

## СИНТЕЗ КВАНТОВАННЫХ ФОРМИРУЮЩИХ КИХ-ФИЛЬТРОВ ДЛЯ СИСТЕМ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

*Мингазин А.Т., к.т.н., в.н.с., РАДИС Лтд, Москва, Зеленоград, e-mail: alexmin@radis.ru*

### DESIGN QUANTIZED PULSE-SHAPING FIR FILTERS FOR DIGITAL COMMUNICATION SYSTEMS

*Mingazin A.T.*

*The article is devoted to design of matched quantized pulse-shaping linear-phase FIR filter pairs for digital communication systems. The design enables to obtain filters with the desired stopband attenuation of magnitude response and the predetermined inter-symbol interference. Three methods of pulse-shaping filter design are considered. One of them is based on the square root raised cosine function and two others based on weighted Chebyshev approximation. The quantization problem of filter coefficients in each of the methods solved by using variation of initial parameters. The design results for 0,35 and 0,05 roll-off factors were compared at the oversampling factor equal to 2.*

**Key words:** quantized pulse-shaping linear-phase FIR filters, square root raised cosine filters, weighted Chebyshev approximation, inter-symbol interference, variation of initial parameters.

**Ключевые слова:** квантованные формирующие линейно-фазовые КИХ-фильтры, фильтры на основе функции корень квадратный из приподнятого косинуса, взвешенная чебышевская аппроксимация, межсимвольная интерференция, вариация исходных параметров.

#### Введение

Требуемые частотные и временных характеристики системы цифровой связи в канале с ограниченной полосой могут обеспечиваться парой согласованных формирующих цифровых фильтров. При этом АЧХ формирующих фильтров, расположенных в передатчике и приемнике системы, должны соответствовать заданному плану допусков. В тоже время каскадное соединение этих фильтров должно удовлетворять критерию Найквиста или иначе представлять собой фильтр Найквиста с симметричной импульсной характеристикой (ИХ) пересекающей нулевой уровень через строго определенные интервалы времени. Это обеспечивает нулевую межсимвольную интерференцию (МСИ) в идеальной системе связи.

Опубликовано очень большое число статей, в частности [1-21] (и ссылки в них), посвященных синтезу согласованных формирующих КИХ- и БИХ-фильтров, к которым наряду с выше указанными могут предъявляться и дополнительные требования, обусловленные практической реализацией систем цифровой связи.

Как упомянуто в [10] линейно-фазовая характеристика формирующих фильтров очень полезна для синхронизации и при наличии нелинейных искажений. Кроме того, такие фильтры обладают симметричной ИХ, что вместе с требованиями минимального порядка фильтров и экономного квантования их коэффициентов существенно упрощает реализацию. Это важно поскольку тенденция к значительному уменьшению фактора ската (roll-off factor), например, в каналах спутниковой связи

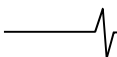
*Статья посвящена синтезу пары согласованных квантованных формирующих линейно-фазовых КИХ-фильтров для систем цифровой связи. Синтез позволяет получить фильтры с заданными значениями ослабления АЧХ в полосе задерживания и уровня межсимвольной интерференции. Рассмотрены три метода проектирования формирующих фильтров, один на основе функции корень квадратный из приподнятого косинуса и два других на основе взвешенной чебышевской аппроксимации. Проблема квантования коэффициентов фильтров в каждом из методов решена с помощью вариации исходных параметров. Проведено сравнение результатов синтеза для двух значений фактора ската 0,35 и 0,05 при коэффициенте передискретизации 2.*

[22], приводит к росту порядка и длины слова коэффициентов и как следствие к увеличению площади кристалла, потребляемой мощности и стоимости СБИС-реализации. Заметим, что квадратурный приемопередатчик системы связи содержит четыре формирующих фильтра.

Для обеспечения низкой чувствительности к джиттеру синхронизации в конкретных случаях следует уменьшать энергию «хвоста» ИХ пары формирующих фильтров [8], скорость спада этой ИХ или уровень ее боковых лепестков [1-4], в частности двух наибольших из них, или уменьшать уровень шероховатости (roughness) ИХ формирующих фильтров [13, 16]. Для снижения отношения пиковой – к средней мощности модулированного сигнала в системах с усилителями мощности ограниченного динамического диапазона желательно уменьшать энергию «хвоста» ИХ фильтра передатчика [12].

Вся совокупность приведенных требований не всегда может быть выполнена и поэтому необходимо прибегать к компромиссным решениям, что усложняет синтез формирующих фильтров. Иногда приходится жертвовать теми или иными свойствами фильтров или ухудшать их ради появления или улучшения других.

Широко известные формирующие линейно-фазовые КИХ-фильтры с частотной характеристикой вида корень



квадратный из приподнятого косинуса (Square Root Raised Cosine – SRRC) получены из фильтров Найквиста с частотной характеристикой вида приподнятый косинус (Raised Cosine – RC). При приемлемом порядке SRRC-фильтры могут не обеспечить всех желаемых требований, особенно при малом факторе ската. Несомненным превосходством SRRC-фильтров перед другими является простота расчета ИХ, которая при заданных порядке и коэффициенте передискретизации (oversampling factor) определяется лишь одним параметром - фактором ската, причем по замкнутому выражению. Проектирование этих фильтров сводится к прямому параметрическому синтезу.

По существу, все публикации, посвященные согласованным формирующим фильтрам направлены на улучшение тех или иных свойств SRRC-фильтров. Синтезу БИХ-фильтров уделено значительно меньше внимание и в общем они уступают КИХ-фильтрам. Поскольку данная статья посвящена КИХ-фильтрам ограничимся ссылкой на статьи [18, 19], где заинтересованный читатель найдет сравнение вариантов проектирования формирующих БИХ- и КИХ-фильтров и численные результаты. В отношении синтеза согласованных формирующих КИХ-фильтров выделим три подхода:

*Косвенный параметрический синтез пары согласованных линейно-фазовых КИХ-фильтров с ненулевым уровнем МСИ.*

Синтез сводится к использованию известного или нового аналитического выражения для частотной характеристики фильтра Найквиста подобного для RC-фильтра. Далее с помощью обратного преобразования Фурье для корня квадратного из этого выражения определяется непрерывная ИХ, а затем – ее усеченный дискретный вариант, соответствующий формирующему линейно-фазовому КИХ-фильтру. Пара таких формирующих фильтров может обладать более низкой чувствительности к джиттеру синхронизации [1, 2, 4] или улучшенной АЧХ в полосе задерживания [3] в сравнении с SRRC-фильтрами. Параметрический метод, предложенный в [1] позволяет создавать бесконечное число семейств фильтров Найквиста с теми или иными свойствами, но требует очень хорошего понимания обсуждаемой проблемы.

*Косвенный численный синтез пары согласованных нелинейно-фазовых КИХ-фильтров с нулевым или заданным уровнем МСИ.*

Синтез заключается в нахождении передаточной функции фильтра Найквиста с последующей ее спектральной факторизацией для получения пары согласованных фильтров. Каждый фильтр передатчика или приемника может быть минимально- или максимально-фазовым, приближенно линейно-фазовым или другим в зависимости от варианта факторизации. Синтез на основе взвешенной чебышевской аппроксимации (ВЧА) с помощью линейного программирования [5, 7] или алгоритма Ремеза [6], позволяет получить максимально возможное ослабление АЧХ в полосе задерживания и нулевую МСИ. Сочетание алгоритма Ремеза с техникой окна для описания АЧХ в переходной полосе, предложенное в [8], позволяет при почти нулевой МСИ достичь

компромисс между ослаблением АЧХ в полосе задерживания и низкой чувствительностью к джиттеру синхронизации. Алгоритм квадратичного программирования [9] обеспечивает баланс между спектральной энергией в полосе задерживания и чувствительностью к джиттеру при заданном уровне МСИ.

*Прямой численный синтез пары согласованных или почти согласованных линейно-фазовых КИХ-фильтров соответственно с ненулевым или нулевым уровнем МСИ.*

Синтез может быть основан на применении линейного [11], нелинейного [12, 13, 15], квадратичного [16], выпуклого [14] программирования или **алгоритмами** ВЧА [10, 17]. Данный подход заключается в непосредственном нахождении передаточной функции формирующего фильтра (т.е. без синтеза фильтра Найквиста и последующей факторизации) при решении следующих задач: минимизация МСИ при заданных требованиях к АЧХ [10, 14, 17]; получение нулевой МСИ для почти согласованной пары фильтров, имеющей разные порядки [10]; нахождение компромисса между ослаблением АЧХ в полосе задерживания, чувствительностью к джиттеру синхронизации и уровнем МСИ [11]; достижение баланса между ослаблением спектральной энергии в полосе задерживания, уровнем МСИ и чувствительностью к джиттеру и/или отношением мощностей пиковая/средняя на выходе фильтра передатчика [12]; минимизация чувствительности к джиттеру при заданных уровнях МСИ и ослабления АЧХ в полосе задерживания [13, 16]; получение минимальной ГВЗ, большого ослабления АЧХ в полосе задерживания и низкого уровня МСИ [15].

Заметим, что проблема квантования коэффициентов рассмотрена лишь в трех упомянутых работах, а именно применительно к линейно- и нелинейно-фазовым формирующим КИХ-фильтрам прямой структуры соответственно в [11, 21] и [20]. Однако, к этим работам можно добавить статьи [23-25], посвященные синтезу двухканальных совершенных банков КИХ-фильтров решетчатой структуры с квантованными коэффициентами. Дело в том, что решетчатые фильтры нижних частот такого банка [26] можно использовать в качестве пары согласованных формирующих нелинейно-фазовых фильтров при коэффициенте передискретизации равном 2. Как известно пара этих фильтров обладает нулевой МСИ несмотря на квантование коэффициентов, что не свойственно фильтрам прямой структуры.

Публикации [11, 20, 21, 23-25] посвящены синтезу квантованных КИХ-фильтров без умножителей. В [25] показаны преимущества алгоритма, сочетающего вариацию исходных параметров (ВИП) и простейшую процедуру вариации коэффициентов в сравнении с более сложными алгоритмами вариации коэффициентов [23, 24]. Эффективность собственно алгоритмов ВИП была продемонстрирована ранее в задачах синтеза частотных квантованных КИХ-фильтров на основе методов окна и ВЧА, соответственно в [27] и [28]. Технику ВИП можно объединить с любыми рассмотренными выше методами синтеза, например, как в [25], с косвенным методом синтеза нелинейно-фазовых КИХ-фильтров на основе ВЧА с применением алгоритма Ремеза.

В данной статье технику ВИП используем в трех методах синтеза согласованных формирующих линейно-фазовых КИХ-фильтров на базе прямых структур с заданными требованиями к ослаблению АЧХ в полосе задерживания и уровню МСИ при минимальных значениях порядка и длины слова квантованных коэффициентов. Первый метод основан на синтезе SRRC-фильтров (см., функции `firrcos` и `gcosdesign` в среде MATLAB), а два других метода [10] и [17] – на синтезе ВЧА-фильтров (см., функции `gmez`, `sgmez`, `gmez` в среде MATLAB). Поиск квантованных фильтров с помощью ВИП проиллюстрируем графиками зависимостей контролируемых параметров от исходных [29]. Проведем сравнение результатов синтеза, полученных тремя подходами при факторе ската 0,35 и 0,05 для коэффициента передискретизации 2.

### Требования к формирующим КИХ-фильтрам

Напомним известные соотношения и положения, связанные с синтезом формирующих фильтров. Пусть КИХ-фильтру Найквиста с передаточной функцией  $G(z)$  соответствует пара согласованных формирующих КИХ-фильтров нижних частот, расположенных в передатчике и приемнике системы цифровой связи. При этом фильтру  $N$ -го порядка в передатчике с  $H(z)$  соответствует фильтр в приемнике с  $H(z^{-1})z^{-N}$ , так что  $G(z) = H(z)H(z^{-1})z^{-N}$  и требуется по существу синтезировать один формирующий КИХ-фильтр с  $H(z)$  при  $|H(z)| = \sqrt{G(z)}$ . Отсюда используемые термины для этого фильтра: square-root pulse-shaping filter, square-root Nyquist filter, half-Nyquist filter.

Для суммы частотной характеристики фильтра Найквиста и ее смещенных копий имеет место следующее равенство

$$G_{\Sigma}(e^{j2\pi f/f_s}) = \sum_{i=0}^{K-1} G(e^{j2\pi(f/f_s + i/K)}) = const, \quad (1)$$

где  $f$  – частота,  $K = f_s/R$  – коэффициент передискретизации,  $R$  – символьная скорость передачи,  $f_s$  – частота дискретизации.

Во временной области равенству (1) соответствует нормированная симметричная ИХ фильтра Найквиста вида

$$g_n = \begin{cases} 1, & n = N+1 \\ 0, & n = iK + N+1, i = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

где  $g_k = h_k * h_{-k}$ ,  $h_k$  – ИХ формирующего фильтра, а знак \* означает свертку.

Граничные частоты полосы пропускания и задерживания фильтров как с  $H(z)$ , так и с  $G(z)$  равны

$$f_1 = \frac{1-\alpha}{2K} f_s \text{ и } f_2 = \frac{1+\alpha}{2K} f_s, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – фактор ската и  $0 < \alpha \leq 1$ .

Средняя частота эквивалентная ширине полосы идеального фильтра нижних частот равна

$$f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{f_s}{2K} = \frac{R}{2} \quad (4)$$

Известно, что для линейно-фазовых формирующих КИХ-фильтров, рассматриваемых далее, условия (1) и (2) могут быть выполнены лишь приближенно. Степень

выполнения (1) можно оценить по неравномерности суммарной АЧХ  $\sum_{i=0}^{K-1} |G(e^{j2\pi(f/f_s + i/K)})|$  в полосе  $[0, f_0]$ , а степень выполнения (2) – по пиковому уровню МСИ (Peak of Inter-Symbol Interference – Peak ISI)

$$\text{Peak ISI} = 20 \lg \left( \frac{2}{|g_{N+1}|} \sum_i |g_{iK+N+1}| \right), \quad (5)$$

который не должен превышать заданное значение. Упомянутому выше нулевому уровню МСИ соответствует  $\text{Peak ISI} = -\infty$  дБ.

Минимальное ослабление АЧХ фильтров в полосе задерживания  $[f_2, f_s/2]$  равно

$$a_0 = -20 \lg \frac{1 + \delta_1}{\delta_2}, \quad (6)$$

где  $\pm \delta_1$  – отклонение АЧХ от 1 в полосе пропускания и  $\delta_2$  – отклонение АЧХ от 0 в полосе задерживания. Значение  $a_0$  не должно быть меньше заданного уровня.

Неравномерность АЧХ в полосе пропускания  $[0, f_1]$  для рассматриваемых фильтров обычно не контролируют, поскольку она обеспечивается автоматически.

Отношение пиковой мощности к средней мощности (peak-to-average power ratio – PAPR) модулированного сигнала на выходе формирующего фильтра передатчика определяют следующим образом

$$\text{PAPR} = 10 \lg \left\{ \frac{K}{\sum_n h_n^2} \max_{0 \leq l < K} \left( \sum_i |h_{iK+l+1}| \right)^2 \right\}, \quad (7)$$

где  $h_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N+1$  – ИХ соответствующая  $H(z)$ . Как упоминалось выше в определенных случаях величина PAPR не должно превышать заданного значения. Однако это требование может оказаться непреодолимым без ухудшения других свойств формирующих фильтров.

Для иллюстрации техники ВИП применительно к трем рассматриваемым методам синтеза зададим следующие требования к параметрам квантованных формирующих КИХ-фильтров:

$$\begin{cases} \alpha_n = 0,35 \text{ и } 0,05, \\ a_0 \geq 50 \text{ дБ}, \\ \text{Peak ISI} \leq -25 \text{ дБ}, \\ K = 2, \\ f_s = 1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\alpha_n$  – номинальное значение фактора ската  $\alpha$ .

Кроме того, будем контролировать отношение PAPR, а для упрощения КИХ-фильтров будем стремиться удовлетворить условия (8) при минимальных значениях порядка  $N$  и длины слова квантованных (округленных) коэффициентов  $M$ , соответствующей шагу квантования  $2^{-M}$ .

### ВИП в синтезе SRRC-фильтров

В начале проиллюстрируем синтез SRRC-фильтров с непрерывными коэффициентами, т.е. при  $M = \infty$ . Для этого используем зависимости контролируемых параметров этих фильтров от порядка  $N$  представленные на рис. 1 для трех значений фактора ската  $\alpha$  при коэффициенте передискретизации  $K = 2$ . Это  $K$  и два крайних значения  $\alpha$  соответствуют требованиям (8). Заметим, что

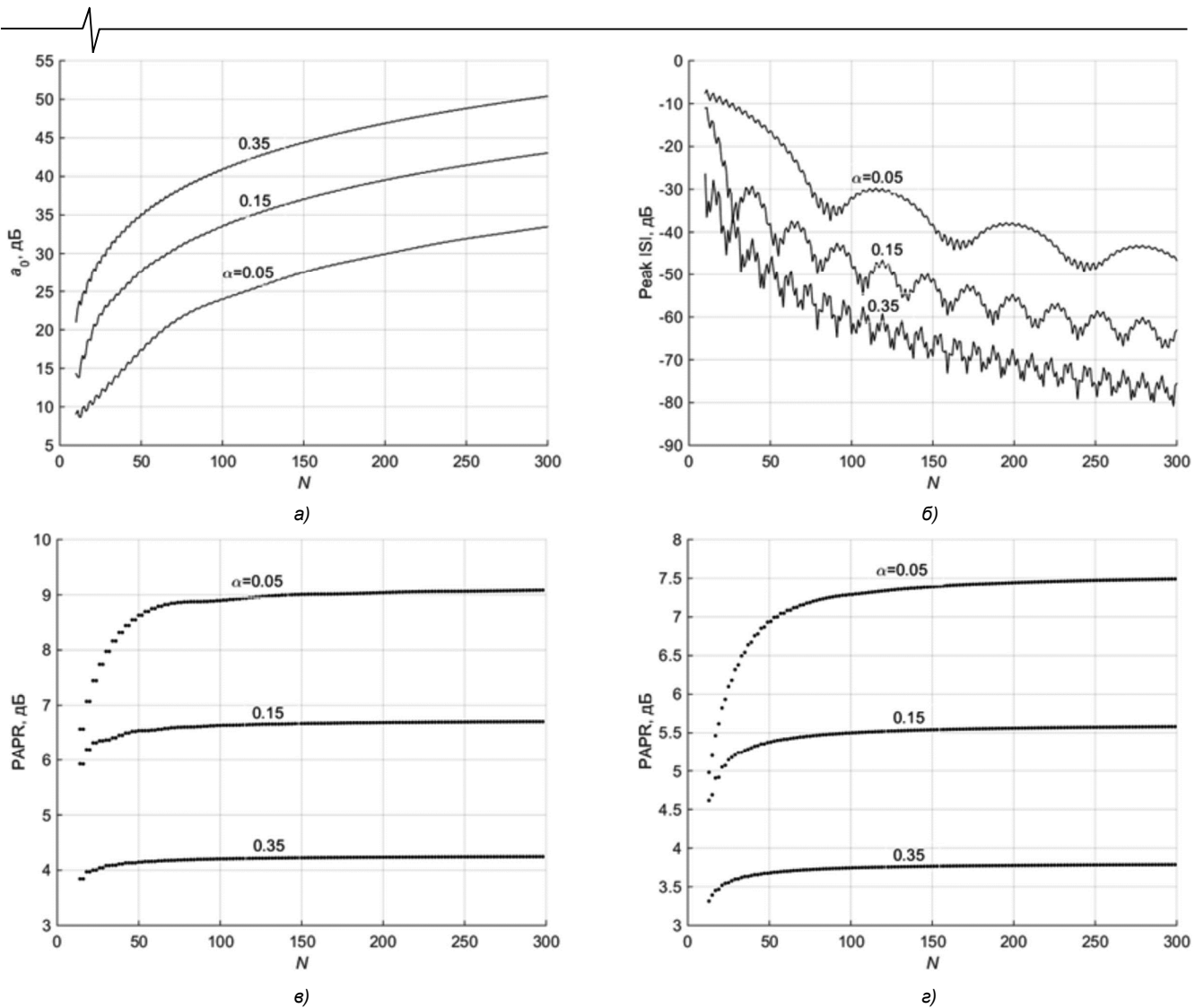


Рис. 1. Параметры SRRC-фильтров в зависимости от порядка  $N$  при  $K = 2$ : ослабление АЧХ фильтра в полосе задерживания (а), пиковое значение МСИ (б) и отношение пиковой мощности к средней мощности модулированного сигнала для четных (в) и нечетных порядков (г)

графики на рис. 1 а-г пригодны с некоторой погрешностью и для  $K > 2$  при замене  $N$  на  $[NK/2]$ , где  $[x]$  – наименьшее целое большее  $x$ . Так при  $K = 4$  значения  $N$  на рис. 1 должны быть удвоены. Отметим также, что семейство кривых на рис.1 г для нечетных  $N$  располагается ниже семейства на рис. 1 в для четных  $N$ , т.е. фильтрам нечетного порядка свойственны меньшие значения PAPR. Однако, можно убедиться, что с увеличением  $K$  такое различие быстро нивелируется. Эти особенности следуют из выражения (7) для любых линейно-фазовых КИХ-фильтров. В существующих публикациях рассмотрены формирующие фильтры как с четными, так и нечетными  $N$ , но без упоминания их возможных различий по уровню PAPR.

Из рис. 1 а-г видно, что с увеличением  $N$  для всех  $\alpha$  пульсируя уменьшается Peak ISI (б), монотонно и медленно растет ослабление  $a_0$  (а), а также растет с последующим сильным замедлением отношение PAPR (в). С уменьшением  $\alpha$  уменьшается  $a_0$  и увеличиваются уровни Peak ISI и PAPR. Однако из-за сложного поведения зависимостей Peak ISI от  $N$  возможны ситуации, не показанные на рис. 1 б, когда для данного  $N$  с уменьшением  $\alpha$  уменьшается и уровень Peak ISI. Это связано с

пересечением кривых с разными  $\alpha$ . Произвольные требования по Peak ISI и  $a_0$  могут быть всегда удовлетворены при любых значениях  $0 < \alpha \leq 1$  благодаря выбору  $N$ . При этом отношение PAPR может оказаться неприемлемым.

Обратимся к требованиям (8). Для  $\alpha_n = 0,35$  им удовлетворяет фильтр с  $N = 285$ . При этом, согласно рис. 1 б, в, получим Peak ISI = -78 дБ и PAPR = 3,8 дБ. Имеем очень большой запас по Peak ISI, т.к. требуется уровень -25 дБ. Нормированная к нулю децибел АЧХ фильтра показана на рис. 2 а. Пунктирные вертикальные линии соответствуют граничным частотам в (3) для  $\alpha = \alpha_n$ , а горизонтальная линия обозначает допустимый уровень ослабления 50 дБ согласно (8). Здесь и далее отдельная точка, помеченная знаком +, соответствует частоте  $f_0$  в (4) и уровню  $1/\sqrt{2}$  (или -3,01 дБ). Как видим АЧХ на рис. 2 а имеет избыточное ослабление в полосе задерживания исключая окрестность примыкающую к ее границе. Эту ситуацию можно исправить полагая  $N < 285$ ,  $\alpha < \alpha_n$  и контролируя ослабление  $a_0$  в полосе задерживания соответствующей значению  $\alpha_n$ . На рис. 2 б представлена АЧХ фильтра, полученная для  $N = 51$  и  $\alpha = 0,191$ , которая удовлетворяет условию по  $a_0$

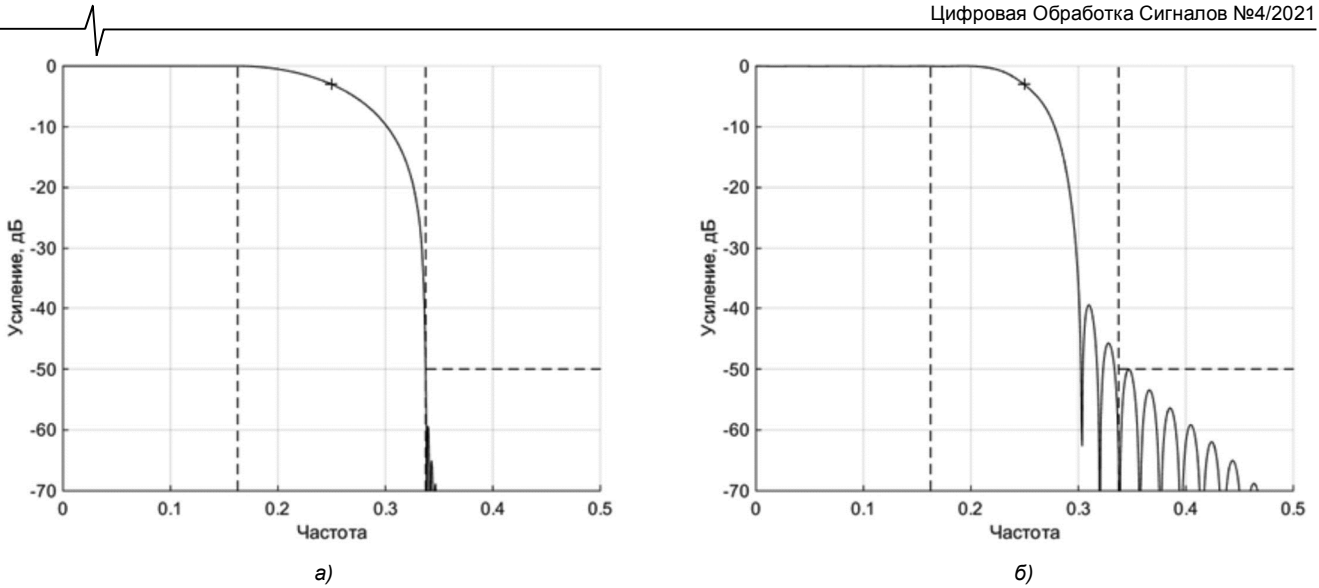


Рис. 2. Нормированные АЧХ фильтров для  $N = 285, \alpha = \alpha_n = 0,35$  (а) и  $N = 51, \alpha = 0,191, \alpha_n = 0,35$  (б)

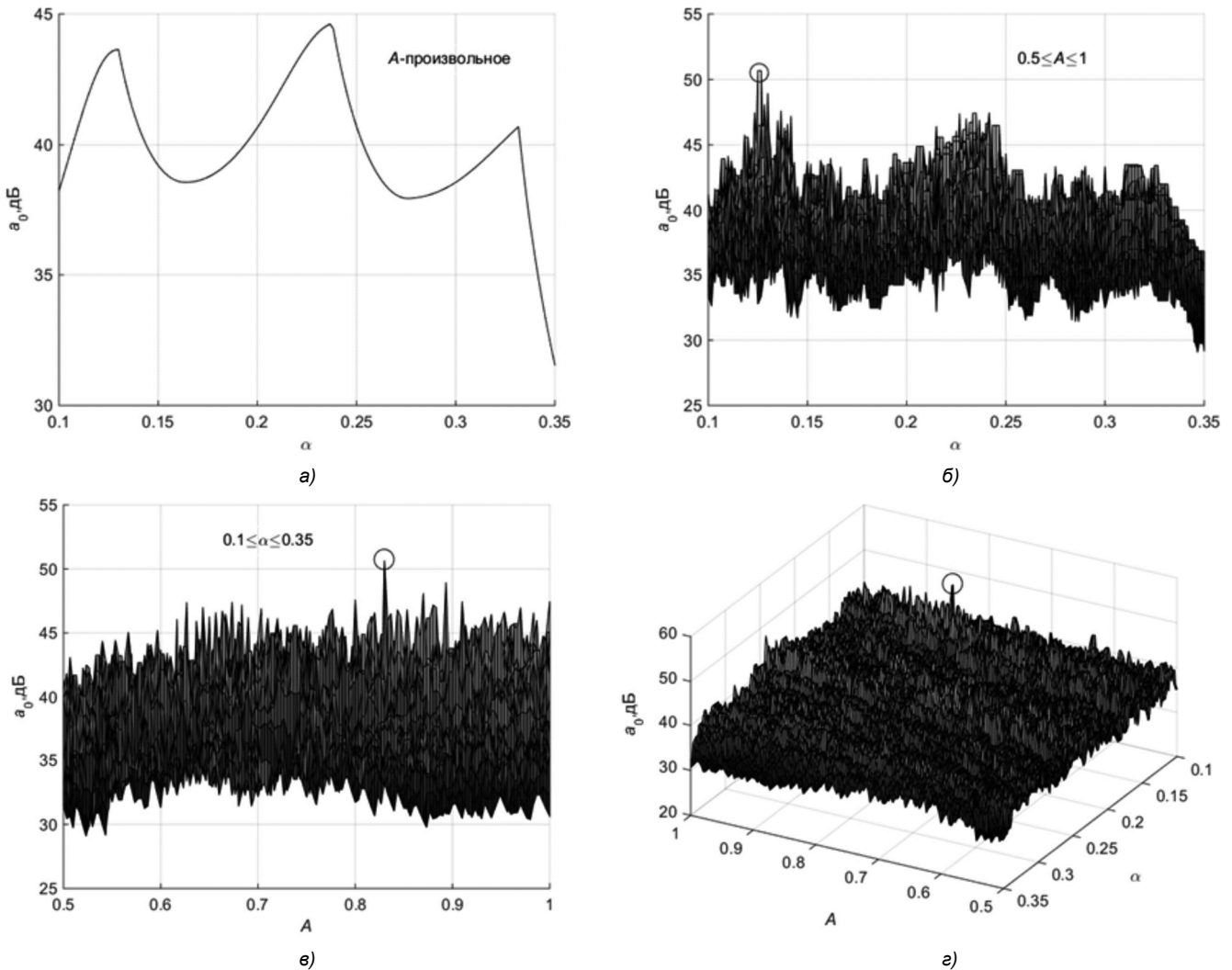
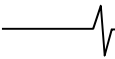


Рис. 3. Зависимости ослабления  $a_0$  от параметров  $\alpha, A$  для  $N = 33, \alpha_n = 0,35$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 8$  (б-г)

в (8). При этом, как показывают расчеты  $\text{Peak ISI} = -36,9$  дБ и требование в (8) остается выполненным, но уровень  $\text{PAPR} = 4,9$  дБ, т.е. увеличился на 1,1 дБ.

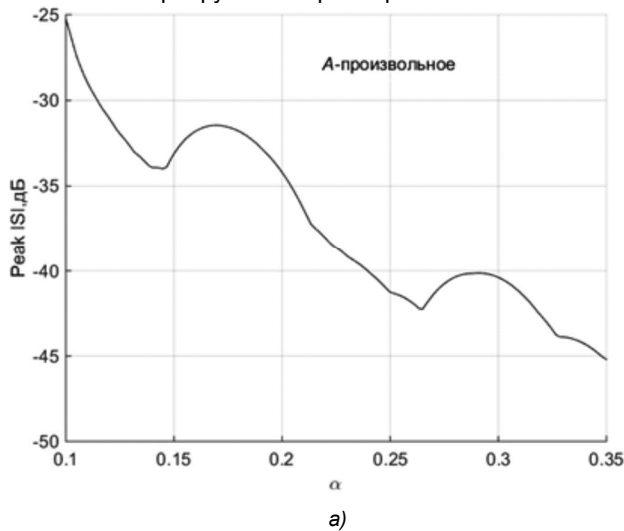
Теперь найдем решение с квантованными коэффициентами ( $M \neq \infty$ ), удовлетворяющее условиям (8). Казалось бы, что оно должно соответствовать  $N > 51$  для обеспечения некоторого запаса на отклонение АЧХ обусловленное квантованием. Однако ниже получены ре-

шения для  $N < 51$ . Это обусловлено тем, что SRRC-фильтры не обладают наилучшими АЧХ в смысле наибольшего ослабления  $a_0$  при фиксированном  $N$  и поэтому было предположено, что квантование коэффициентов может привести к желаемому увеличению  $a_0$ . Автор данной статьи наблюдал подобные эффекты улучшения АЧХ как для КИХ-, так и для БИХ-фильтров со стандартными требованиями.



Расчет обсуждаемых фильтров при фиксированных  $N$  и  $K$  зависит лишь от исходного значения фактора ската  $\alpha$ . Однако, как хорошо известно на параметры квантованных фильтров, влияет исходная константа  $A$ , связанная с усилением фильтра, на которую умножают нормированные относительно единицы коэффициенты перед их квантованием. Таким образом метод ВИП для SRRC-фильтров сводится к вариации двух параметров  $\alpha$  и  $A$  для нахождения решения с квантованными коэффициентами.

На рис. 3 метод ВИП иллюстрируется для  $N = 33$ . На рис. 3 а показана зависимость ослабления  $a_0$  от параметров  $\alpha$ ,  $A$  при  $M = \infty$ . Как видим максимальное значение  $a_0$  не превышает 45 дБ. На рис. 3 б приведена эта же зависимость для квантованных коэффициентов при  $0,5 \leq A \leq 1$  и  $M = 8$ , где имеют место помеченное решение с  $a_0 = 50,7$  дБ. На рис. 3 в, г представлены два других ракурса этой сложной зависимости, позволяющие дополнительно проиллюстрировать влияние на нее параметра  $A$  при  $M \neq \infty$ . Далее ограничимся показом только одного ракурса подобных трехмерных графиков поскольку более детальный их анализ, как в [29], здесь не затрагивается, но он был интересен автору в процессе выполнения работы для разных диапазонов и шагов изменения варьируемых параметров.



На рис. 4 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 8$  представлены зависимости Peak ISI от  $\alpha$ ,  $A$ . Как видим при  $M = 8$  часть точек этой зависимости превышает заданный, в (8) уровень -25 дБ. Однако для найденного решения помеченного на рис. 3 б-г, значение Peak ISI = -26,9 дБ. Уровень PAPR = 5,5 дБ. Нормированные АЧХ фильтра приведены на рис. 5 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 8$ . Квантованные коэффициенты даны в табл. 1. Максимальное усиление фильтра равно 1,82. Таким образом решение задачи синтеза для  $\alpha_n = 0,35$  найдено.

Вновь обратимся к требованиям (8), полагая  $M = \infty$ . Можно убедиться, что при  $\alpha_n = 0,05$  для  $N = 1989$  получим  $a_0 = 49,9$  дБ, Peak ISI = -78 дБ и PAPR = 7,6 дБ. Как и в предыдущем примере по уровню МСИ имеется очень большой запас, а АЧХ фильтра имеет избыточное ослабление в полосе задерживания исключая окрестность, примыкающую к ее границе. Поэтому действуя аналогично тому, как и ранее, можно получить допустимое решение с квантованными коэффициентами для  $N = 257$  и  $M = 11$  при исходных параметрах  $\alpha = 0,03123$ ,  $A = 0,5484$ . Нормированные АЧХ для  $M = \infty$  и  $M = 11$  приведены на рис. 6 а и б. Им соответствуют Peak ISI = -41,3 дБ и -26,8 дБ, а также значения PAPR = 8,2 дБ и 8,1 дБ. Как видим и в данном случае

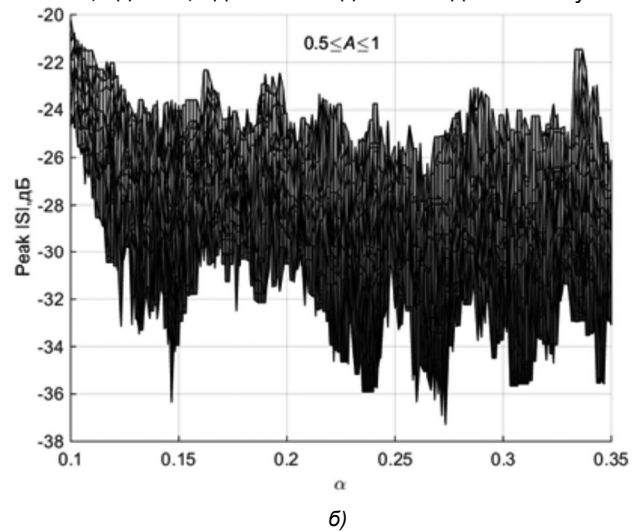


Рис. 4. Зависимости уровня Peak ISI от параметров  $\alpha$ ,  $A$  для  $N = 33$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 8$  (б)

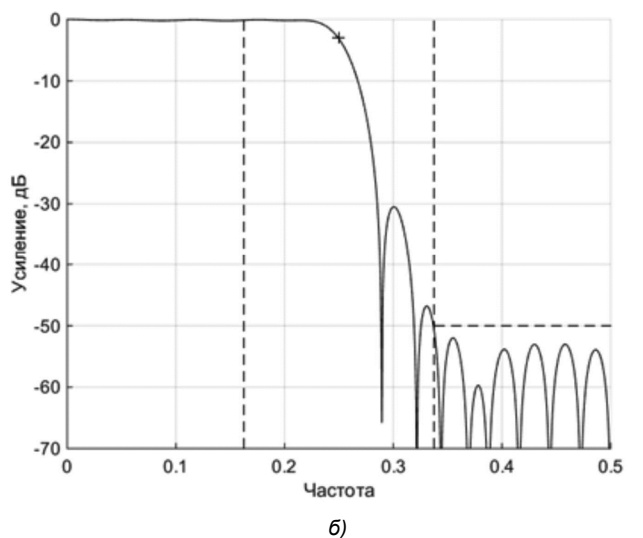
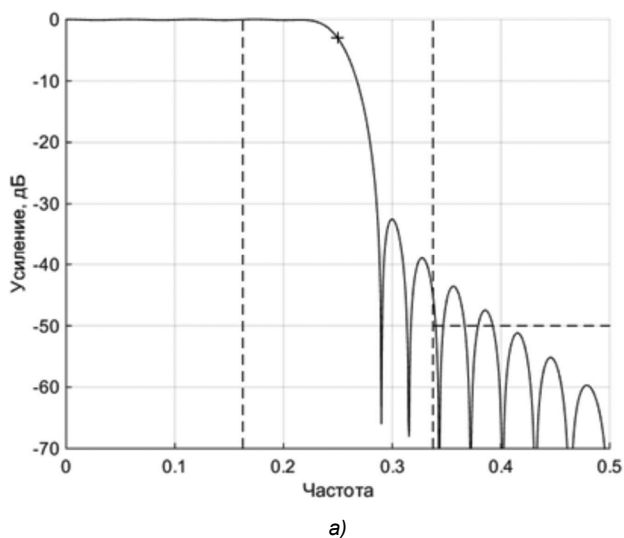


Рис. 5. Нормированные АЧХ фильтров для  $N = 33$ ,  $\alpha_n = 0,35$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 8$  (б)

фильтр с квантованными коэффициентами, в отличие от фильтра с непрерывными коэффициентами, удовлетворяет (точнее почти удовлетворяет, т.к.  $a_0 = 49,9$  дБ вместо 50 дБ) условию по ослаблению  $a_0$  в (8).

Таблица 1. Квантованные коэффициенты ( $M = 8$ )

$i$	$h_i = h_{35-i}$
1	0,0078125
2	0,00390625
3	-0,01171875
4	-0,00390625
5	0,1953125
6	0
7	-0,03125
8	0,0078125
9	0,046875
10	-0,01953125
11	-0,06640625
12	0,04296875
13	0,1015625
14	-0,0859375
15	-0,17578125
16	0,24609375
17	0,828125

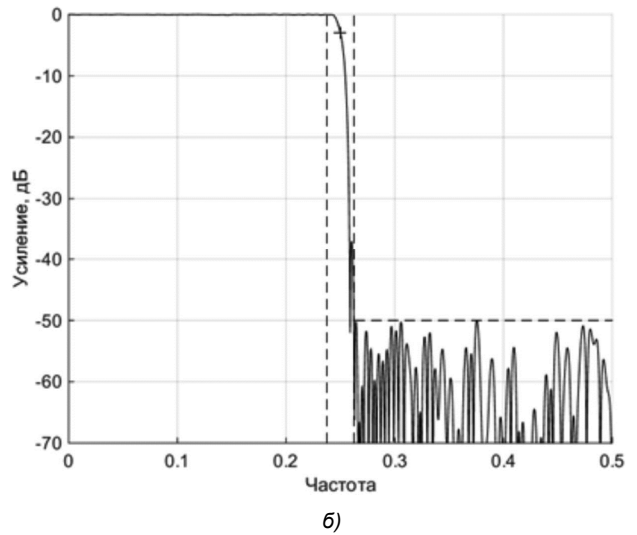
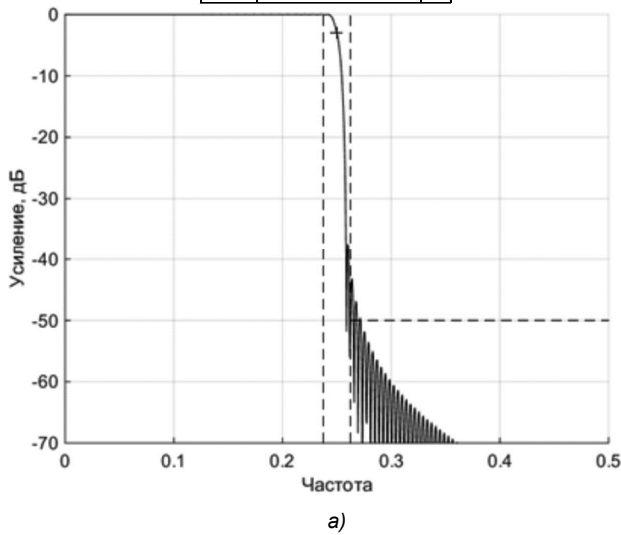


Рис. 6. Нормированные АЧХ фильтров для  $N = 257$ ,  $\alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 11$  (б)

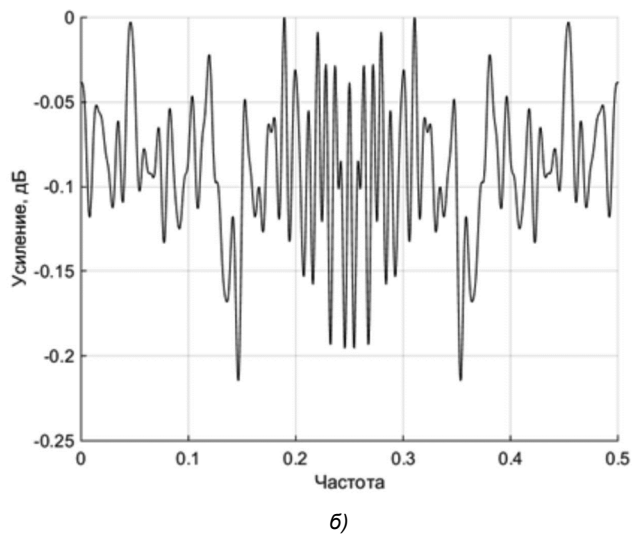
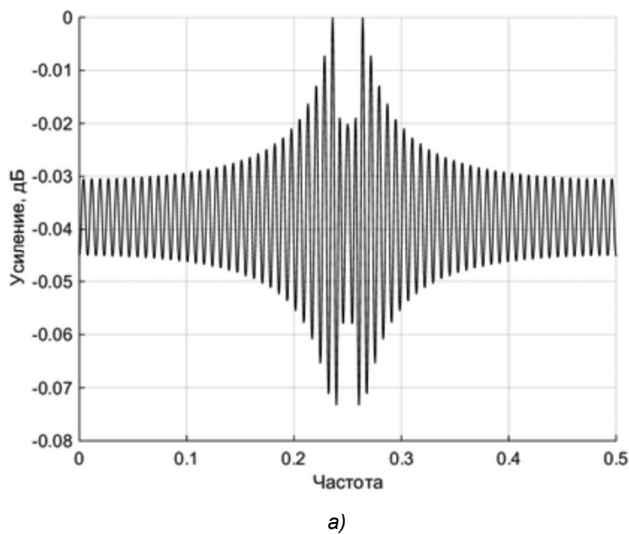


Рис. 7. Нормированные суммарные АЧХ для  $N = 257$ ,  $\alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 11$  (б)

На рис. 7 а и б для полученного решения при  $M = \infty$  и  $M = 11$  иллюстрируются упомянутые ранее суммарные АЧХ нормированные к 0 дБ. Как и ожидалось, из-за соответствующих значений Peak ISI, неравномерность АЧХ при  $M = \infty$  меньше, чем при  $M = 11$ .

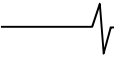
В каждом из двух обсуждаемых примеров отказ от традиционного расчета SRRC-фильтров позволяет существенно (вплоть до 8 раз) снизить их порядок при удовлетворении требований к АЧХ. Степень снижения зависит от приемлемого увеличения Peak ISI и PAPR. Выявлен полезный эффект квантования коэффициентов, позволяющий «превратить» недопустимые АЧХ фильтров пониженного порядка в допустимые. Отметим также, что поиск решений с  $a_0 \geq 50$  дБ для  $M \neq 8$  при  $\alpha_n = 0,35$  и  $M \neq 11$  при  $\alpha_n = 0,05$  не имел успеха.

**ВИП в синтезе ВЧА-фильтров**

Синтез формирующих ВЧА-фильтров в [10] выполняется с помощью алгоритма Ремеза. При этом предлагается минимизировать ошибку вида

$$e' = \max \{ \delta_1, r_0 \delta_0, r \delta_2 \}, \tag{9}$$

где  $\delta_0$  – отклонение АЧХ от уровня  $1/\sqrt{2}$  на частоте  $f_0$  (см. (4)),  $\delta_1$  и  $\delta_2$  отклонения АЧХ определяемые как для



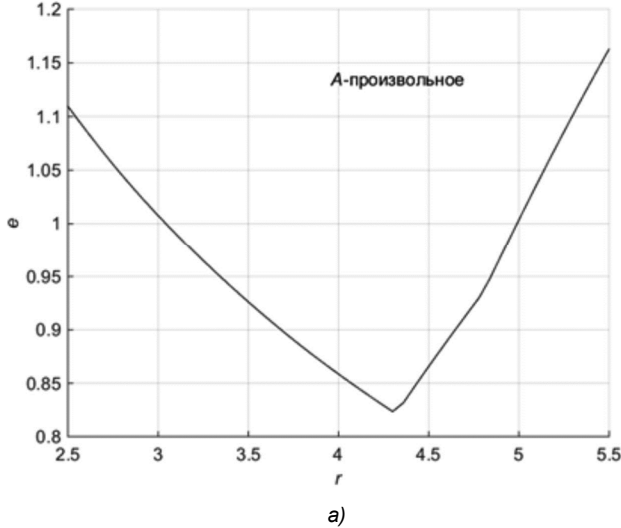
(6), а  $r$  и  $r_0$  – заданные веса. В [10] показано, что уровень Peak ISI для синтезируемого таким образом ВЧ-фильтра существенно зависит от  $r$ , причем эта зависимость имеет единственный минимум, который предложено находить итеративно. Установлено также, что вес  $r_0$  можно задавать в очень широких пределах без существенного влияния на уровень Peak ISI.

Техника ВИП хорошо встраивается в этот метод для решения задачи синтеза квантованных КИХ-фильтров с заданными требованиями по ослаблению  $a_0$  и уровню Peak ISI. Ошибка (9) зависит от исходных  $\alpha$  и  $r$ , а решение с квантованными коэффициентами – еще и от константы  $A$ , упомянутой выше. Положим  $\alpha = \alpha_n$ ,  $r_0 = 1$  и подвергнем вариации с равномерным шагом параметры  $r$  и  $A$  для минимизации ошибки вида

$$e = \max \left\{ \frac{\Delta}{\Delta_{\max}}, \frac{\delta_2}{\delta_{2\max}} \right\}, \quad (10)$$

где  $\Delta$  – уровень Peak ISI в относительных единицах, а  $\Delta_{\max}$  – его допустимое значение,  $\delta_{2\max}$  – допустимый уровень отклонения  $\delta_2$ .

Синтез квантованного КИХ-фильтра заключается в



следующем. После нескольких проб для ряда  $N$  при  $M = \infty$  определим диапазон изменения  $r$  в котором есть участок с  $e < 1$ . Для каждого значения  $r$  найдем нормированные коэффициенты фильтра, которые умножим на текущее  $A$  и проквантуем. Из всех полученных квантованных решений выберем то, для которого имеет место наименьшее значение  $e$ . Допустимому решению соответствует  $e \leq 1$ .

Выполним синтез фильтра с требованиями (8), положив в начале  $\alpha_n = 0,35$ . На рис. 8 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 8$  показаны зависимости  $e$  от  $r$ ,  $A$  для  $N = 19$ . Уменьшение  $M$  приводит к нарушению условия  $e \leq 1$ .

Для точки минимума  $e$  на рис. 8 а значения  $a_0 = 51,7$  дБ, Peak ISI = -26,8 дБ и PAPR = 4,2 дБ. На рис. 8 б стрелка указывает на отрезок, для которого  $e < 1$ ,  $a_0 = 50,4$  дБ, Peak ISI = -26,9 дБ и PAPR = 4,2 дБ. Для точки этого отрезка ( $r = 4,6$  и  $A = 0,817$ ) нормированные АЧХ при  $M = \infty$  и  $M = 8$  представлены на рис. 9 а и б, а квантованные коэффициенты даны в табл. 2. Максимальное усиление фильтра равно 1,76. Заметим, что квантование коэффициентов при  $A = 1$  для точки минимума кривой на рис. 8 а приводит к допустимому решению лишь при  $M \geq 11$ .

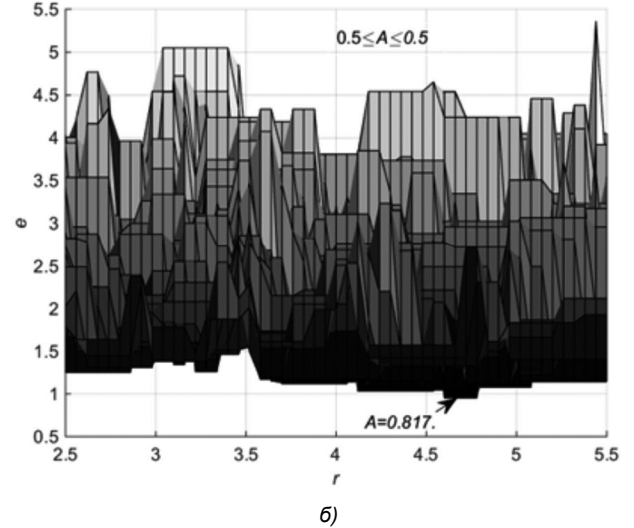


Рис. 8. Зависимости ошибки  $e$  от параметров  $r$ ,  $A$  для  $N = 19$ ,  $\alpha_n = 0,35$ , при  $M = \infty$  (а) и  $M = 8$  (б)

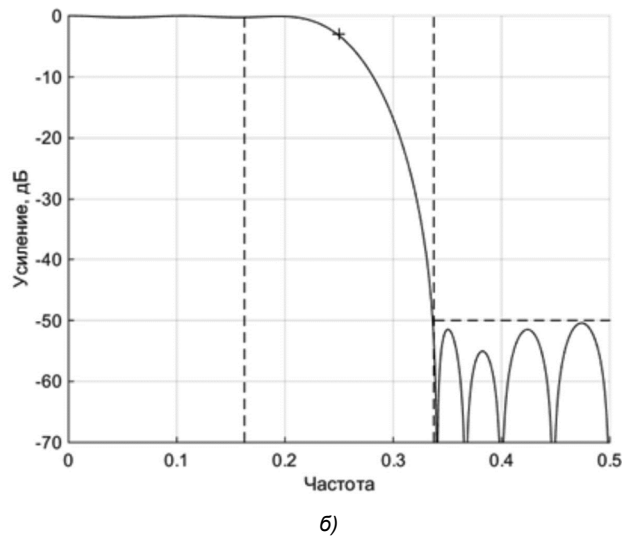
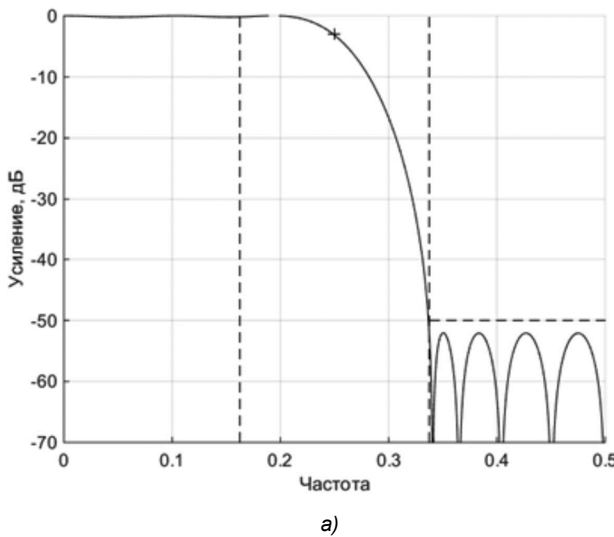


Рис. 9. Нормированные АЧХ фильтров для  $N = 19$ ,  $\alpha_n = 0,35$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 8$  (б)



Таблица 2. Квантованные коэффициенты ( $M = 8$ )

$i$	$h_i = h_{21-i}$
1	0,00390625
2	0,01953125
3	0
4	-0,0390625
5	0,01171875
6	0,08203125
7	-0,05078125
8	-0,171875
9	0,20703125
10	0,81640625

Теперь выполним синтез фильтра с требованиями (8) при  $\alpha_n = 0,05$ . На рис. 10 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 12$  показаны зависимости ошибки  $e$  от параметров  $r, A$  для  $N = 127$ . Уменьшение  $M$  приводит к нарушению условия  $e \leq 1$ .

Для минимума кривой на рис. 10 а значения  $a_0 = 50,7$  дБ, Peak ISI = -25,7 дБ и PAPR = 7,8 дБ. На рис. 10 б стрелка указывает на точку  $r = 3,12$ ,  $A = 0,99$  для которой  $e$  минимально,  $a_0 = 50,1$  дБ, Peak ISI = -25,5 дБ и PAPR = 7,8 дБ, а нормированные АЧХ

фильтра при  $M = \infty$  и  $M = 12$  представлены на рис. 11. Квантование коэффициентов фильтра при  $A = 1$  для точки минимума на рис. 10 а приводит к допустимому решению при  $M = 14$ .

**ВИП в синтезе двухступенчатых ВЧА-фильтров**

В [17] для синтеза формирующих фильтров предложен двухступенчатый подход, который ограничен коэффициентом передискретизации  $K = 2$ . Первой ступени соответствует полуполосный КИХ-фильтр нижних частот (ППФ) с  $H_1(z)$  и заданным ослаблением АЧХ в полосе задерживания, а второй ступени – амплитудный КИХ-корректор (АК) с передаточной функцией  $H_2(z)$ , которой соответствует АЧХ

$$H_2(f) = \{H_1^2(f) + H_1^2(0,5 - f)\}^{-1/2}$$

Синтез каждого из этих двух фильтров прямой структуры можно выполнить на основе ВЧА с применение алгоритма Ремеза при единичных весах. Формирующий ВЧА-фильтр с результирующей  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$  обеспечивает заданные уровни ослабления и МСИ. Порядок формирующего фильтра  $N = N_1 + N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  четные порядки ППФ и АК. Таким образом порядок  $N$  ограничен

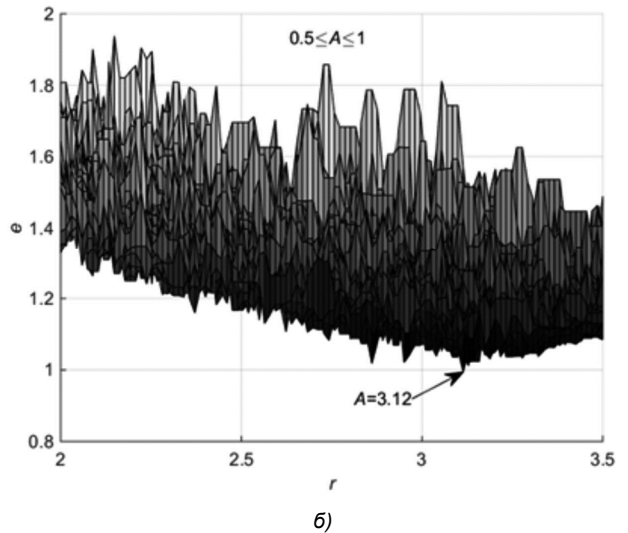
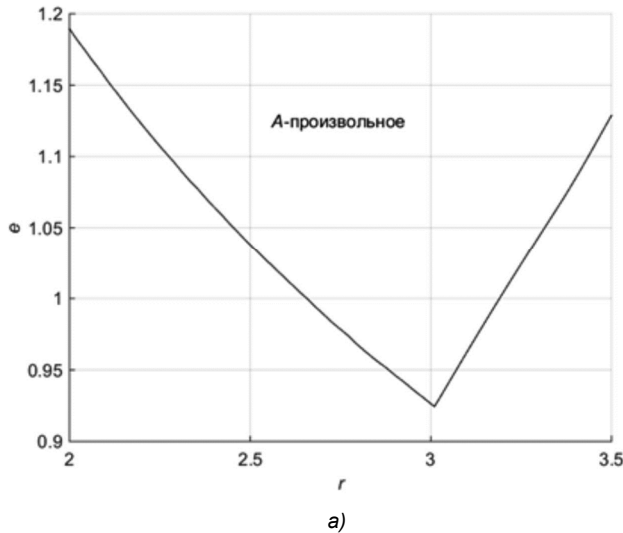


Рис. 10. Зависимости ошибки  $e$  от параметров  $r, A$  для  $N = 127, \alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 12$  (б)

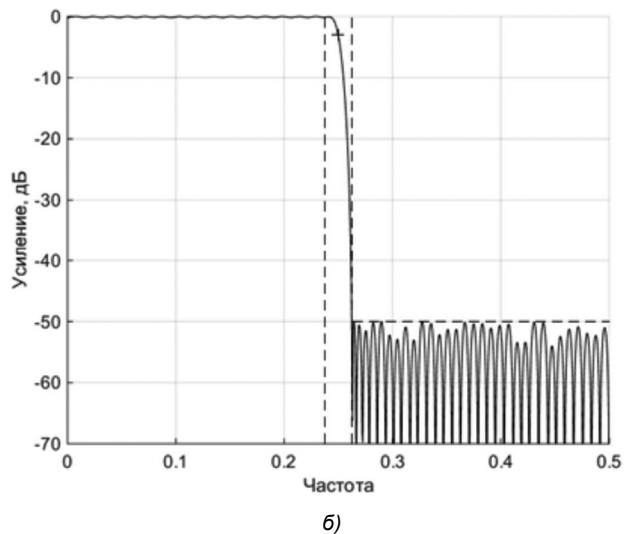
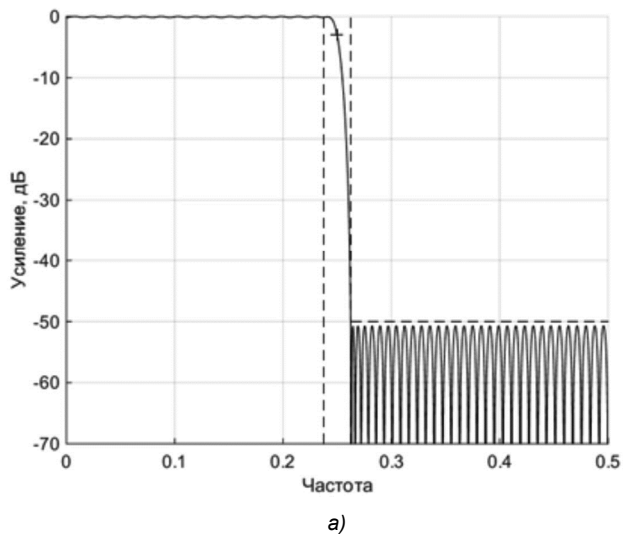


Рис. 11. Нормированные АЧХ фильтров для  $N = 127, \alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 12$  (б)

четными значениями. Важной особенностью предложенного двухступенчатого метода является то, что практически половина коэффициентов линейно-фазовых ППФ и АК равна нулю, что сильно упрощает их реализацию.

В данном случае синтез квантованного КИХ-фильтра с  $H(z)$  при помощи техники ВИП заключается в минимизации ошибки  $e$  определенной в (10). Для этого вариации подвергнем параметры  $\alpha$  и  $A$  в предварительно выбранных диапазонах. Для ряда значений  $\alpha$  находим нормированные коэффициенты ППФ и АК, которые умножаем на текущее значение  $A$  и квантуем. Из всех полученных таким образом решений выбираем, то для которого ошибка  $e$  минимальна. Решение считается допустимым при  $e \leq 1$ .

Обратимся к требованиям (8), положив  $M = \infty$ . Для  $\alpha_n = 0,35$  ППФ с порядком  $N_1 = 14$  обеспечивает выполнение (8) по ослаблению  $a_0$  с запасом в 1 дБ. Фильтр на основе каскадного соединения этого ППФ и АК с порядком  $N_2 \geq 20$  позволяет удовлетворить требованиям (8)

по уровню Peak ISI практически сохраняя указанный запас по  $a_0$ . При увеличении  $N_2$  от 20 до 80 уровень Peak ISI уменьшается от -26 дБ до -74 дБ. Дальнейшее увеличение  $N_2$  очень слабо влияет на этот уровень. По существу, имеет место насыщение.

Для  $N = 14 + 20 = 34$  на рис. 12 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 9$  показаны зависимости ошибки  $e$  от параметров  $\alpha$ ,  $A$ . Минимуму  $e$  на рис. 12 а соответствуют  $a_0 = 51,1$  дБ, Peak ISI = -26,0 дБ и PAPR = 5,5 дБ. На рис. 12 б стрелка указывает на точку, для которой  $e$  минимально,  $a_0 = 50,0$  дБ, Peak ISI = -25,6 дБ и PAPR = 5,5 дБ, а нормированные АЧХ формирующих фильтров, ППФ и АК представлены на рис. 13 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 9$ . Квантованные коэффициенты для ППФ и АК даны в табл. 3. Все коэффициенты с четными индексами равны нулю, исключая  $h_8$  для ППФ. Максимальное усиление для ППФ равно 1,9, а для АК – 1,7. Квантование коэффициентов фильтра при  $A = 1$  для точки минимума кривой на рис. 12 а приводит к допустимому решению при  $M \geq 11$ .

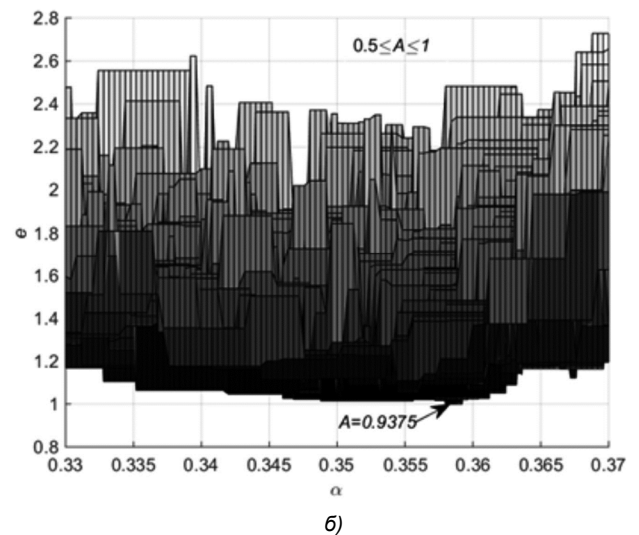
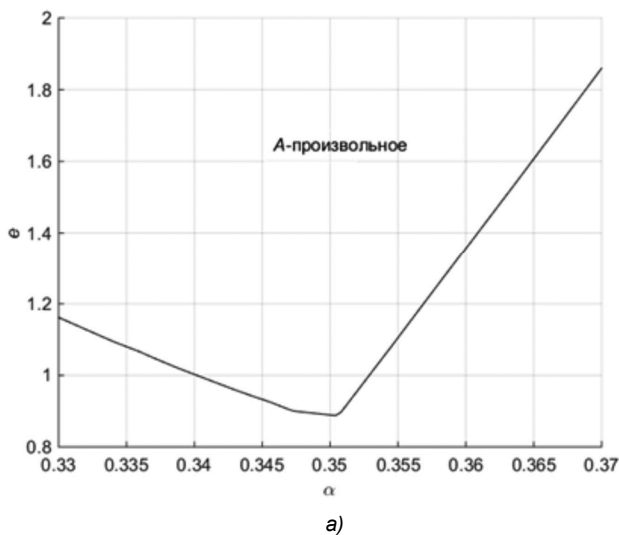


Рис. 12. Зависимости ошибки  $e$  от параметров  $\alpha$ ,  $A$  для  $N = 34$ ,  $\alpha_n = 0,35$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 9$  (б)

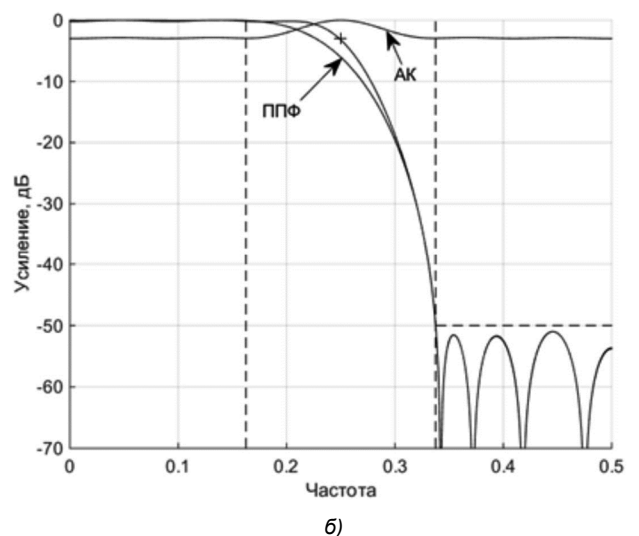
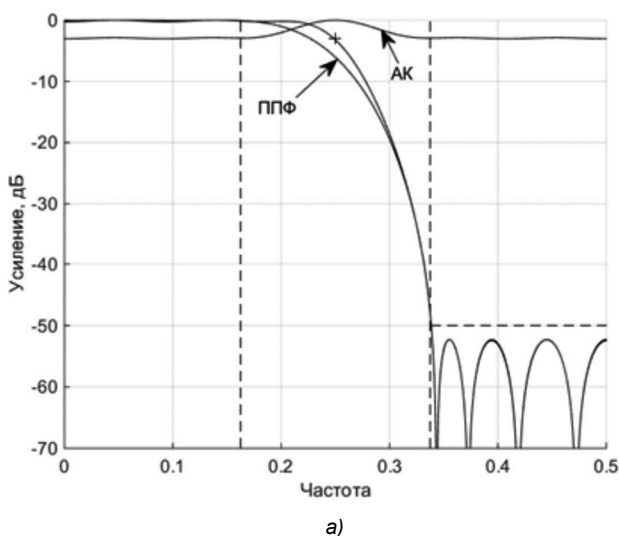


Рис. 13. Нормированные АЧХ формирующих фильтров, ППФ и АК для  $N = 34$ ,  $N_1 = 14$ ,  $N_2 = 20$ ,  $\alpha_n = 0,35$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 9$  (б)

Таблица 3. Квантованные коэффициенты ( $M = 9$ )

ППФ, $N_1 = 14$		АК, $N_2 = 20$	
$i$	$h_i = h_{16-i}$	$i$	$h_i = h_{22-i}$
1	-0,015625	1	-0,009765625
3	0,0546875	3	0,017578125
5	-0,15234375	5	-0,029296875
7	0,580078125	7	0,041015625
8	0,9375	9	-0,05078125
-	-	11	0,9375

Снова обратимся к требованиям (8), положив  $M = \infty$ . Для  $\alpha_n = 0,05$  ППФ при  $N_1 = 106$  обеспечивает выполнение (8) по ослаблению  $a_0$  с запасом в 1 дБ. Фильтр на основе каскадного соединения этого ППФ и АК при  $N_2 \geq 160$  позволяет удовлетворить (8) по уровню Peak ISI, практически сохраняя указанный запас по  $a_0$ . При увеличении  $N_2$  от 160 до 288 уровень Peak ISI уменьшается от -26 дБ до -34 дБ. Дальнейшее увеличение  $N_2$  очень слабо влияет на этот уровень. Имеет место насыщение.

Для  $N = 106 + 160 = 266$  на рис. 14 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 12$  показаны зависимости ошибки  $e$  от параметров  $\alpha$ ,  $A$ . Точке минимума  $e$  на рис. 14 а соответствуют  $a_0 = 51,0$  дБ, Peak ISI = -26,0 дБ и PAPR = 9,9 дБ. На

рис. 14 б стрелка указывает на точку, для которой  $e$  минимально,  $a_0 = 50,5$  дБ, Peak ISI = -25,2 дБ и PAPR = 9,9 дБ, а нормированные АЧХ формирующих фильтров, ППФ и АК представленные на рис. 15 а и б при  $M = \infty$  и  $M = 12$ . Квантование коэффициентов фильтра при  $A = 1$  для точки минимума кривой на рис. 12 а соответствует допустимому решению при  $M \geq 13$ .

Интересно, что для каждого из двух рассмотренных примеров синтеза найденные допустимые решения с  $e < 1$  при  $M \neq \infty$  получены квантованием коэффициентов для решений с  $e > 1$  при  $M = \infty$ , что можно увидеть, обратившись к рис. 12 и рис. 14.

**Сравнение результатов синтеза формирующих КИХ-фильтров**

В предыдущих разделах представлены примеры синтеза квантованных формирующих КИХ-фильтров тремя методами: SRRC+, ВЧА+ и ВЧА2+. Здесь знак + подразумевает объединение метода с техникой ВИП, а обозначение ВЧА2+ соответствует синтезу двухступенчатых фильтров. Полученные результаты при  $\alpha_n = 0,35$  и  $0,05$  сведены в табл. 4 и табл. 5, где  $\times$  и  $\Sigma$  означают количество умножителей и сумматоров в структуре фильтра. При подсчете этих элементов учтено наличие нулевых

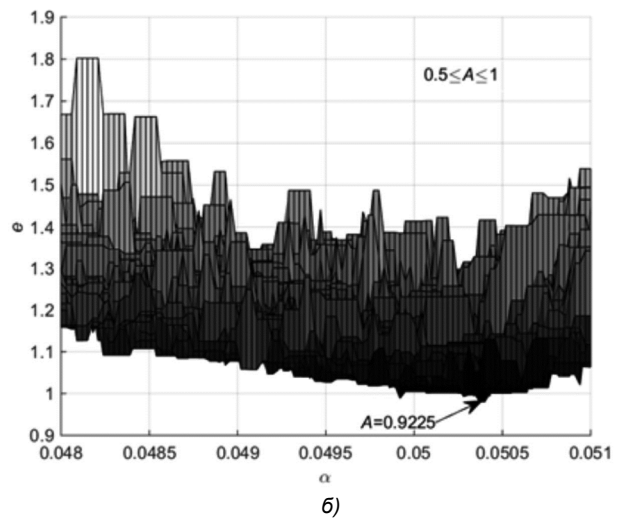
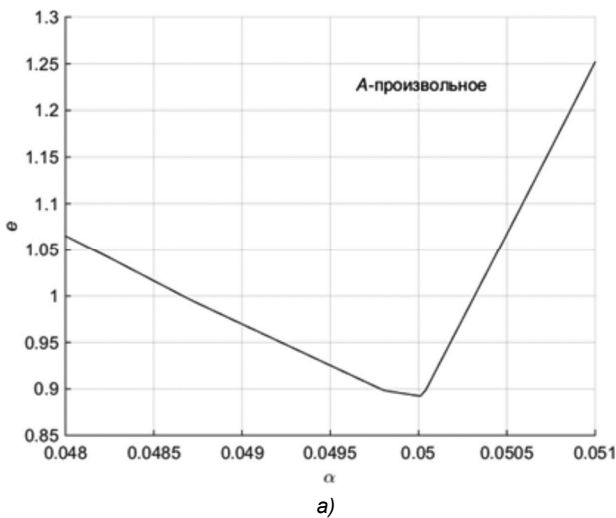


Рис. 14. Зависимости ошибки  $e$  от параметров  $\alpha$ ,  $A$  для  $N = 266$ ,  $\alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 12$  (б)

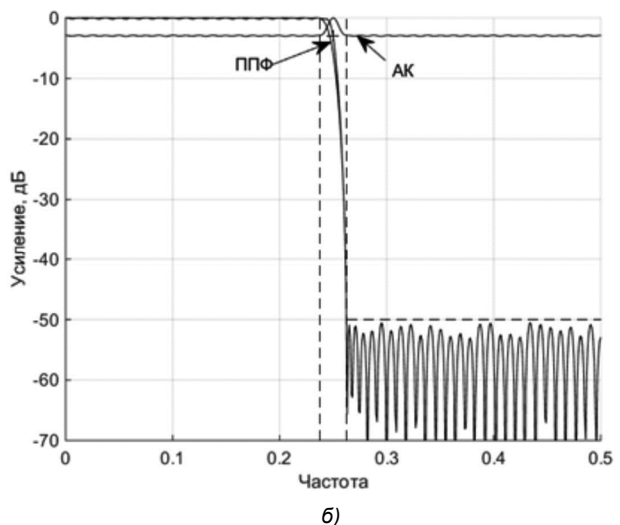
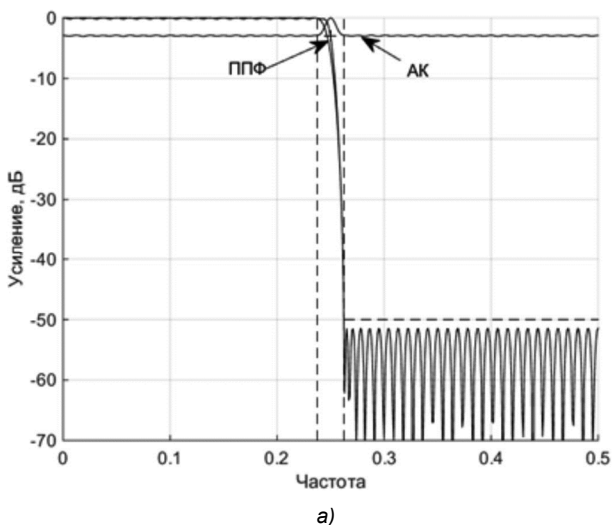


Рис. 15. Нормированные АЧХ формирующих фильтров, ППФ и АК для  $N = 266$ ,  $N_1 = 106$ ,  $N_2 = 160$ ,  $\alpha_n = 0,05$  при  $M = \infty$  (а) и  $M = 12$  (б)

Таблица 4. Результаты синтеза формирующих КИХ-фильтров при  $\alpha_n = 0,35$ 

Метод	$N$	$a_0$ , дБ	Peak ISI, дБ	PAPR, дБ	$M$	$\times$	$\Sigma$
SRRC+	33	50,6	-26,9	5,5	8	16	31
ВЧА+	19	50,4	26,9	4,2	8	9	17
ВЧА2+	14+20=34 (11+10=21)	50,0	-25,6	5,5	9	11	18

Таблица 5. Результаты синтеза формирующих КИХ-фильтров при  $\alpha_n = 0,05$ 

Метод	$N$	$a_0$ , дБ	Peak ISI, дБ	PAPR, дБ	$M$	$\times$	$\Sigma$
SRRC+	257	49,9	-26,8	8,1	11	109	217
ВЧА+	127	50,1	-25,5	7,8	12	63	125
ВЧА2+	106+160=266 (80+80=160)	50,5	-25,2	9,9	12	69	134

коэффициентов, обусловленное как спецификой синтеза, так и квантованием, а при подсчете умножителей учтена и симметрия ИХ фильтра.

Как видим, все результаты удовлетворяют требованиям (8) по  $a_0$  и Peak ISI. Кроме того, близки по длине слова  $M$  для каждого из двух значений  $\alpha_n$ . При  $\alpha_n = 0,05$  в сравнении с  $\alpha_n = 0,35$  уровень PAPR существенно увеличивается независимо от метода синтеза. Наименьшие значения этого параметра, получены методом ВЧА+. Как показывают дополнительные исследования, если порядки фильтров  $N$  в методах SRRC+ и ВЧА+ положить четными (это ограничение метода ВЧА2+), то наблюдаемый разброс в значениях PAPR в табл. 4 и табл. 5 уменьшается до 5,2-5,7 дБ и 9,6-9,9 дБ. Нижние границы соответствуют методу ВЧА+.

Метод SRRC+ значительно уступает методам ВЧА+ и ВЧА2+ по количеству умножителей и сумматоров в структуре фильтров. Метод ВЧА+ позволяет достичь более низкие порядки  $N$  и, следовательно, значения ГВЗ, а также наименьшее количество элементов задержки в структуре в сравнении с полученными двумя другими методами. Однако заметим, что в системах связи при коэффициенте передискретизации  $K = 2$  перед фильтром передатчика включен интерполятор на 2, а после фильтра приемника – прореживатель на 2. Поэтому количество элементов задержки в этих фильтрах, спроектированных методом ВЧА2+, можно значительно уменьшить применив полифазное разбиение и замечательные тождества для многоскоростных фильтров [26]. При условии, что в передатчике ППФ включен после АК, а в приемнике – наоборот, общее количество элементов задержки будет соответствовать цифрам в скобках в табл. 4 и табл. 5. Хотя решения, найденные с помощью методов ВЧА+ и ВЧА2+ при этом сблизались, все же преимущество по общим затратам на реализацию остается за фильтрами, синтезированными методом ВЧА+.

## Заключение

Рассмотрены три существенно отличающихся друг от друга метода синтеза согласованных квантованных формирующих линейно-фазовых КИХ-фильтров прямой структуры для систем цифровой связи. Первый – на основе получения частотной характеристики вида корень квадратный из приподнятого косинуса, а второй и третий – на основе взвешенной чебышевской аппроксимации АЧХ. Третьему методу соответствует двухэтап-

ная аппроксимация для полуполосного фильтра и амплитудного корректора, каскадное соединение которых образует формирующий фильтр. Синтез каждым методом направлен на достижение требуемых значений ослабления АЧХ в полосе задерживания формирующего фильтра и уровня МСИ на выходе каскадного соединения пары таких фильтров при минимальных значениях порядка и длины слова коэффициентов. Проблема квантования коэффициентов в каждом из методов решена с помощью техники вариации исходных параметров, которая иллюстрируется графически. Представлены результаты синтеза фильтров для двух значений фактора ската 0,35 и 0,05 при коэффициенте передискретизации 2.

Все результаты, полученные тремя методами удовлетворяют заданным требованиям по ослаблению в полосе задерживания ( $\geq 50$  дБ) и МСИ ( $\leq -25$  дБ) при близких значениях длины слова коэффициентов, отличающихся не более чем на 1 бит для каждого из двух значений фактора ската. Второй и третий методы в сравнении с первым приводят к существенно меньшему количеству умножителей и сумматоров в структурах фильтров. Второй – позволяет получить меньшие порядки фильтров и, следовательно, наименьшие значения ГВЗ. По уровню отношения пиковой- к средней мощности модулированного сигнала результаты имеют разброс 4,2-5,5 дБ и 7,8-9,9 дБ, соответственно для факторов ската 0,35 и 0,05. Нижние границы этого параметра достигнуты вторым методом.

Насколько хороши полученные квантованные формирующие КИХ-фильтры в сочетании с возможными дополнительными степенями интерполяции/прореживания в конкретных системах цифровой связи при наличии джиттера синхронизации, шумов, помех и нелинейных искажений можно выяснить путем математического и/или физического моделирования.

## Литература

1. Beaulieu N. C., Damen M. O. Parametric construction of Nyquist-I pulses // IEEE Trans. Commun. 2004. Vol. 52. No. 12. Pp. 2134-2142.
2. Assalini A., Tonello A. M. Improved Nyquist pulses // IEEE Commun. Letters. 2004. Vol. 8. No. 2. Pp. 87-89.
3. Bobula M., Prokes A., Danek K. Nyquist filters with alternative balance between time- and frequency-domain parameters // EURASIP J. Adv. in Signal Processing. Vol. 2010. Article ID 903980. 11p.

4. Assimonis S. D., Matthaïou M., Karagiannidis G. K., Nossek J. A. Improved parametric families of intersymbol interference-free Nyquist pulses using inner and outer functions // IET Signal Processing. 2011. Vol. 5. No. 2. Pp. 157-163.
5. Samuelli H. On the design of optimal equiripple FIR digital filters for data transmission applications // IEEE Trans. on CAS. 1988. Vol. 35. No. 12. Pp. 1542-1546.
6. Ramachandran R. P., Kabal P. Minimax design of factorable Nyquist filters for data transmission systems // Signal Processing. 1989. Vol. 18. No. 3. Pp. 327-339.
7. Samuelli H. On the design of FIR digital data transmission filters with arbitrary magnitude specifications // IEEE Trans. on CAS. 1991. Vol. 38. No. 12. Pp. 1563-1567.
8. Farhang-Boroujeny B., Mathew G. Nyquist filters with robust performance against timing jitter // IEEE Trans. on SP. 1998. Vol. 46. No. 12. Pp. 3427-3431.
9. Ashrafi A., Harris F. J. A novel square-root Nyquist filter design with prescribed ISI energy // Signal Processing. 2013. Vol. 93. No. 9. Pp. 2626-2635.
10. Siohan P., Moreau de Saint-Martin F. New designs of linear-phase transmitter and receiver filters for digital transmission systems// IEEE Trans. on CAS-II.1999. Vol. 46. No. 4. Pp. 428-433.
11. Boonyanant P., Tantaratana S. Design and hybrid realization of FIR Nyquist filters with quantized coefficients and low sensitivity to timing jitter// IEEE Trans. on SP. 2005. Vol. 53. No. 1. Pp. 208-221.
12. Farhang-Boroujeny B. A square-root Nyquist (M) filter design for digital communication systems // IEEE Trans on SP. 2008. Vol. 56, No. 5. Pp. 2127-2132.
13. Yao C.-Y., Willson A. N. The design of hybrid symmetric-FIR/analog pulse-shaping filters // IEEE Trans. on SP. 2012. Vol. 60. No. 4. Pp. 2060-2065.
14. Ashrafi A. Optimized linear phase square-root Nyquist FIR filters for CDMA IS-95 and UMTS standards // Signal Processing. 2013. Vol. 93. No. 4. Pp. 866-873.
15. Traverso S. A family of square-root Nyquist filter with low group delay and high stopband attenuation // IEEE Commun. Letters. 2016. Vol. 20. No. 6. Pp. 1136-1139.
16. Yao C.-Y., Wang S.-C. A QCQP design method of the symmetric pulse-shaping filters against receiver timing jitter // ISCAS. 2017. 4p.
17. Xiao R., Lei Q., Guo X., Du W., Zhao Y. A design of two sub-stage square-root Nyquist matched filter // IEEE Access. 2018. Vol.6. May. Pp. 23292-23302.
18. Renfors M., Saramaki T., Pulse-shaping filters for digital transmission systems// GLOBECOM. 1992. Pp. 467-471.
19. Vaisanen K., Renfors M. Efficient digital filters for pulse-shaping and jitter-free frequency error detection and timing recovery // Signal Processing. 2001. Vol. 81. No. 4. Pp. 829-844.
20. Samuelli H. The design of multiplierless digital data transmission filters with powers-of-two coefficients // Proc. IEEE Int. Telecomm. Symp. 1990. Pp. 425-429.
21. Kim H. Computer simulation results and analysis for a root-raised cosine filter design using canonical signed digits// NASA Technical Memorandum 107327. 1996. 16p.
22. Bonnaud A., Feltrin E., Barbiero L. DVB-S2 extension: end-to-end impact of sharper roll-off factor over satellite link// SPACOMM. 2014. Pp. 36-41.
23. Lim Y. C., Yu Y. J. A width-recursive depth-first tree search approach for the design of discrete coefficient perfect reconstruction lattice filter bank // IEEE Trans. on CAS: II. 2003. Vol. 50. No. 6. Pp. 257-266.
24. Yli-Kaakinen J., Saramaki T., Bregovic R. An algorithm for the design of multiplierless two-channel perfect reconstruction orthogonal lattice filter banks// ISCCSP. 2004. Pp. 415-418.
25. Мингазин А. Т. Два примера синтеза совершенных банков решетчатых фильтров без умножителей // 11-я международная конференция. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». (DSPA-2009). Т. 1. С. 99-102.
26. Вайдьянатхан П. П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией: Методический обзор // ТИИЭР. 1990. Т. 78. № 3. С. 77-120.
27. Мингазин А. Т. Вариация исходных параметров в задачах синтеза цифровых КИХ-фильтров с конечной длиной слова коэффициентов // 3-я Международная конференция. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». (DSPA-2000). Т. 1. С. 162-166.
28. Мингазин А. Т. Вариация исходных параметров взвешенной чебышевской аппроксимации в задаче синтеза КИХ-фильтров без умножителей // 7-я Международная конференция. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». (DSPA-2005). Т. 1. С. 54-56.
29. Мингазин А. Т. Трехмерная графика в задаче анализа квантованных КИХ-фильтров // Цифровая обработка сигналов. 2020. № 2. С. 46-51.