

## АНАЛИЗ СВОЙСТВ ПРОВЕРОЧНЫХ МАТРИЦ LDPC КОДОВ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ СПУТНИКОВОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

*Овинников А.А., доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: ovinnikov.a.a@tor.rsreu.ru*

*Лихобабин Е.А., доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: lihobabin.e.a@tor.rsreu.ru*

*Харин А.В., н.с. кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: kharin.a.v@tor.rsreu.ru*

*Исаев М.О., м.н.с. кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: isaev.m.o@tor.rsreu.ru*

## ANALYSIS OF PROPERTIES OF PARITY-CHECK MATRICES OF LDPC CODES INTENDED FOR SATELLITE AND SPACE COMMUNICATIONS

*Ovinnikov A.A., Likhobabin E.A., Kharin A.V., Isaev M.O.*

*In this paper, the analysis of codes with a low-density parity checks (LDPC) of the currently most common standards of satellite and space communications is carried out. Approaches are considered for the operational evaluation of the coding gain in the area of rapid change in the probability of error from the signal-to-noise ratio, as well as decoding error floor. A comparison of simulation modeling in the communication channel for LDPC codes taken from various standards with two methods of static physics is presented in order to compare relative coding gain and conclusions are drawn about the expediency of using such qualitative assessments. In the area of saturation of the decoding error probability, it is proposed to introduce an indirect criterion for assessing the presence of a slowdown in the decline in the frequency of errors, based on the properties of cycles of different lengths in Tanner graphs. A comparison is made between the extrinsic message degree (EMD) of the simulation results for a number of high-speed MPP codes,  $R > 0.5$ . The key result of the work is a large set of experimental data, which were obtained on the basis of specialized software developed, among others, by the authors of the publication. In the future, it is planned to continue research in this direction in order to establish clearer patterns linking the properties of codes with the results obtained during simulation.*

**Key words:** channel coding, iterative decoding, low density parity check (LDPC) codes, Tanner graph, girth, Extrinsic Message Degree (EMD), coding gain.

**Ключевые слова:** помехоустойчивое кодирование, итеративное декодирование, низкоплотностные коды, граф Таннера, обхват графа, связанность циклов графа, энергетический выигрыш от кодирования (ЭВК).

### Введение

В настоящее время методы и алгоритмы помехоустойчивого кодирования внедрены практически во все без исключения стандарты связи и передачи данных. Крайне важное значение такие системы имеют в тех случаях, когда требуется обеспечить предельно высокую энергетическую и спектральную эффективность. На сегодняшний день конкурируют между собой три основных класса помехоустойчивых кодов – турбо, коды с малой плотностью проверок (МПП) или низкоплотностные коды (НП), а также полярные коды, причём последние два класса становятся всё более предпочтительными с точки зрения вычислительной сложности алгоритмов декодирования. В тоже время при кодовой длине  $n > 1000$  бит и скорости кодирования  $R \geq 0,5$  МПП-коды занимают лидирующие позиции и внедрены в такие стандарты, как 5G, Wifi 4-7, DVB-S2(X), CCSDS и многие другие. Стоит отме-

*Проводится анализ кодов с малой плотностью проверок (МПП) на чётность из наиболее распространённых в настоящее время стандартов спутниковой и космической связи. Рассматриваются подходы для оперативной оценки энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК) в области быстрого изменения вероятности ошибки от отношения сигнал-шум, а также в зоне насыщения ошибки декодирования. Приводится сопоставление имитационного моделирования в канале связи для МПП-кодов, взятых из различных стандартов, с двумя методами статической физики с целью сравнения относительных ЭВК и делаются выводы о целесообразности применения подобного рода качественных оценок. В области насыщения вероятности ошибки декодирования предлагается ввести косвенный критерий оценки наличия замедления спада частоты появления ошибок, основанный на свойствах циклов разной длины в графах Таннера. Приводится сопоставление между минимальными метриками связанности результатами имитационного моделирования для ряда высокоскоростных МПП-кодов,  $R > 0,5$ . Ключевым результатом работы является большой набор экспериментальных данных, которые были получены на основе специализированного программного обеспечения, разработанного, в том числе, авторами публикации. В дальнейшем планируется продолжить исследование в этом направлении, чтобы установить более чёткие закономерности, связывающие свойства кодов, с результатами получаемыми в ходе имитационного моделирования.*

тить, что при фиксированном алгоритме декодирования, который де-факто используется в большинстве аппаратных и программных реализаций дополнительные преимущества в помехоустойчивости можно получить путём изменения структуры проверочных матриц МПП-кодов. В данной работе предлагается анализ таких кодов в привязке к стандартам спутниковой и космической связи по нескольким критериям. Цель исследования состоит в демонстрации текущих показателей современных помехоустойчивых LDPC кодов, а также возможных направлений для их дальнейшего усовершенствования.

### Методы и алгоритмы анализа. Постановка задачи

Результатом оценки помехоустойчивости тех или иных кодовых конструкций в системах связи чаще всего выступают зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал-шум (ОСШ). При работе с квантованными по уровню дискретными сигналами наиболее удобными являются показатели цифрового ОСШ вида  $E_b/N_0$  и вероятности битовых и пакетных ошибок. В тоже время получение зависимости  $p_b(E_b/N_0)$  по методу Монте Карло требует построения модели системы передачи данных при малых значениях вероятности ошибки и близким к 100 % доверительному интервалу для получения характеристик может быть затрачено очень много времени, а также не определена причина низкой помехоустойчивости или наличие эффекта насыщения ошибки, который часто возникает для итеративно-декодируемых кодов. Таким образом, требуются альтернативные способы анализа, позволяющие выявить причины сравнительно малой корректирующей способности или энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК) на различных участках зависимости  $p_b(E_b/N_0)$ .

Если перейти от описания конкретного помехоустойчивого кода к ансамблю, т.е. отказаться от порождающих и проверочных матриц в пользу весовых распределений ненулевых элементов по строкам и столбцам  $H$ -матрицы, то возникает переход к методам асимптотической оценки свойств МПП-кодов. В настоящее время наибольшей эффективностью обладает метод статистической физики, предложенный Ричардсоном и Урбанке в работе [1], который получил название «Эволюции плотности распределения вероятности» (ЭП). Пусть заданы распределения весов столбцов и строк проверочной матрицы, канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с установленным значением ОСШ, а также в качестве информационного сообщения в системе передаётся нулевое кодовое слово, что допустимо при рассмотрении линейных кодов. Суть метода ЭП состоит в пересчёте вероятностей надёжности мягких оценок демодулятора при переходе от одной итерации декодирования к другой. Таким образом, подход, основанный на изменении плотностей распределения вероятности ошибки в процессе итеративного декодирования, позволяет находить такое значение ОСШ, порог декодирования (ПД), при котором для заданного числа итераций декодирования вероятность ошибки стремится к нулю при бесконечно большой длине кодового слова и обозначенных выше ограничениях. Порог декодирования можно интерпретировать как аналог пропускной способности канала в классе итера-

тивного алгоритма декодирования с распространением доверия. Альтернативным способом оценки ПД являются так называемые EXIT диаграммы, основанные на анализе изменения априорной и апостериорной взаимной информации случайных величин при различных весовых распределениях. Применение этого подхода оказывается более удобным и точным [2] по сравнению с методом ЭП, когда граф Таннера помехоустойчивого МПП-кода содержит выкальываемые вершины, а также относительно низкую скорость кодирования  $R < 0,5$ . Для оценки ПД в EXIT диаграммах используется графический метод, суть которого состоит в определении точки пересечения кривых, описывающих итеративное изменение апостериорной и априорной информации. Наличие единственной общей точки между двумя функциями на графике EXIT диаграммы определяет искомую величину ПД. Аналитическое описание методов ЭП и EXIT диаграмм представлено в работах [1] и [3].

Существенным недостатком рассмотренных подходов к анализу МПП-кодов является игнорирование структуры графа Таннера по циклам и дистантным свойствам кода, что на конечных длинах является важным ограничением. Оценка минимального кодового расстояния, а тем более дистанционного спектра для МПП-кодов, используемых в космической связи чрезвычайно вычислительно затратны. Поэтому требуются альтернативный, в том числе косвенные критерии определения свойств графов Таннера. Существенной проблемой итеративно-декодируемых помехоустойчивых кодов является наличие так называемого эффекта насыщения ошибки декодирования, который проявляется резким замедлением скорости спада зависимости вероятности ошибки от ОСШ. Природа этого эффекта кроется в множестве различных факторов, таких как тип канала связи, алгоритм декодирования, а также способах квантования мягких оценок и внутренних данных декодера. Одним из ключевых факторов, влияющих на уровень насыщения ошибки декодирования, являются подграфы в графе Таннера МПП-кода, состоящие из  $a$  и  $b$  символьных узлов инцидентных чётному и нечётному числу проверочных узлов соответственного, которые называются множества ловушек (МЛ) или trapping set (TS). При выполнении процедуры мягкого декодирования по алгоритму распространения доверия наличие ошибок в  $b$  символьных узлах подграфа, относящегося к категории TS [4] может вызывать неисправимую ошибку, даже если она должны быть исправлена согласно величине минимального кодового расстояния. Сложность анализа топологических связей множеств ловушек для заданных параметров МПП-кода сопоставима с определением дистантных свойств кода, поэтому на практике обычно используют косвенные критерии, к которым относится спектр связанности (ACE spectrum [5]) графа Таннера, а также профиль обхватов [6] – последовательность значений обхвата  $g_i$ ,  $i = 1, 2 \dots$  для частей проверочной матрицы  $H$ , состоящей из первых  $i$  столбцов. Метрика связанности, являющаяся основой первого из критериев, показывает количество символьных узлов, содержащихся в цикле длины  $l_i$  со значение связанности  $\gamma_i$ , которое определяется согласно формуле:

$$\gamma_i = \sum (d_k - 2), k = 1, 2, \dots m.$$



В силу того, что большинство классов множеств ловушек состоит из одного или нескольких циклов, то их анализ в классе нерегулярных МПП-кодов, используемых в стандартах спутниковой и космической связи, фактически позволяет исследовать структуру графа Таннера, а также оценивать взаимосвязь спектра связанности с помехоустойчивостью в области насыщения вероятности ошибки декодирования. Использование спектра связанности показало свою практическую значимость [5], а также по сравнению с профилем обхватов является более информативным, т.к. позволяет оценить для каждого из символьных узлов в графе метрики связанности для циклов разной длины, что точнее отражает ансамбль имеющихся множеств ловушек. Для оценки показателей  $\gamma_i$  требуется предварительно пронумеровать циклы с двудольным графе, что при общем числе вершин порядка 105 и кратно большем числе рёбер в МПП-кодах из стандартов спутниковой и космической связи является сложной задачей как с точки зрения вычислительных затрат, так и требуемой памяти. Поэтому в рамках дальнейшего анализа производилась нумерация только тех циклов, которые для заданной длины обладают минимальным значением  $\gamma_i > 1$ . Фактически это означает, что в работе рассматривается только часть спектра связанности соответствующая циклам, для которых  $\gamma_i > 1$  и минимально. Такой подход обусловлен тем, что наиболее опасные для алгоритма декодирования нерегулярных МПП-кодов множества ловушек чаще всего содержат в своём составе именно такие циклы.

Таким образом, задача анализа МПП-кодов из спутниковых и космических систем связи в представленной работе сводится к применению трёх независимых подходов для определения качественных показателей таких кодовых конструкций и выработки направления для их возможного улучшения. Предлагается использовать следующие методы.

1. Оценка порога декодирования методами ЭП и EXIT диаграммой.
2. Определение минимального спектра связанности циклов в графе Таннера.
3. Имитационного моделирования в канале с АБГШ по методу Монте Карло.

Последний пункт исследования является связующим и интегрирующим звеном для получения интерпретируемого финального результата.

### Оценка порога декодирования методами ЭП и EXIT диаграммой

Как было сказано ранее выбор того или иного метода анализа сопряжён с предварительным определением весовых распределений по символьным  $\lambda(x)$  и проверочным  $\rho(x)$  вершинам в графах Таннера кодов из стандартов CCSDS [7], DVB-S2X [8, 9], а также GMR – 1 [10]. Помимо этого, следует выявить наличие выкальваемых вершин в используемых двудольных графах, т.к. от этого зависит выбор способа оценки порога декодирования. Т.к. выкальваемые вершин графа Таннера присутствуют исключительно в МПП-кодах стандарта CCSDS, то для их анализа применялись EXIT диаграммы, для прочих спецификаций подходит метод ЭП. Используя программные реализации методов ЭП и EXIT диаграммы, рассчитаны значения ПД  $((E_b/N_0)_{thr})$ , а также вычислены значения предела Шеннона для заданной скорости кодирования  $((E_b/N_0)_{lim})$ . Разность между этими показателями является мерой асимптотического приближения ансамбля МПП-кодов к границе Шеннона. В табл. 1 представлены результаты расчёта для всех кодовых конструкций из рассматриваемых стандартов. Для удобства анализа кодов по первому критерию данные из первой таблицы сгруппированы во второй таким образом, чтобы сравнение проводилось при фиксированной скорости кодирования. Рассматриваемые стандарты обладают следующим общим множеством кодовых скоростей: 1/2, 2/3, 3/4 и 4/5. С точки зрения минимизации показателя  $\Delta$  лидирующие

позиции занимают МПП-коды, включённые в состав DVB-S2X и CCSDS. Следует также отметить, что графы Таннера обладающие минимальным числом символьных узлов  $n = 128, 256$  и  $512$ , а также  $n = 976$  обладают наилучшими показателями  $\Delta = 1,257$  и  $\Delta = 1,321$  соответственно.

Стандарты спутниковой и космической связи в значительной степени отличаются по длинам используемых кодовых конструкций, поэтому для корректного сравнения ПД и ЭВК при имитационном моделировании были выбраны проверочные матрицы из спецификаций DVB-S2(X), в которых имеются одинаковые скорости кодирования. В результате анализа результатов измерений значений ПД в табл. 3 для всех кодов со скоростями кодирования  $R \geq 1/2$  новое поколение цифрового телевидения превосходит предыдущее по показателю  $\Delta$  на 0,03 до 0,25 дБ. В то же время для  $R < 1/2$  коды стандарта DVB-S2 оказываются более предпочтительными по сравнению с DVB-S2X, хотя преимущество оказывается незначительным и составляет в лучшем случае порядка 0,1 дБ.

Для оценки практической применимости оценок ЭВК методами статистической физики было проведено имитационное моделирование в канале с аддитивным белым гауссовским шумом. Двоичная фазовая модуляция была взята за основу модели, в качестве оценок принимаемых решений использовали логарифмические отношения правдоподобия, а декодирование МПП-кодов проводилось по алгоритму распространения доверия с ограничением на максимальное число итераций в 50. При фиксированной скорости, длине кода и числе итераций декодирования сравнивались коды из стандартов DVB-S2 и DVB-S2X. В соответствии с рис. 1 значения ПД, полученные методами статистической физики, достаточно точно согласуются с результатами имитационного моделирования, что говорит о целесообразности их применения для кодов длиной более 16000 бит. В силу того, что между стандартами спутниковой и космической связи нет полного соответствия по параметрам помехоустойчивых кодов второй эксперимент был проведён при фиксированной скорости кодирования  $R = 1/2$  и длине блока  $N \sim 1000$  бит для проверочных матриц, полученных из спецификаций CCSDS и GMR-1. Разница в ПД равная 0,886 при моделировании по методу Монте Карло при обозначенных выше начальных установках преобразуется согласно рис. 2 к несколько иному виду, по сравнению с кодами семейства DVB-S2. Уменьшение параметра  $\Delta$  изменяет угол наклона зависимости вероятности битовой ошибки  $p_b$  от отношения сигнал-шум. Однако, для более детального изучения возникающего эффекта требуется проанализировать большее количество графиков, что затруднительно сделать для рассматриваемых ансамблей кодов.

### Определение минимального спектра связанности циклов в графе Таннера

Любой цикл в графе Таннера обладает метрикой связанности, поэтому при наличии алгоритма нумерации циклов возможно считать этот параметр для каждого из циклов. Цель настоящего исследования заключается в сопоставлении обхвата и спектра метрик связанности с наличием насыщения вероятности ошибки на соответствующих характеристиках помехоустойчивости МПП-кодов. Определение параметра  $\gamma_i$  для циклов длиной 12 и более является крайне ресурсоёмкой задачей. Известные алгоритмы нумерации циклов предлагают различные компромиссы между вычислительными затратами и памятью, однако все они не позволяют за разумное время на персональном компьютере провести анализ вплоть до  $g_i = 22$  и более. Поэтому было принято решение ввести принципиальное ограничение – оценивать исключительно минимальные показатели  $\gamma_i$  для всех интересующих циклов. Кроме

Таблица 1. Сопоставление предельной эффективности декодирования для заданной скорости кодирования с показателем ПД для МПП-кодов из стандартов CCSDS, DVB-S2 и GMR-1

Стандарт	Длина кодового слова, $n$	Скорость кодирования, $R$	Предел Шеннона для заданной скорости кодирования, $(E_b/N_0)_{lim}$	Порог декодирования, $(E_b/N_0)_{thr}$	$\Delta = (E_b/N_0)_{thr} - (E_b/N_0)_{lim}$
CCSDS	2048 – 32768	1/2	0,187	0,622	0,435
	1536-24576	2/3	1,059	1,464	0,405
	1280-20480	4/5	2,04	2,418	0,378
	8160	7/8	2,838	3,355	0,517
	128, 256, 512	1/2	0,187	1,444	1,257
DVB-S2	64800	1/4	-0,794	0,404	1,198
		1/3	-0,495	0,3358	0,8308
		2/5	-0,238	0,3707	0,6087
		1/2	0,187	0,7527	0,5657
		3/5	0,679	1,1487	0,4697
		2/3	1,059	1,6247	0,5657
		3/4	1,626	2,0734	0,4474
		4/5	2,04	2,4194	0,3794
		5/6	2,362	2,7357	0,3737
		8/9	3,033	3,4814	0,4484
	9/10	3,1977	3,6336	0,4359	
	16200	1/5	-0,963	0,3041	1,2671
		1/3	-0,495	0,2048	0,6998
		2/5	-0,238	0,2935	0,5315
		4/9	0,056	0,6631	0,6071
		3/5	0,679	1,0782	0,3992
		2/3	1,059	1,5493	0,4903
		11/15	1,503	2,0675	0,5645
		7/9	1,8474	2,4065	0,5591
		37/45	2,25	2,701	0,451
8/9		3,033	3,408	0,375	
DVB-S2X	64800	2/9	-0,889	1,1358	2,0248
		13/45	-0,657	0,2306	0,8876
		9/20	-0,0324	0,5023	0,5347
		11/20	0,423	0,839	0,416
		26/45	0,562	0,9633	0,4013
		28/45	0,8	1,2115	0,4115
		23/36	0,894	1,3425	0,4485
		25/36	1,235	1,5873	0,3523
		13/18	1,423	1,7778	0,3548
		7/9	1,8474	2,1723	0,3249
		90/180	0,187	0,6569	0,4699
		96/180	0,342	0,7723	0,4303
		100/180	0,45	0,8782	0,4282
		104/180	0,562	0,9538	0,3918
		116/180	0,926	1,2825	0,3565
		124/180	1,199	1,5208	0,3218
		128/180	1,346	1,6646	0,3186
		132/180	1,5	1,8081	0,3081
	135/180	1,626	1,9403	0,3143	
	140/180	1,847	2,135	0,288	
	154/180	2,606	2,8565	0,2505	
	18/30	0,678	1,0468	0,3688	
	20/30	1,059	1,3869	0,3279	
	22/30	1,5	1,7994	0,2994	
	16200	11/45	-0,813	0,1881	1,0011
		4/15	-0,736	0,0721	0,8081
		14/45	-0,577	0,1505	0,7275
		7/15	0,039	0,4338	0,3948
		8/15	0,342	0,6664	0,3244
		26/45	0,562	0,8841	0,3221
32/45		1,346	1,6561	0,3101	
1/5		-0,963	0,3295	1,2925	
11/45		-0,813	0,2552	1,0682	
1/3	-0,495	0,3099	0,8049		
GMR-1	976	1/2	0,187	1,508	1,321
	4464			0,972	0,785
	960, 4440	2/3	1,059	1,5244	0,4654
	8880			1,5186	0,4596
	2400	3/4	1,626	2,1235	0,4975
	11136			2,036	0,41
	950 – 11100	4/5	2,04	2,4946	0,4546
	960	9/10	3,1977	3,602	0,4043
1920 – 8880	3,563			0,3653	

Таблица 2. Сравнительный анализ стандартов спутниковой и космической связи по минимуму показателя  $\Delta$  при фиксированных скоростях кодирования

$R$	Стандарт	$n$	$(E_b/N_0)_{lim}$	$\Delta$	$\Delta_{min}$
1/2	CCSDS	2048 – 32768	0,187	<b>0,435</b>	0,435
		128, 256, 512		1,257	
	DVB-S2 DVB-S2X	64800		0,5657	
		976		0,4699	
		4464		1,321	
2/3	CCSDS	1536-24576	1,059	0,405	0,3279
		64800		0,5657	
	DVB-S2	16200		0,4903	
		64800		<b>0,3279</b>	
	GMR-1	960, 4440		0,4654	
		8880		0,4596	
4/5	CCSDS	1280-20480	2,04	<b>0,378</b>	0,378
	DVB-S2	64800		0,4474	
	GMR-1	950 – 11100		0,4546	

Таблица 3. Сравнительный анализ стандартов DVB-S2 и DVB-S2X по минимуму показателя  $\Delta$  при фиксированных скоростях кодирования

$R$	Стандарт	$n$	$(E_b/N_0)_{lim}$	$\Delta$	$\Delta_{min}$
1/3	DVB-S2	64800	-0,495	0,8308	0,6998
		16200		<b>0,6998</b>	
	DVB-S2X	32400		0,8049	
1/2	DVB-S2	64800	0,187	0,5657	0,4699
	DVB-S2X	64800		<b>0,4699</b>	
2/3	DVB-S2	64800	1,059	0,5657	0,3279
		16200		0,4903	
	DVB-S2X	64800		<b>0,3279</b>	
3/4	DVB-S2	64800	1,626	0,4474	0,3143
	DVB-S2X	64800		<b>0,3143</b>	
3/5	DVB-S2	64800	0,679	0,4697	0,3688
		16200		0,3992	
	DVB-S2X	64800		<b>0,3688</b>	
11/15	DVB-S2	16200	1,503	0,5645	0,2994
	DVB-S2X*	64800		<b>0,2994</b>	
1/5	DVB-S2	16200	-0,963	<b>1,2671</b>	1,2671
	DVB-S2X	32400		1,2925	

\* – выбрано значение для скорости кодирования  $R = 22/30$ .

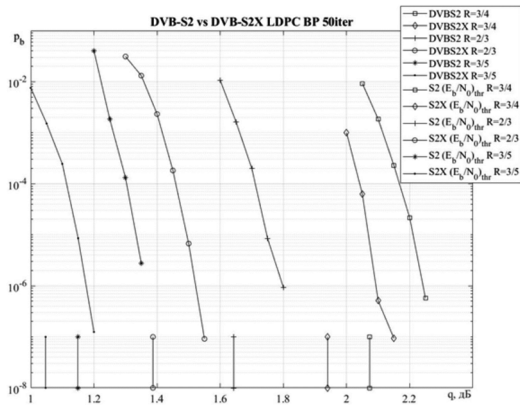


Рис. 1. Зависимости вероятности битовой ошибки от ОСШ в АБГШ канале связи для МПП-кодов из стандартов DVB-S2 и DVB-S2X

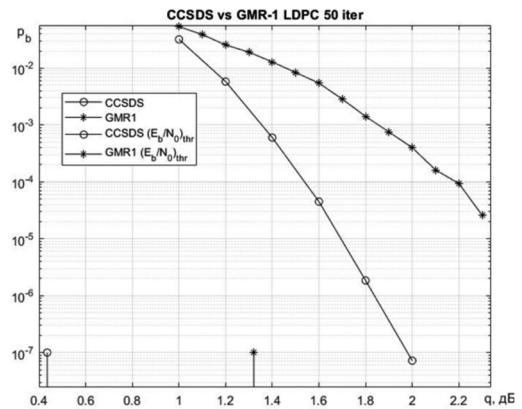


Рис. 2. Зависимости вероятности битовой ошибки от ОСШ в АБГШ канале связи для МПП-кодов из стандартов GMR-1 и CCSDS

того, вводится ограничение на максимальное значение  $g_{max} = 22$ , в силу большого числа анализируемых кодов и высоких требованиях к памяти выбранного алгоритма нумерации циклов [5]. В табл. 4-8 в зависимости от стандарта, скорости кодирования и длины кода оценены обхваты графов Таннера и минимальные метрики связности для всех циклов от  $g_{min}$  до  $g_{i,max}$ . При этом для каждой проверочной матрицы значение  $g_{i,max}$  определяется в индивидуальном порядке в зависимости от общего числа вершин в соответствующем графе Таннера и, как следствие, затратах памяти на нумерацию. В качестве примера рассмотрим первую строку табл. 4, где в столбце

с параметрами  $\gamma_{i,min}$  указан вектор следующего содержания: [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Значение  $\gamma_{0,min} = 3$  оценивается для всех циклов длиной, соответствующей обхвату  $g_0 = g_{min} = 6$ , далее  $\gamma_{1,min} = 4$  рассчитывается для циклов с числом ветвей  $g_1 = 8$  и т.д.

Для оценки взаимосвязи между минимальными метриками связности циклов, обхватами и наличием эффекта насыщения ошибки был проведен следующий эксперимент. Из разных стандартов для различных скоростей кодирования были выбраны проверочные матрицы характеризующиеся очень низкими метриками связности,  $\gamma_{i,min} \leq 3, i \geq 0$ . Параметры моделирования были

выбраны по аналогии с предыдущим пунктом, т.е. вид модуляции – двоичная фазовая, алгоритм декодирования – распространение доверия с максимальным числом итераций 50 и канал связи – АБГШ. На рис. 3 для кодов из стандартов семейства DVB-S2 и DVB-S2X показано, каким образом проявляется эффект на насыщения ошибки. Для сопоставления результатов следует обратиться к характеристикам, представленным для CCSDS кодов [7], где вплоть до вероятности битовой ошибки  $p_b = 1e-9$  подобного рода проблем с декодирование не наблюдается. В тоже время представленные на рис. 3 результаты показывают, что прямой зависимости между значениями  $\gamma_{i, min}$  и уровнем «полки» не существует, что подтверждается кодом из стандарта DVB-S2X с длиной  $N = 16200$  и скорость  $R = 26/45$ . При сопоставлении векторов  $\gamma_{i, min}$  из табл. 6 и 7 видно, что все без исключения значения этого показателя для кода из стандарта DVB-S2X превосходят аналогичные значения для любого из трёх МПП-кодов стандарта DVB-S2. Однако, уровень насыщения ошибок при этом оказывается выше в случае использования проверочной матрицы, полученной из спецификации DVB-S2X, см. рис. 3. Таким образом, рассматриваемый показатель следует

считать косвенным и требующим дополнительных уточнений. В качестве гипотезы для дальнейших экспериментов следует рассмотреть число циклов с минимальным значением метрики связанности, а также определить границу по величине  $g_{max}$ , по которой следует выполнять максимизацию элементов вектора  $\gamma_{i, min}$ .

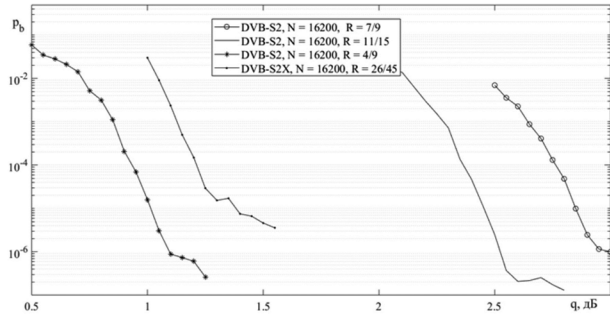


Рис. 3. Зависимости вероятности битовой ошибки от ОСШ в АБГШ канале связи для МПП-кодов из стандартов DVB-S2 и DVB-S2X

Таблица 4. Оценки обхвата графа Таннера и минимальных метрик связанности циклов в кодах стандарта CCSDS

Стандарт	Скорость кодирования	Длина инфо. части, $k$	Обхват графа Таннера, $g$	Минимальные метрики связанности, $\gamma_{i, min}$
CCSDS	1/2	64	6	[3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
		128	6	[5, 6, 5, 6, 7, 8, 9]
		256	6	[5, 4, 6, 7, 7, 8, 9]
		1024	6	[9, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5]
		4096	8	[7, 5, 5, 5, 5, 5, 6]
		16384	10	[11, 8, 5, 5, 5, 6]
	2/3	1024	4	[6, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5]
		4096	6	[6, 5, 5, 4, 5, 5, 5]
		16384	6	[7, 5, 6, 5, 5, 5, 5]
	3/4	1024	4	[5, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
		4096	4	[6, 5, 5, 5, 4, 5, 5]
		16384	6	[6, 5, 5, 5, 5, 5, 5]
4/5	1024	4	[4, 4, 3, 4, 4, 4]	
	4096	4	[6, 5, 4, 4, 4, 4]	
	16384	4	[6, 5, 5, 5, 5, 5]	

Таблица 5. Оценки обхвата графа Таннера и минимальных метрик связанности циклов в кодах стандарта GMR-1

Стандарт	Скорость кодирования	Длина кода, $n$	Обхват графа Таннера, $g$	Минимальные метрики связанности, $\gamma_{i, min}$
GMR-1	1/2	976	4	[8, 4, 6, 4, 4, 4, 4, 4]
		4464		[8, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 4]
	2/3	960	4	[12, 3, 2, 2, 2, 2, 2]
		4440	4	[12, 5, 3, 3, 2, 2, 2]
		8880	6	[6, 3, 3, 2, 2, 2, 2]
	3/4	2400	4	[8, 3, 2, 2, 2, 2]
		11136	6	[2, 2, 3, 2, 1]
	4/5	950	4	[8, 1, 1, 1, 2, 1]
		1920	4	[8, 2, 1, 2, 1, 2]
		2400	4	[8, 2, 1, 2, 1, 1]
		4440	4	[8, 2, 2, 2, 2, 2]
		8880	4	[8, 1, 2, 2, 2, 2]
		11100	6	[2, 2, 2, 2, 2]
	9/10	960	4	[4, 1, 1, 1, 1]
		1920	4	[6, 1, 1, 2, 1]
4480		4	[6, 1, 2, 2, 1]	
8880		6	[1, 1, 2, 2]	

Таблица 6. Оценки обхвата графа Таннера и минимальных метрик связанности циклов в кодах стандарта DVB-S2

Стандарт	Скорость кодирования	Длина кода, $n$	Обхват графа Таннера, $g$	Минимальные метрики связанности, $\gamma_{i, min}$
DVB-S2	1/2	64800	6	[7, 7, 7, 2, 3, 3, 3]
		64800	8	[20, 11, 13, 12, 4, 3]
	1/3	16200	6	[20, 11, 11, 4, 12, 4, 6]
		64800	8	[11, 21, 11, 3, 11, 12]
	2/3	64800	6	[2, 4, 2, 2, 2]
		16200	6	[12, 2, 2, 3, 2]
	2/5	64800	6	[20, 20, 12, 3, 4, 3]
		16200	6	[20, 12, 11, 4, 11, 3]

	3/4	64800	6	[11, 2, 2, 3, 2]
	3/5	64800	6	[11, 11, 3, 3, 3]
		16200	8	[11, 10, 11, 2]
	4/5	64800	6	[2, 2, 2, 2]
	5/6	64800	6	[12, 2, 2, 2]
	8/9	64800	6	[2, 2, 2, 2, 2]
		16200		
	9/10	64800	6	[2, 2, 2, 2, 2]
	1/5	16200	8	[30, 11, 20, 11, 13, 11]
	11/15	16200	8	[2, 2, 2, 2]
	4/9	16200	6	[12, 7, 8, 3, 3, 3, 3]
	7/9	16200	6	[2, 2, 2, 2, 2]
37/45	16200	6	[2, 2, 2, 2]	

Таблица 7. Оценки обхвата графа Таннера и минимальных метрик связанности циклов в кодах стандарта DVB-S2X, часть 1

Стандарт	Скорость кодирования	Длина кода, $n$	Обхват графа Таннера, $g$	Минимальные метрики связанности, $\gamma_{i\_min}$
DVB-S2X	1/5	32400	6	[22, 22, 22, 13, 14, 13, 12, 12]
	1/3		6	[20, 13, 13, 4, 3, 4, 4, 3, 3]
	11/45		8	[16, 16, 17, 9, 10, 10, 6, 5]
	14/15	16200	8	[16, 16, 17, 12, 9, 10, 4]
	4/15		6	[17, 10, 8, 9, 9, 10, 5, 4]
	7/15		8	[58, 20, 20, 21, 20, 20, 8]
	8/15		6	[66, 23, 23, 23, 7, 3, 3, 3]
	26/45		6	[40, 19, 19, 19, 3, 3, 2, 3]
	32/45		6	[11, 11, 3, 3, 3, 3]
		6	[3, 2, 2, 2, 2, 2]	

Проведение имитационного моделирования по методу Монте Карло требует значительных вычислительных затрат и время для оценки эффекта насыщения ошибки для одного кода при использовании быстрых инструментов анализа [11] может составлять от суток и более в зависимости от выбранного доверительного интервала и, как следствие, числа ошибочно принятых бит на каждую точку вычислительного эксперимента. Ускорение процесса оценки уровня «полки» на зависимостях вероятности ошибки от ОСШ для итеративно декодируемых кодов возможно путём перехода от метода Монте Карло к выборке по значимости [12], что в свою очередь требует создания соответствующего эффективного программного обеспечения.

### Заключение

В работе проведён анализ МПП-кодов в привязке к стандартам спутниковой и космической связи по нескольким критериям. Качественными показателями для сравнения были выбраны 3 различные метрики – порог декодирования, минимальный спектр связанности и зависимость вероятности ошибки от ОСШ. В результате исследования для всех кодов из стандартов CCSDS, DVB-S2X и GMR-1 получены весовые распределения по символьным и проверочным вершинам, а также сопоставлены значения ПД при фиксированной скорости кодирования в привязке к теоретической границе Шеннона. Анализ показал, что наилучшие коды по первому критерию присутствуют в спецификациях CCSDS. Кроме того, с уменьшением параметров  $R$  и  $n$  наблюдается заметное увеличение показателя  $\Delta$ . Этот факт говорит о потенциальной возможности для получения новых кодовых конструкций, обладающих меньшим ПД, с особенностями при  $R < 0,5$ . Во второй части исследования показано, что при повышении показателя  $\gamma_{i\_min}$  можно добиться существенного снижения уровня насыщения ошибок декодирования, однако прямая взаимосвязь между этим параметром и положением «полки» на рис. 3 выявлено не было. В дальнейшем необходимо провести более глубокое исследование проблемы медленного снижения вероятности ошибки с ростом ОСШ, используя методы анализа так называемых множеств ловушек [12].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-79-20302) в Рязанском государ-

ственном радиотехническом университете.

### Литература

- Richardson T.J., Shokrollahi M.-A., Urbanke R.L. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes. IEEE Transactions on Information Theory, 47(2):619-637, 2001.
- Stephan Ten Brink «Convergence of iterative decoding», ELECTRONICS LETTERS, vol. 35, no. 10, May 1999, pp. 806- 808.
- G. Liva and M. Chiani, «Protograph ldpc codes design based on exit analysis», in Proc. IEEE Globecom, Washington, USA, Nov. 2007, pp. 3250-3254.
- Richardson T. Error floor of LDPC codes. Proc. 41<sup>st</sup> Allerton Conf. Comm., Control, and Comput., Monticello, IL. 2003, pp. 1426-1435.
- Vukobratovic D., Senk V. Generalized ACE constrained progressive edge-growth LDPC code design. IEEE Communications Letters, 12(1):32-34, 2008.
- Bocharova IE., Johannesson R., Kudryashov B.D. Combinatorial optimization for improving QC LDPC codes performance. In 2013 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT), pp. 2651-2655. IEEE, 2013.
- CCSDS, Synchronization and channel coding. recommendation for space data systems standards (No. 2). CCSDS 131. 0-B-2, Washington DC:CCSDS.
- «Digital Video Broadcasting (DVB): Second generation framing structure channel coding and modulation systems for Broadcasting Interactive Services News Gathering and other broadband satellite applications: European», 06 2006.
- «ETSI Standard EN 302 307», Digital Video Broadcasting (DVB); Second Generation Framing Structure Channel Coding and Modulation Systems for Broadcasting Interactive Services News Gathering and Other Broadband Satellite Applications Version 1.3.1, Mar. 2013.
- «GMR-101.202 (ETSI TS 101 376-1-3)», «GEO-Mobile Radio Interface Specifications; Part 1: General Specifications; Sub-part 3: General System Description; GMR-1 01.202».
- <https://aff3ct.github.io>
- E. Cavus, C. Haymes and B. Daneshrad, «Low BER performance estimation of LDPC codes via application of importance sampling to trapping sets», IEEE Transactions on Communications, vol. 57, no. 7, pp. 1886-1888, 2009.