

## УПРОЩЕННЫЕ АДАПТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ НА БАЗЕ РЕКУРСИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ПО КРИТЕРИЮ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

*Джиган В.И., д.т.н., главный научный сотрудник Института проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук, г. Москва, Россия, e-mail: djigan@ippm.ru*

### SIMPLIFIED ADAPTIVE FILTERS BASED ON RECURSIVE LEAST SQUARES ALGORITHMS

*Djigan V.I.*

*This paper presents two adaptive filters with reduced computational complexity. They are the cascade adaptive filter and the adaptive filter with a diagonalized correlation matrix of the input signal. The weights of these filters are computed using the Recursive Least Squares (RLS) algorithms. Computational complexity, i.e. the number of the arithmetic operations required to perform one iteration, is less in the both filters compared to the traditional implementation of the adaptive filter. The reducing of the computational complexity is achieved only if the RLS algorithms with quadratic complexity are used. Therefore, the gradient algorithms or the fast RLS algorithms with linear computational complexity are not considered in the paper. The computational complexity of the considered adaptive filters is the same, but the efficiency is different. The cost of the computational complexity reducing is some degradation of the adaptive filter characteristics. The paper presents the characteristics of the considered adaptive filters obtained by simulation. They are the echo return loss enhancement and the mismatch. The first characteristics is the ratio of the energy of the desired signal to the energy of the error signal of the adaptive filter, and the second one is the Euclidean distance between the vector of the weights of the identified system (linear filter) and the vector of the weights of the adaptive filter. The simulation results demonstrate the superiority of the adaptive filter with a diagonalized correlation matrix over the cascade adaptive filter in terms of above specified characteristics in steady-state. However, this improvement is achieved by the increased duration of the adaptive filter transient response. It is shown, that in case of the correlated signal processing the dimension of the nonzero matrices over the diagonal correlation matrix of the adaptive filter is determined by the half-width of the signal autocorrelation function. The paper presents the RLS algorithms based on the matrix inversion lemma. However, the results and conclusions are valid for any RLS algorithms with quadratic computational complexity, such as ones based on the QR decomposition or Householder transform.*

**Key words:** linear system identification, adaptive filters, cascaded adaptive filter, simplified adaptive filter, Recursive Least Squares, RLS algorithm, Matrix Inversion Lemma, correlation matrix, matrix diagonalization.

**Ключевые слова:** идентификация линейной системы, адаптивные фильтры, каскадный адаптивный фильтр, упрощенный адаптивный фильтр, рекурсивный метод наименьших квадратов, RLS-алгоритм, лемма об обращении матрицы, корреляционная матрица, диагонализация матрицы.

#### Введение

Во всех областях деятельности современного человека сегодня наблюдается бурный рост использования цифровых информационных технологий, которые постепенно заменяют традиционные аналоговые технологии получения, передачи, хранения и обработки информации. Цифровая обработка сигналов играет в этом процессе важную роль, обеспечивая преобразование непрерывных физических сигналов в цифровую форму и дальнейшую обработку полученных цифровых данных с использованием дискретных версий алгоритмов обработки сигналов [1, 2]. Адаптивная обработка сигналов [3-7] – это одно из передовых направлений в современной цифровой обработке сигналов. Сегодня она широко используется в различных радиоэлектронных устройствах [8], таких как адаптивные антенные решетки [9], акустические

Рассматриваются два адаптивных фильтра с пониженной вычислительной сложностью. Это каскадный адаптивный фильтр и адаптивный фильтр с диагонализированной корреляционной матрицей входного сигнала. Весовые коэффициенты данных фильтров рассчитываются с помощью рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS). Вычислительная сложность, т.е. число арифметических операций, требуемых для выполнения одной итерации, в обоих адаптивных фильтрах меньше по сравнению со стандартной реализацией адаптивного фильтра. Уменьшение сложности достигается только при использовании RLS-алгоритмов с квадратичной вычислительной сложностью. Поэтому градиентные алгоритмы или быстрые RLS-алгоритмы с линейной вычислительной сложностью в работе не рассматриваются. Вычислительная сложность рассмотренных адаптивных фильтров одинаковая, но эффективность разная. Ценой уменьшения вычислительной сложности является некоторое ухудшение характеристик адаптивных фильтров. В статье приводятся характеристики рассмотренных адаптивных фильтров, полученные путем моделирования. Это коэффициент подавления эхо-сигналов и рассогласование. Первая характеристика – это отношение энергии требуемого сигнала к энергии сигнала ошибок адаптивного фильтра, а вторая – евклидово расстояние между вектором весовых коэффициентов идентифицируемой системы (линейного фильтра) и вектором весовых коэффициентов адаптивного фильтра. Результаты моделирования демонстрируют превосходство адаптивного фильтра с диагонализированной корреляционной матрицей над каскадным адаптивным фильтром в терминах указанных характеристик в установившемся состоянии. Однако данное улучшение достигается за счет некоторого увеличения длительности переходного процесса. Показано, что при обработке коррелированного сигнала, размерность ненулевых матриц вдоль диагонали полной корреляционной матрицы адаптивного фильтра определяется половиной ширины автокорреляционной функции этого сигнала. Представлены RLS-алгоритмы на основе леммы об обращении матрицы. Однако полученные результаты и выводы справедливы для любых RLS-алгоритмов с квадратичной вычислительной сложностью, таких как алгоритмы на основе QR-разложения или преобразования Хаусхолдера.

[10] и электрические [11] эхокомпенсаторы, эквалайзеры каналов связи [12], цифровые предсказатели сигналов усилителей мощности [13], активные компенсаторы шума [14], и в ряде других.

Основным элементом любого адаптивного устройства является адаптивный фильтр, который состоит из линейного или нелинейного фильтра с изменяемыми весовыми коэффициентами и алгоритма, в котором эти коэффициенты вычисляются в реальном времени. Некоторые из этих алгоритмов, такие как простейший градиентный алгоритм по критерию наименьшего среднего квадрата (Least Mean Square, LMS) или нормализованный LMS (Normalizer LMS, NLMS) [15], имеют линейную сложность  $O(N)$  арифметических операций на одну итерацию, длительность которой равна периоду отсчетов обрабатываемых сигналов. Здесь  $N$  – число весовых коэффициентов адаптивного фильтра. Другие алгоритмы, такие как рекурсивные алгоритмы по критерию наименьшего квадрата (Recursive Least Squares, RLS) [16-18], имеют квадратичную сложность  $O(N^2)$ .

Несмотря на большую вычислительную сложность, адаптивные фильтры на основе RLS-алгоритмов обеспечивают лучшие показатели качества, такие как скорость сходимости и среднеквадратичная ошибка в установившемся состоянии, по сравнению с адаптивными фильтрами на основе простейших LMS- или NLMS-алгоритмов. Поэтому при большом значении  $N$  (сотни и даже тысячи весовых коэффициентов) задача уменьшения сложности RLS-алгоритмов становится актуальной. Это уменьшение может быть достигнуто, например, за счет использования быстрых (вычислительно эффективных) RLS-алгоритмов с линейной сложностью  $O(N)$  [19]. Однако данные алгоритмы могут быть нестабильными даже в стабилизированных версиях [20], если число весовых коэффициентов  $N$  большое.

RLS-алгоритм на основе леммы об обращении матрицы (Matrix Inversion Lemma, MIL), является наиболее известным и широко используемым алгоритмом среди адаптивных алгоритмов сложности  $O(N^2)$  [16]. Уменьшение вычислительной сложности этого алгоритма и повышение его устойчивости может быть достигнуто, например, путем учета эрмитовой структуры корреляционной матрицы входного сигнала адаптивного фильтра [21]. Однако в приложениях с большим числом весовых коэффициентов  $N$  даже пониженная таким образом вычислительная сложность все еще может оставаться большой.

Цель настоящей статьи – представить архитектуры, вычислительные процедуры и продемонстрировать эффективность адаптивных фильтров на основе RLS-

алгоритмов с пониженной вычислительной сложностью. Уменьшение вычислительной сложности достигается за счет каскадной архитектуры или за счет диагонализации корреляционной матрицы входного сигнала адаптивного фильтра.

Хотя дальнейшее описание адаптивных фильтров основано на рассмотрении MIL RLS-алгоритмов, все результаты и выводы действительны для любых RLS-алгоритмов с квадратичной вычислительной сложностью  $O(N^2)$ , например, для алгоритмов, основанных на QR-разложении или преобразовании Хаусхолдера [3-7].

### Каскадные адаптивные фильтры на основе RLS алгоритмов

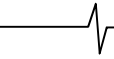
Каскадная архитектура адаптивного фильтра приведена на рис. 1. Данная архитектура была предложена в [22]. В этой работе рассматривался адаптивный фильтр на основе LMS-алгоритма, в котором ряд вычислений производился табличным способом с использованием распределенной арифметики [23]. В данном случае каскадная архитектура адаптивного фильтра позволяла экономить память для хранения таблиц. Однако эта архитектура не анализировалась с точки зрения качества процесса адаптации, а также не рассматривалась для адаптивных фильтров, основанных на RLS-алгоритмах, безотносительно способа их реализации.

На рис. 1,  $x(k)$ ,  $y(k)$ ,  $d(k)$  и  $\alpha(k)$  – это входной, выходной, полезный сигнал и сигналы ошибки, соответственно, адаптивного фильтра с  $N$  весовыми коэффициентами. При каскадном построении, этот фильтр можно разделить на  $M$  субфильтров с разным в общем случае числом  $N_m$  весовых коэффициентов. Здесь  $D_m$  – задержка, обусловленная  $m$ -м адаптивным субфильтром, и  $k$  – номер отсчета обрабатываемого сигнала, который совпадает с номером итерации адаптивного фильтра. На рис. 1 для наглядности линии задержки  $D_m$  показаны как отдельные элементы, но на самом деле это те же линии задержки, которые содержат выборки входных сигналов  $M$  субфильтров и используются для вычисления выходных сигналов этих субфильтров.

Идея, на которой основан каскадный адаптивный фильтр, заключается в следующем. Большинство адаптивных фильтров решает задачу идентификации неизвестной линейной системы, моделируемой линейным фильтром с конечной импульсной характеристикой и постоянными весовыми коэффициентами [3-7]. Входным сигналом идентифицируемой системы является сигнал  $x(k)$ , а выходным – сигнал



Рис. 1. Каскадный адаптивный фильтр



$$d(k) = \mathbf{w}_N^H \mathbf{x}_N(k), \quad (1)$$

где  $\mathbf{w}_N = [w_1, w_2, \dots, w_n, \dots, w_N]^T$  – дискретная модель идентифицируемой системы, то есть линейный фильтр с инвариантными во времени весовыми коэффициентами  $w_n$ , а  $\mathbf{x}_N(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n-1), \dots, x(k-N-1)]^T$  – вектор отсчетов входного сигнала  $x(k)$ , хранящихся в памяти этого фильтра (в линии задержки).

Здесь и далее строчные буквы обозначают скалярные переменные и элементы векторов и матриц. Векторы и матрицы обозначаются жирными большими и малыми буквами, соответственно. Верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование вектора или матрицы, а верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово транспонирование, то есть транспонирование вектора или матрицы и комплексное сопряжение его элементов, обозначаемое как  $*$ . Нижний индекс  $N$  указывает на число элементов в векторе или на число элементов  $N \times N$  в квадратной матрице.

Выходной сигнал адаптивного фильтра, участвующего в идентификации линейной системы, формируется как

$$y(k) = \mathbf{h}_N^H(k-1) \mathbf{x}_N(k), \quad (2)$$

где  $\mathbf{h}_N(k) = [h_1(k), h_2(k), \dots, h_n(k), \dots, h_N(k)]^T$  – вектор весовых коэффициентов  $h_n(k)$  этого фильтра.

На практике, фактическое число весовых коэффициентов идентифицируемой системы неизвестно. Оно может быть лишь приблизительно оценено путем предварительного моделирования этой системы или измерения характеристик её физического образца. Обычно  $N_{act} > N$ , где  $N_{act}$  – фактическое число весовых коэффициентов идентифицируемого фильтра. В большинстве применений адаптивных фильтров сигнал  $d(k)$  содержит некоторый аддитивный шум  $z(k)$ , который мешает качественному решению задачи идентификации. Шум на рис. 1 не показан. Однако, даже если этот шум, генерируемый внешним источником, например шум канала связи, отсутствует, то он все равно появляется, если  $N < N_{act}$ .

Действительно, если предположить, что вектор  $\mathbf{w}_N$  первых весовых коэффициентов вектора  $\mathbf{w}_{N_{act}}$  точно идентифицируется адаптивным фильтром, т.е.  $\mathbf{h}_N(k) = \mathbf{w}_N$ , то аддитивный шум будет

$$z(k) = \mathbf{w}_{N_{act}-N}^H \mathbf{x}_{N_{act}-N}(k). \quad (3)$$

Здесь вектор  $\mathbf{x}_{N_{act}-N}(k)$  определяется аналогично вектору  $\mathbf{x}_N(k)$ . Шум  $z(k)$  добавляется непосредственно к сигналу ошибки адаптивного фильтра, поскольку

$$\alpha(k) = d(k) - y(k) = \mathbf{w}_N^H \mathbf{x}_N(k) - \mathbf{w}_{N_{act}-N}^H \mathbf{x}_{N_{act}-N}(k) - \mathbf{h}_N^H(k-1) \mathbf{x}_N(k) = -z(k), \quad (4)$$

что нарушает процесс идентификации [5].

Для упрощения дальнейших выкладок предполагается, что идентифицируемый и адаптивный фильтры имеют одинаковое число весовых коэффициентов  $N$ , а также отсутствует аддитивный шума канала. В этом

случае  $z(k) = 0$ . Однако, если фильтр с весовыми коэффициентами  $\mathbf{h}_N(k)$  разделен на  $M$  субфильтров с  $N_m < N$  весовыми коэффициентами каждый, см. рис. 1, то аналогичный аддитивный шум  $z_m(k)$  возникает в каждом из сигналов ошибки  $\alpha_m(k)$ , за исключением  $\alpha_M(k)$ . Теоретически, если бы шум  $z_m(k)$  был равен нулю, то прямая и каскадная реализации адаптивного фильтра были бы математически эквивалентны. Однако это невозможно, так как  $N_m < N$ , что приводит к появлению шума

$$z_m(k) = \mathbf{w}_{N_{rem}}^H \mathbf{x}_{N_{rem}}(k), \quad (5)$$

который мешает адаптации. Здесь  $N_{rem} = N_{act} - \sum_{i=1}^m N_m$  – число оставшихся весовых коэффициентов, которые не идентифицируются набором первых адаптивных субфильтров с первого по  $m$ -й включительно.

С учетом вышесказанного, вычислительную процедуру на основе MIL RLS-алгоритма [3-7] для адаптивного фильтра с каскадной архитектурой, см. рис. 1, можно представить как показано в табл. 1.

Здесь  $\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k)$  – матрица, обратная корреляционной матрице  $\mathbf{R}_{N_m}(k)$ ;  $\mathbf{g}_{N_m}(k)$  – вектор коэффициентов Калмана;  $\mathbf{x}_{N_m}(k)$  и  $\mathbf{h}_{N_m}(k)$  – векторы входных сигналов и весовых коэффициентов  $m$ -го адаптивного субфильтра в каскаде,  $\mathbf{I}_{N_m}(k)$  – единичная матрица,  $\delta^{-2}$  – параметр начальной регуляризации корреляционной матрицы и  $\lambda$  – коэффициент забывания [3-7].

### Моделирование каскадных адаптивных фильтров основе RLS алгоритмов

Эффективность архитектуры адаптивного фильтра, см. рис. 1, с MIL RLS-алгоритмом в каждом субфильтре демонстрируется посредством моделирования. В качестве примера при моделировании рассматривалась задача идентификации линейного фильтра со 128 инвариантными во времени весовыми коэффициентами, см. рис. 2, из стандарта [24] для эхокомпенсаторов в проводных каналах связи.

Входным сигналом  $x(k)$  идентифицируемого и адаптивного фильтров являлся белый гауссов шум. В этом случае число обусловленности корреляционной матрицы такого сигнала равно  $\chi = 1$ . При моделировании к сигналу  $d(k)$  был также добавлен некоррелированный шум  $z(k)$ . Отношение сигнал / шум (ОСШ) составляло

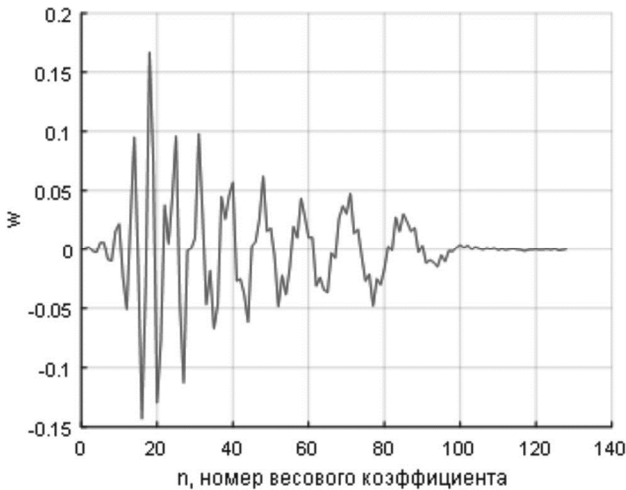
$$ОСШ = 10 \lg \frac{E\{d^2(k)\}}{E\{z^2(k)\}} = 30 \text{ дБ}, \quad (6)$$

где  $E\{\bullet\}$  – оператор усреднения по времени.

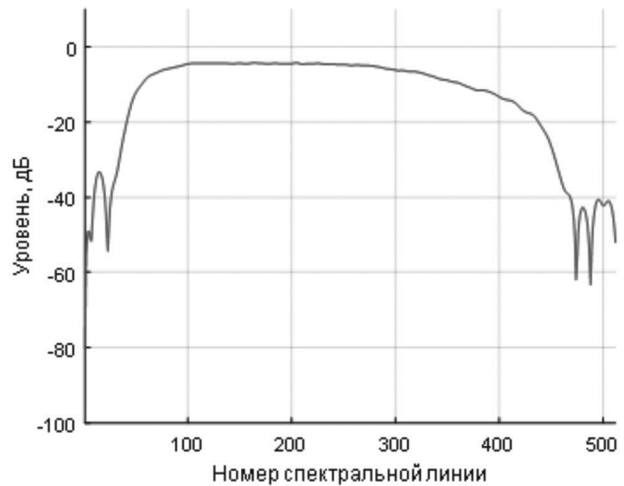
Моделировались адаптивные фильтры с числом каскадов  $M = 1, 2, 4, \dots, 32$  и 64 или соответственно с одинаковым числом весовых коэффициентов  $N_m = 64, 32, 16, \dots, 4$  или 2 во всех каскадах.

Таблица 1. Каскадный адаптивный фильтра на основе MIL RLS-алгоритма

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization</b> : $\mathbf{x}_N(0) = \mathbf{0}_N, \mathbf{R}_{N_m}^{-1}(0) = \delta^{-2}\mathbf{I}_{N_m}, \mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N, m = 1, 2, \dots, M$	(1.0)
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$d_1(k) = d(k)$	(1.1)
<b>For</b> $m = 1, 2, \dots, M$	
$y_m(k) = \mathbf{h}_{N_m}^H(k-1)\mathbf{x}_{N_m}(k)$	(1.2)
$\alpha_m(k) = d_m(k) - y_m(k)$	(1.3)
$d_{m+1}(k) = \alpha_m(k)$	(1.4)
$\mathbf{g}_{N_m}(k) = \frac{\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)\mathbf{x}_{N_m}(k)}{\lambda + \mathbf{x}_{N_m}^H(k)\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)\mathbf{x}_{N_m}(k)}$	(1.5)
$\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k) = \lambda^{-1} [\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1) - \mathbf{g}_{N_m}(k)\mathbf{x}_{N_m}^H(k)\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)]$	(1.6)
$\mathbf{h}_{N_m}(k) = \mathbf{h}_{N_m}(k-1) + \mathbf{g}_{N_m}(k)\alpha_m^*(k)$	(1.7)
<b>End for</b> $m$	
$y(k) = y_M(k)$	(1.8)
$\alpha(k) = \alpha_M(k)$	(1.9)
<b>End for</b> $k$	



а)



б)

Рис. 2. Идентифицируемая линейная система: а) импульсный отклик; б) АЧХ

В адаптивной фильтрации качество решения задачи идентификации принято характеризовать коэффициентом ослабления эхо-сигнала (Echo Return Loss Enhancement, ERLE)

$$ERLE(k) = 10 \lg \frac{E\{d^2(k)\}}{E\{\alpha^2(k)\}}, \quad (7)$$

который определяется как отношение энергии требуемого сигнала  $d(k)$ , именуемого эхом, к энергии сигнала ошибок  $\alpha(k)$ , именуемого подавленным эхо-сигналом.

Переходные процессы в терминах ERLE адаптивного фильтра, см. рис. 1, с разным числом каскадов представлены на рис. 3 а. Случай числом каскадов  $M = 1$  соответствует традиционной (не каскадной) реализации адаптивного фильтра.

Эффективность каскадного фильтра также можно оценивать с помощью параметра рассогласования, см.

рис. 3 б,

$$\rho(k) = 20 \lg \frac{\|\mathbf{w}_{N_{act}} - \mathbf{h}_N(k)\|_2}{\|\mathbf{w}_{N_{act}}\|_2} = 20 \lg \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N [w_n - h_n(k)]^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N w_n^2}} \text{ дБ}, \quad (8)$$

которое представляет собой нормализованное евклидово расстояние между векторами весовых коэффициентов идентифицируемой системы и полного адаптивного фильтра. Здесь, как уже указывалось, рассматривался случай, когда  $N_{act} = N$ .

Из анализа рис. 3 видно, что при  $M > 1$  эффективность каскадного адаптивного фильтра ухудшается. Причиной ухудшения является аддитивный шум (5), ко-

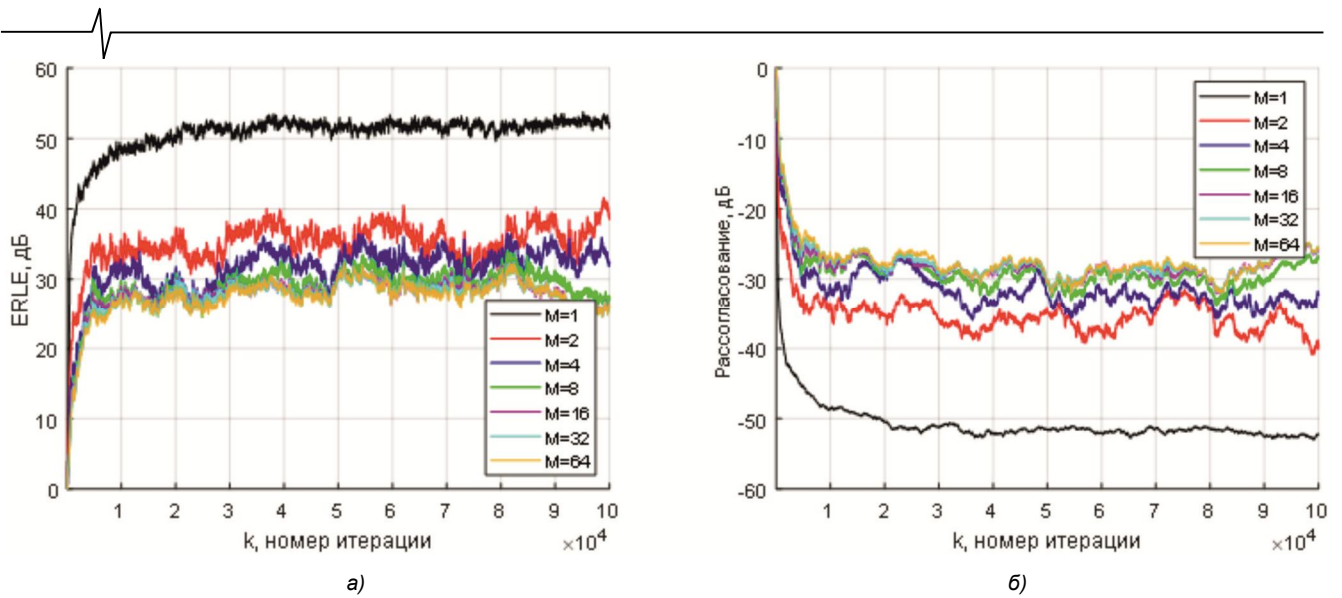
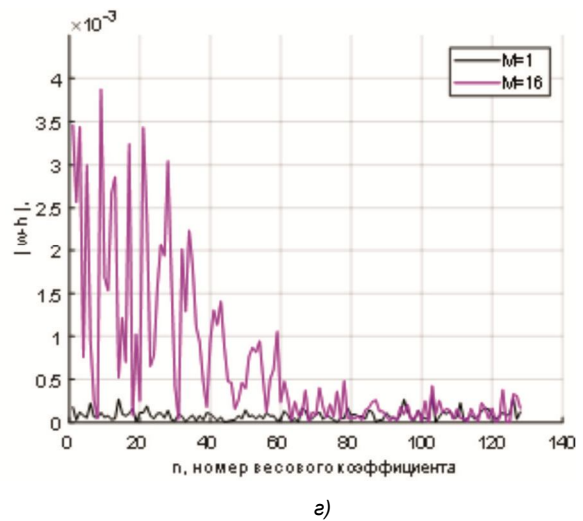
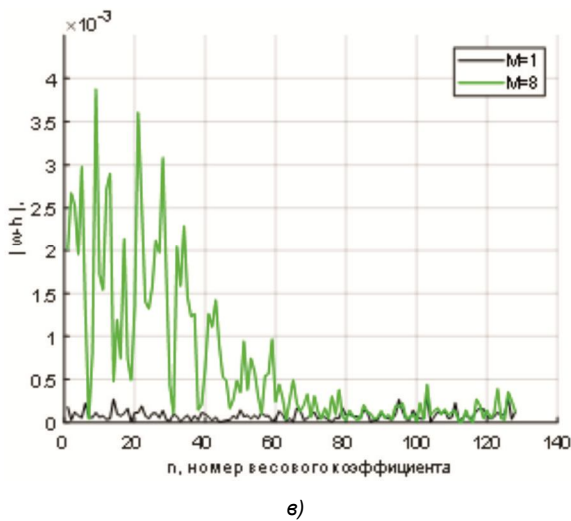
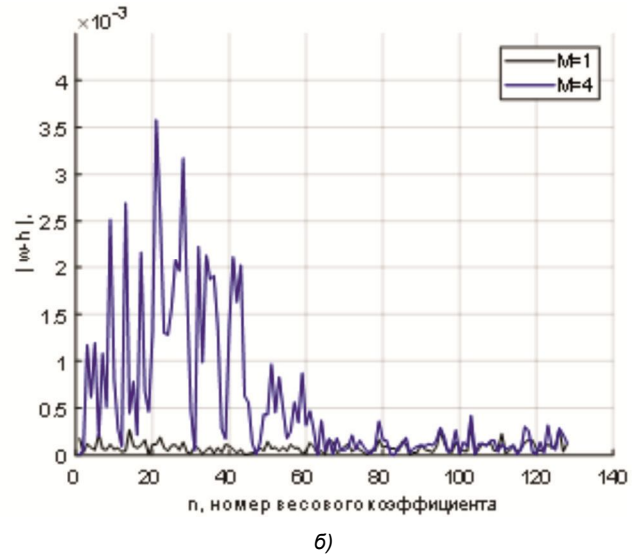
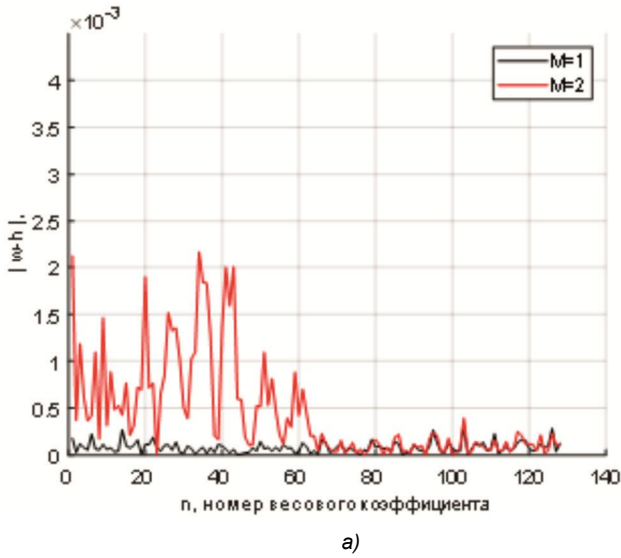


Рис. 3. Идентификация с помощью каскадного адаптивного фильтра,  $\chi = 1$ : а) ERLE; б) рассогласование

торый появляется в каждом сигнале ошибки  $\alpha_m(k)$ . Этот шум самый большой в первом субфильтре каскада и он уменьшается по мере приближения номера субфильтра к числу каскадов  $M$ . Из-за этого абсолютные значения ошибок в идентифицированных весовых ко-

эффициентах больше в субфильтрах в начале каскада, см. рис. 4. Чем больше каскадов  $M$  или что тоже самое меньше число  $N_m$  весовых коэффициентов в каскадах, тем больше, согласно (5), аддитивный шум  $z_1(k)$  в первом каскаде.



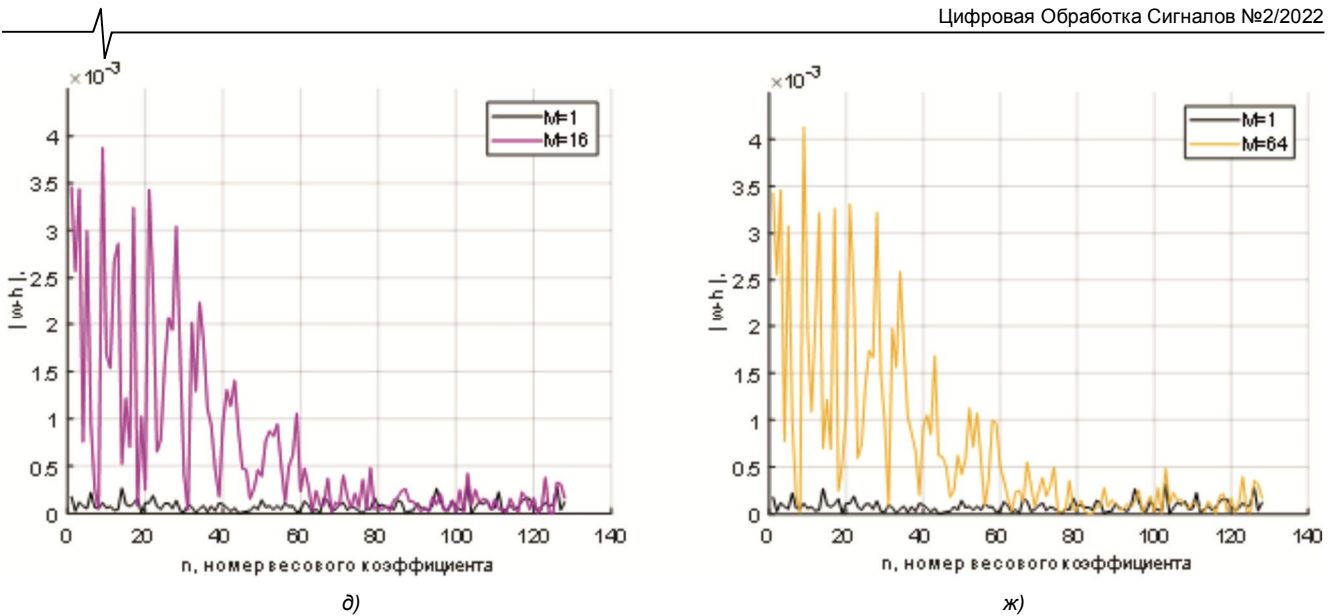


Рис. 4. Абсолютная ошибка при работе упрощенного адаптивного фильтра:  
 а)  $M = 2$ ; б)  $M = 4$ ; в)  $M = 8$ ; д)  $M = 16$ ; е)  $M = 32$ ; ж)  $M = 64$

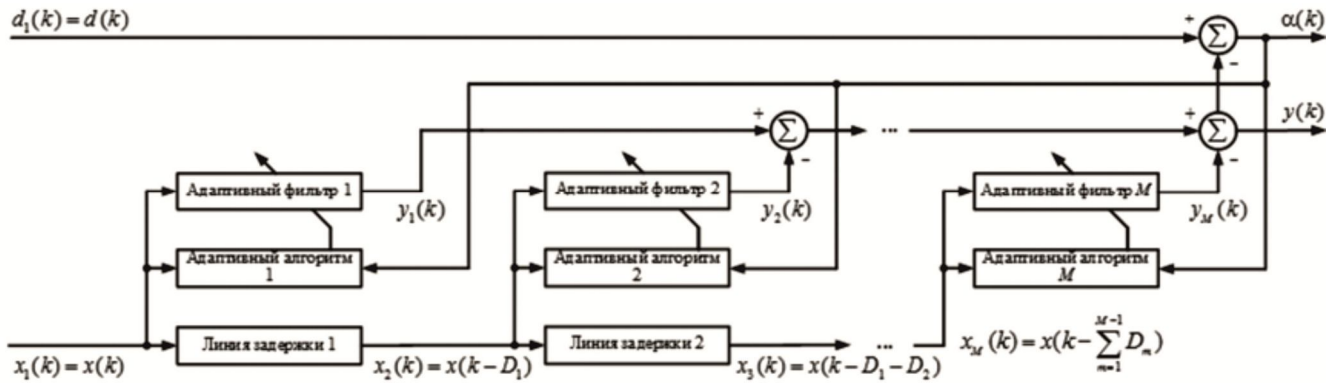


Рис. 5. Упрощенный адаптивный фильтр

Арифметическая сложность каскадного адаптивного фильтра равна  $O\left(\sum_{m=1}^M N_{N_m}^2\right)$  арифметическим операциям. Эта сложность уменьшается с ростом числа каскадов  $M$ . Однако данное преимущество каскадной реализации адаптивных фильтров полезно только, если ОСШ, вызванное шумом  $z_1(k)$ , выше, чем ОСШ, вызванное аддитивным шумом  $z(k)$ . В этом случае эффективность каскадного адаптивного фильтра в основном будет ограничена шумом  $z(k)$ , который нельзя удалить либо уменьшить.

Если же эффективность каскадного фильтра, см. рис. 1, неприемлема, то необходимо разработать другой также эффективный с вычислительной точки зрения адаптивный фильтр, который обеспечивает лучшую функциональную эффективность по сравнению с каскадным адаптивным фильтром. Описание такого фильтра приведено в следующем разделе.

**Упрощенные адаптивные фильтры на основе RLS алгоритмов с диагонализированной корреляционной матрицей**

Несмотря на то, что с помощью каскадного адаптивного фильтра, см. рис. 1, можно решать задачу идентификации, качество данного решения низкое, см. рис. 3.

Это обусловлено тем, что архитектуру каскадного адаптивного фильтра можно рассматривать как набор независимых адаптивных фильтров, которые последовательно и независимо друг от друга идентифицируют части (группы весовых коэффициентов) неизвестной линейной системы.

Более эффективная архитектура адаптивного фильтра с такой же арифметической сложностью, как и у каскадного фильтра, показана на рис. 5.

Архитектура адаптивного фильтра, см. рис. 5, получена путем небольшой модификации каскадного адаптивного фильтра, см. рис. 1. Адаптивный фильтр, представленный на рис. 5, решает задачу идентификации таким же образом, как и полный адаптивный фильтр, корреляционная матрица которого заменяется диагональной клеточной матрицей

$$\hat{\mathbf{R}}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N_1} & \mathbf{O}_{N_1, N_2} & \dots & \mathbf{O}_{N_1, N_{M-1}} & \mathbf{O}_{N_1, N_M} \\ \mathbf{O}_{N_2, N_1} & \mathbf{R}_{N_2} & \dots & \mathbf{O}_{N_2, N_{M-1}} & \mathbf{O}_{N_2, N_M} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_1} & \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_2} & \dots & \mathbf{R}_{N_{M-1}} & \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_M} \\ \mathbf{O}_{N_M, N_1} & \mathbf{O}_{N_M, N_2} & \dots & \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_{M-1}} & \mathbf{R}_{N_M} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

состоящей из  $M > 1$  ненулевых матриц размером  $N_m \times N_m$  на главной диагонали.



Таблица 2. Упрощенный адаптивный фильтр на основе MIL RLS-алгоритма с диагонализацией корреляционной матрицы

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization</b> : $\mathbf{x}_N(0) = \mathbf{0}_N$ , $\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(0) = \delta^{-2}\mathbf{I}_{N_m}$ , $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ , $m = 1, 2, \dots, M$	(2.0)
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$y(k) = \mathbf{h}_N^H(k-1)\mathbf{x}_N(k)$	(2.1)
$\alpha(k) = d(k) - y(k)$	(2.2)
<b>For</b> $m = 1, 2, \dots, M$	
$\mathbf{g}_{N_m}(k) = \frac{\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)\mathbf{x}_{N_m}(k)}{\lambda + \mathbf{x}_{N_m}^H(k)\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)\mathbf{x}_{N_m}(k)}$	(2.3)
$\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k) = \lambda^{-1}[\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1) - \mathbf{g}_{N_m}(k)\mathbf{x}_{N_m}^H(k)\mathbf{R}_{N_m}^{-1}(k-1)]$	(2.4)
$\mathbf{h}_{N_m}(k) = \mathbf{h}_{N_m}(k-1) + \mathbf{g}_{N_m}(k)\alpha^*(k)$	(2.5)
<b>End for</b> $m$	
<b>End for</b> $k$	

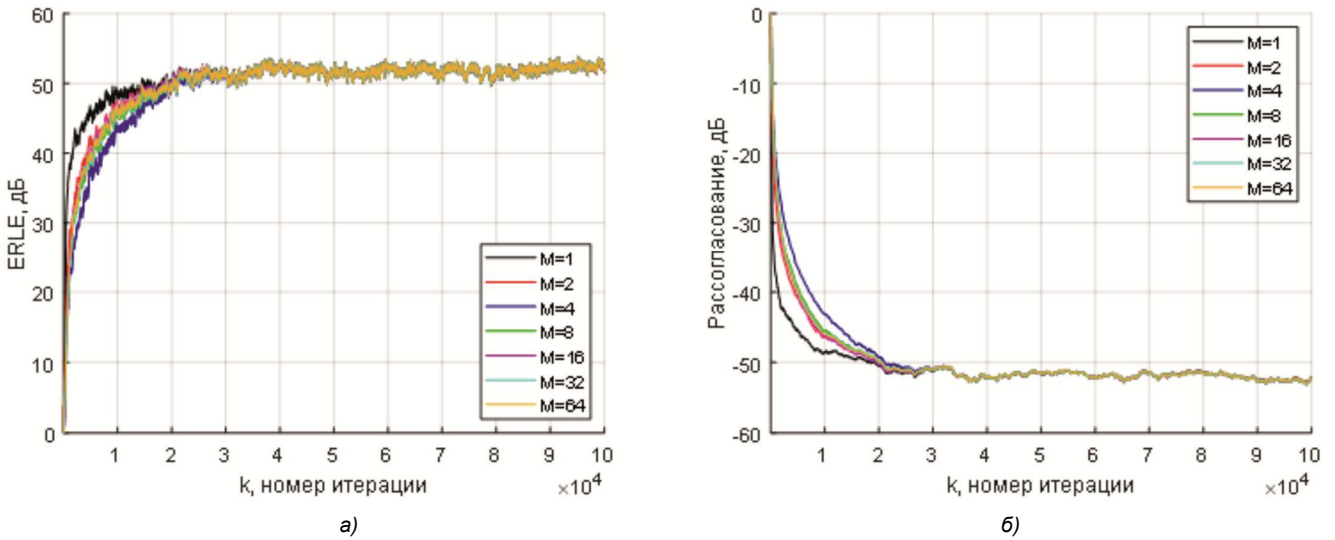


Рис. 6. Идентификация с помощью упрощенного адаптивного фильтра,  $\chi = 1$  : а) ERLE; б) рассогласование

Матрица, обратная матрице  $\hat{\mathbf{R}}_N$ , также является диагональной клеточной матрицей

$$\hat{\mathbf{R}}_N^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{N_1}^{-1} & \mathbf{O}_{N_1, N_2} & \dots & \mathbf{O}_{N_1, N_{M-1}} & \mathbf{O}_{N_1, N_M} \\ \mathbf{O}_{N_2, N_1} & \mathbf{R}_{N_2}^{-1} & \dots & \mathbf{O}_{N_2, N_{M-1}} & \mathbf{O}_{N_2, N_M} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_1} & \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_2} & \dots & \mathbf{R}_{N_{M-1}}^{-1} & \mathbf{O}_{N_{M-1}, N_M} \\ \mathbf{O}_{N_M, N_1} & \mathbf{O}_{N_M, N_2} & \dots & \mathbf{O}_{N_M, N_{M-1}} & \mathbf{R}_{N_M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Уравнение (10) позволяет представить архитектуру упрощенного адаптивного фильтра в виде, показанном на рис. 5.

С учетом вышесказанного, вычислительную процедуру на основе MIL RLS-алгоритма для адаптивного фильтра, см. рис. 5, с корреляционной матрицей (9), можно представить как показано в табл. 2.

Используя алгоритм, см. табл. 2, обновление вектора весовых коэффициентов  $\mathbf{h}_N(k)$  адаптивного фильтра также осуществляется с помощью  $M$  RLS-процедур. В силу (9) и (10), эти процедуры обновляют матрицы  $\mathbf{R}_{N_m}^{-1}$  независимо друг от друга, однако все векторы  $\mathbf{h}_{N_m}(k)$

обновляются с использованием одного и того же сигнала ошибки  $\alpha(k)$ , вычисленного с помощью полного выходного сигнала (2) адаптивного фильтра. Согласно [5], упрощенный адаптивный фильтр можно рассматривать как полный, но с диагонализированной корреляционной матрицей (9).

Арифметическая сложность  $O\left(\sum_{m=1}^M N_{N_m}^2\right)$  адаптивного

фильтра, см. рис. 5, такая же, как и у каскадного фильтра, см. рис. 1. Это сложность также уменьшается при  $M > 1$ . Характеристики нового адаптивного фильтра демонстрируются в следующем разделе.

### Моделирование упрощенных адаптивных фильтров на основе RLS алгоритмов с диагонализированной корреляционной матрицей

На рис. 6 приведены характеристики упрощенного адаптивного фильтра, см. рис. 5, полученные в тех же условиях, что и на рис. 3, где входным сигналом  $x(k)$  является белый гауссовский шум. В этом случае все выборки входного сигнала независимы друг от друга, то есть половина ширины главного лепестка автокорреля-

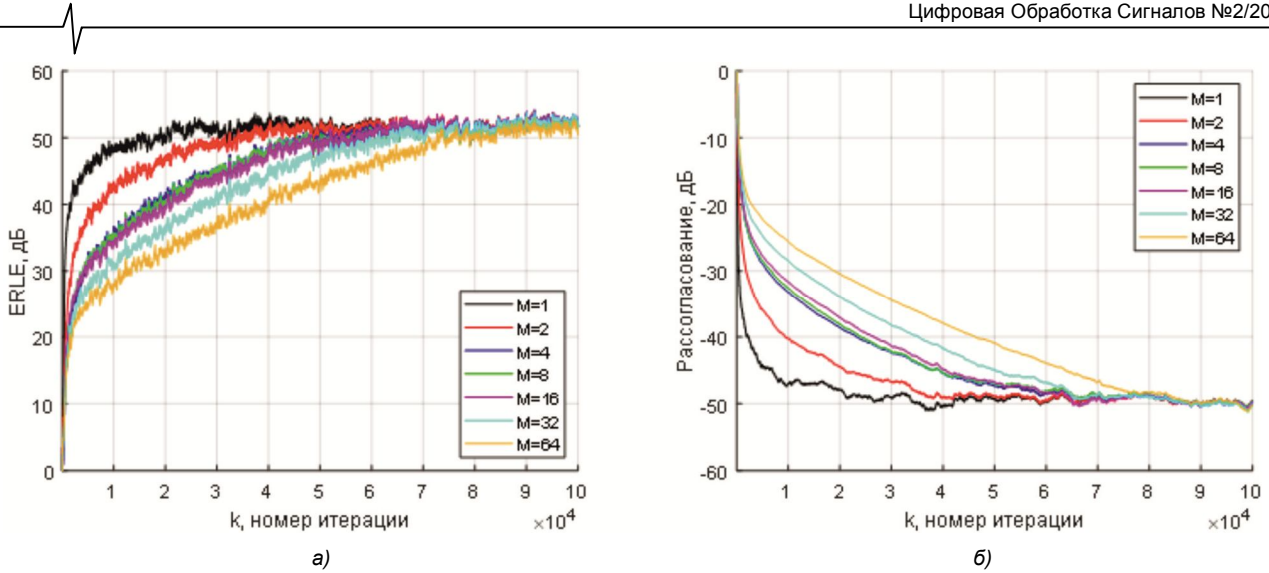


Рис. 7. Идентификация с помощью упрощенного адаптивного фильтра,  $\chi = 10$  : а) ERLE; б) рассогласование

ционной функции этого сигнала составляет всего одну выборку. Следовательно, эффективность упрощенного адаптивного фильтра практически не зависит от числа весовых коэффициентов  $N_m$ .

Однако сделанный выше вывод неверен, если сигнал  $x(k)$  коррелирован. Пример работы адаптивного фильтра, см. рис. 5, с коррелированным входным сигналом представлен на рис. 7. Здесь число обусловленности корреляционной матрицы фильтра равно  $\chi = 10$ .

Половина ширины главного лепестка автокорреляционной функции входного сигнала фильтра в данном эксперименте составляет около 8...12 отсчетов, см. рис. 8. На этом рисунке показаны автокорреляционные функции при разных значениях числа обусловленности  $\chi$  корреляционной матрицы адаптивного фильтра.

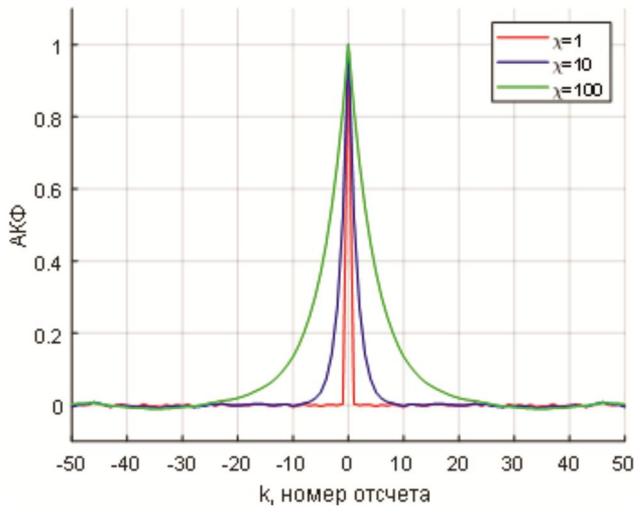


Рис. 8. Автокорреляционная функция обрабатываемых сигналов

Из-за упрощения корреляционной матрицы путем её замены диагональной клеточной матрицей достигаемые значения ERLE и рассогласования в установившемся состоянии при обработке коррелированного сигнала на 2... 3 дБ хуже, см. рис. 7, по сравнению со случаем обработки некоррелированного сигнала, см. рис. 6. Это обусловлено тем, что автокорреляционная функция за

пределами её главного лепестка имеет низкие, но все же не нулевые боковые лепестки. Длительность переходного процесса также увеличивается по этой же причине. В рассматриваемом примере при значении  $N_m \geq 8$ , т.е. большем чем половина ширины главного лепестка автокорреляционной функции входного сигнала, длительность переходного процесса адаптивного фильтра уже практически не зависит от значения  $N_m$ .

**Заключение**

Таким образом, в статье представлена упрощенная версия адаптивного фильтра на основе MIL RLS-алгоритма. Упрощение базируется на диагонализации корреляционной матрицы входного сигнала адаптивного фильтра клеточной матрицей, в случае, когда половина ширины главного лепестка автокорреляционной функции этого сигнала меньше значения  $N_m$ . Недостатком такого упрощения является увеличение длительности переходного процесса. Упрощенный адаптивный фильтр может быть использован в приложениях с ограниченными вычислительными ресурсами и неограниченными требованиями к длительности переходных процессов.

**Литература**

1. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Discrete-time signals procesing. Prentice-Hall, 2009. 1144 p.
2. Сюзев В. В. Основы теории цифровой обработки сигналов. М: ПТ Софт, 2014. 752 с.
3. Sayed A. H. Fundamentals of adaptive filtering. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc., 2003. 1125 p.
4. Farhang-Boroujeny B. Adaptive filters theory and applications, 2-nd ed. John Wiley & Sons, 2013. 778 p.
5. Джиган В. И. Адаптивная фильтрация сигналов. Теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013. 528 с.
6. Haykin S. Adaptive filter theory, 5<sup>th</sup> ed. Pearson Education Inc., 2014. 889 p.
7. Diniz P. S. R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation, 5<sup>th</sup> ed. Springer, 2020. 495 p.
8. Benesty J., Huang Y., Eds. Adaptive signal processing: applications to real-workd problems. Springer-Verlag, 2003. 356 p.



9. Monzingo R. A., Haupt R. L., Miller T. W. Introduction to adaptive arrays, 2nd ed. SciTech Publishing, 2011. 510 p.
10. Makino S. Acoustic echo cancellation. IEEE Signal Processing Magazine. 1997, vol. 14, no. 5, pp. 39-41.
11. Messerschmitt D. Echo cancellation in speech and data transmission. IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1984, vol. 2, no. 2, pp. 283-297.
12. Джиган В. И. Эквалайзеры с дробной задержкой и обратной связью на базе быстрых RLS-алгоритмов. Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2020. Выпуск 2. С. 126-131.
13. Джиган В. И. Предсказатели сигналов с прямым обучением для усилителей мощности. Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2020. Выпуск 3. С. 151-157.
14. Kuo S. M., Morgan D. S. Active noise control. Proceedings of the IEEE. 1999, vol. 87, no. 6, pp. 943-973.
15. Widrow B., Stearns D. D. Adaptive signal processing. Pearson, 1985. 528 p.
16. Giordano A. A., Hsu F.M. Least square estimation with application to digital signal processing. John Wiley & Sons, 1985. 412 p.
17. Джиган В.И. Многоканальные RLS- и быстрые RLS-алгоритмы адаптивной фильтрации. Успехи современной радиоэлектроники. 2004, no. 11, pp. 48-77.
18. Djigan V. I. Recursive least squares – an idea whose

time has come. Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, Moscow, Russia, September 1-2, 2007, pp. 255-260.

19. Cioffi J. M., Kailath T. Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1984, vol. 32, no. 2, pp. 304-337.

20. Slock D. T. M., Kailath T. Numerically stable fast transversal filters for recursive least squares adaptive filtering. IEEE Trans. Signal Processing. 1991, vol. 39, no. 1, pp. 92-114.

21. Djigan V. I. Some tricks of calculations in MIL RLS algorithm. Proceedings of the 22<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA-2021), Moscow, Russia, March 24-26, 2021. 4 p.

22. Cowan C. F. N., Smith S. G., Elliott J.H. A digital adaptive filter using a memory-accumulator architecture: theory and realization. IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1993, vol. 31, no. 3, pp. 541-549.

23. Peled A., Liu B. A new hardware realization of digital filters. IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1974, vol. 22, no. 6, pp. 456-462.

24. Digital network echo cancellers, ITU-T Recommendation G.168. Series G: Transmission systems and media, digital systems and networks. International telephone connections and circuits – Apparatus associated with long-distance telephone circuits, Geneva, 2001. 116 p.

## НОВЫЕ КНИГИ

**Косичкина Т.П., Сперанский В.С.**

**Цифровые сигнальные процессоры и их применение в системах телекоммуникаций и электроники: Учебное пособие для вузов - М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2022 г. – 316 с.: ил.**

Рассмотрены вопросы теории и практики использования цифровых сигнальных процессоров. Описаны основные операции цифровой обработки сигналов, структура, архитектура, классификация и характеристики современных процессоров. Представлен обзор процессоров ведущих фирм-производителей: Analog Devices, Ceva, Feccsale, Texas Instruments. Отдельная глава посвящена российским цифровым процессорам. Существенное внимание уделено многоядерным процессорам и их характеристикам. В разделе, связанным с программируемыми логическими микросхемами и системами на кристалле показаны возможности их использования в качестве сигнальных процессоров. Даны примеры реализации цифровых устройств с помощью САПР на языке программирования VHDL, рассмотрены его элементы. В приложениях даны примеры реализации формирователей двоичных последовательностей, генераторов сигналов и медианных фильтров.

Для студентов радиотехнических и инфокоммуникационных специальностей, будет полезна аспирантам и специалистам.

**Брюханов Ю.А.**

**Динамика цифровых колебательных систем: Учебное пособие для вузов, 3-е изд. перераб. и доп. М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2020 г. - 142 с.: ил.**

Изложена теория колебаний цифровых систем первого и второго порядков. Приведен математический аппарат, основанный на теории точечных отображений. Рассмотрены линейные и обусловленные переполнением и квантованием нелинейные свободные колебания и колебания при постоянном и гармоническом входных воздействиях. В третьем издании первый раздел дополнен разработанным автором методом анализа вынужденных колебаний в цифровых динамических системах при периодических входных воздействиях, а второй, четвертый и пятый разделы расширены вопросами, посвященными нелинейным искажениям гармонических сигналов в рекурсивных динамических системах с переполнением и квантованием. Результаты анализа проиллюстрированы траекториями движений, бифуркационными и вероятностными диаграммами.

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Радиофизика», будет полезна студентам, обучающимся по укрупненной группе направлений подготовки 11.00.00 – «Электронная техника, радиотехника и связь».

