. ARINC Characteristic 635-2. HF Data Link Protocol. Dec. 22, 2003.