

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПЕРИОДОГРАММНОГО МЕТОДА ОБРАБОТКИ СЕГМЕНТОВ БИНАРНО-КВАНТОВАННОГО СИГНАЛА С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕСОВЫХ ОКОННЫХ ФУНКЦИЙ

Якимов В.Н., д.т.н., профессор Самарского государственного технического университета, e-mail: yvnr@hotmail.com;

Машиков А.В., аспирант Самарского государственного технического университета, e-mail: mavstu@list.ru

SPECTRAL ANALYSIS BASED ON THE PERIODOGRAM METHOD OF PROCESSING A PSEUDO-ENSEMBLE OF BINARY-QUANTIZED SIGNAL SEGMENTS USING WINDOW FUNCTIONS

Yakimov V.N., Mashkov A.V.

The article discusses the development of mathematical and algorithmic support for the spectral analysis of signals based on the calculation and averaging of periodogram estimates of the power spectral density (PSD). A special feature of this development is that the formation of a pseudo-ensemble of segments to be processed is carried out using binary-sign stochastic quantization of the analyzed signal. The use of this type of quantization made it possible to carry out analytical calculation of integral operations in the transition from the analog form of modified periodograms to their calculation in discrete form. As a result, the calculation of the PSD estimate has been reduced to processing discrete values of functions, which are determined only by the type of window functions used. The main operations of such processing are addition and subtraction operations. The need to perform multiplication operations is practically eliminated, which increases the efficiency of spectral analysis. The results of the numerical experiment showed that the developed approach allows performing spectral analysis at a sufficiently low signal-to-noise ratio.

Key words: power spectral density, periodogram, window function, binary stochastic quantization.

Ключевые слова: спектральная плотность мощности, периодограмма, оконная функция, бинарное стохастическое квантование.

Введение

Спектральный анализ сигналов представляет практический интерес во многих областях современной науки и техники. Исследование частотного состава сигналов позволяет контролировать текущее состояние различных по своему назначению технических систем и технологического оборудования в режиме их штатного функционирования. При этом анализируемые сигналы, как правило, являются сложными по своему частотному составу. Это выражается в том, что они представляют собой совокупность гармонических составляющих и шумовых помех. Последние могут быть, как собственными шумами, сопровождающими технологические процессы, так и внешними по отношению к ним шумами различного физического происхождения, носящими случайный характер. Спектральный анализ таких сигналов предполагает оценивание спектральной плотности мощности (СПМ), которая дает представление о его средней мощности, приходящееся на единичный частотный интервал [1, 2].

С развитием средств вычислительной техники оценивание СПМ преимущественно осуществляется в цифровом виде. При этом широкое применение получил периодограммный метод вычисления оценок СПМ на основе выполнения алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Периодограммный метод предполагает

Рассмотрена разработка математического и алгоритмического обеспечения для спектрального анализа сигналов на основе вычисления и усреднения периодограммных оценок спектральной плотности мощности (СПМ). Особенностью данной разработки является формирование псевдоансамбля подлежащих обработке сегментов с применением бинарно-знакового стохастического квантования реализации анализируемого сигнала. Использование данного вида квантования позволило осуществить аналитическое вычисление интегральных операций при переходе от аналоговой формы модифицированных периодограмм к их вычислению в дискретном виде. Вследствие этого вычисление оценки СПМ свелось к обработке дискретных значений функций, вид которых определяется только видом применяемых оконных функций. Основными операциями такой обработки являются операции сложения и вычитания. Практически исключена необходимость выполнения операций умножения, что повышает оперативность проведения спектрального анализа. Результаты численного эксперимента показали, что разработанный подход позволяет осуществлять спектральный анализ при достаточно низком отношении сигнал/шум.

ет вычисление оценки СПМ по одной реализации сигнала при условии, что он обладает свойствами стационарности и эргодичности. В общем случае такая оценка СПМ будет давать статистически неустойчивые результаты спектрального анализа. Это приводит к тому, что периодограммные оценки СПМ для сильно зашумленных сигналов будут иметь значительные флуктуации относительно истинных значений частотных составляющих. Следствием этого может стать потеря в оценке спектра слабых гармонических составляющих при низком отношении сигнал/шум. Кроме того, ввиду анализа

реализации сигнала конечной длительности, имеет место эффект «утечки» энергии в боковые лепестки. Такой эффект приводит к наложению и искажению спектральных линий в оценке СПМ, и слабые спектральные компоненты могут маскироваться боковыми лепестками более сильных спектральных компонент [1, 2].

С целью улучшения оценки СПМ используют метод усредненных модифицированных периодограмм. Согласно этому методу реализация сигнала на интервале времени его анализа представляется в виде псевдоансамбля сегментов. Тогда оценка СПМ вычисляется усреднением периодограммных оценок, которые вычисляются для каждого сегмента псевдоансамбля. Для увеличения числа сегментов при ограниченной длительности наблюдаемой реализации сигнала допускается их частичное перекрытие. При этом чтобы ослабить утечку в боковые лепестки используют оконные функции для сглаживания сегментов [1, 2]. Нетрудно видеть, что такой подход к оцениванию СПМ представляет собой достаточно сложный вычислительный процесс. При этом особенностью этого процесса является то, что основными операциями вычислительных процедур являются операций умножения. Поэтому алгоритмы, реализующие метод усредненных модифицированных периодограмм в цифровом виде, даже при использовании БПФ могут потребовать существенных временных затрат. Отсюда следует, что разработка эффективных цифровых алгоритмов для вычисления оценок СПМ на основе метода усредненных модифицированных периодограмм остается актуальной задачей.

Предлагаемый подход к вычислению периодограммной оценки СПМ

Одним из путей повышения вычислительной производительности цифровых алгоритмов является снижение разрядности обрабатываемых отсчетов анализируемого сигнала. Исходя из этого, в предельном случае для представления сигналов в цифровой форме используют грубое бинарное квантования [3, 4]. В [5, 6] показано, что в процессе решения задач статистической обработки сигналов получить эффективные решения позволяет применение бинарно-знакового стохастического квантования. Особенностью процедуры такого квантования является ее рандомизация за счет использования в качестве пороговой функции вспомогательно-го случайного сигнала $\xi(t)$. При этом вспомогательный сигнал $\xi(t)$ должен иметь равномерное распределение и принимать значения в пределах от $-\xi_{\max}$ до $+\xi_{\max}$, где значение величины ξ_{\max} определяется исходя из динамического диапазоном изменения квантуемой реализации сигнала.

При спектральном анализе практический интерес представляют частотные составляющие сигнала. Поэтому в процессе его осуществления обработке подвергается центрированная реализация сигнала $\overset{\circ}{x}(t)$, имеющая нулевое среднее значение. Результат бинарно-знакового стохастического квантования такой реализации будет равен:

$$\begin{aligned} z(t) &= +1, \quad \text{если } \overset{\circ}{x}(t) \geq \xi(t); \\ z(t) &= -1, \quad \text{если } \overset{\circ}{x}(t) < \xi(t). \end{aligned} \quad (1)$$

На основе данного вида квантования в [7] разработан алгоритм для оценки СПМ на основе прямого преобразования Фурье с использованием временных весовых функций. Однако этот алгоритм предполагает вычисление оценки СПМ только по одной реализации сигнала. При этом его разработка осуществлена в результате перехода к оценке корреляционной функции, вследствие чего требуется осуществлять две независимых процедуры бинарно-знакового стохастического квантования сигнала при подготовке исходных данных. В [8] на основе метода усреднения преобразования Фурье псевдоансамбля сегментов разработан алгоритм для цифрового гармонического анализа. Однако при этом не рассмотрен вопрос применения оконных функций при обработке сегментов результата бинарно-знакового стохастического квантования. С учетом этих работ рассмотрим разработку математического и алгоритмического обеспечения для оценивания СПМ на основе метода усредненных модифицированных периодограмм, когда для преобразования в цифровой код используется бинарно-знаковое стохастическое квантование.

Согласно методу усредненных модифицированных периодограмм в процессе оценки СПМ обработке подвергается совокупность сегментов анализируемого сигнала. В общем случае эти сегменты могут перекрываться, образуя так называемый псевдоансамбль. В соответствии с этим рассмотрим псевдоансамбль, который сформирован из сегментов результата бинарно-знакового стохастического квантования. Для иллюстрации такого псевдоансамбля за основу возьмем рисунок, приведенный в [8] (см. рис. 1).

Представленный на рис. 1 псевдоансамбль состоит из M сегментов длительностью T каждый. Смещение этих сегментов друг относительно друга равно T_0 . Если за начальное время анализа принять $t_0 = 0$, то для m -го сегмента будем иметь:

$$z(m, t) = z(t), \quad \text{где } (m-1)T_0 \leq t \leq (m-1)T_0 + T \quad (2)$$

и $1 \leq m \leq M$.

Периодограммная оценка для m -го сегмента будет иметь вид:

$$\hat{S}_{XX}(m, f_k, T) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} |\hat{S}_{ZZ}(m, f_k, T)|^2, \quad (3)$$

$$\hat{S}_{ZZ}(m, f_k, T) = \int_0^T z(t + (m-1)T_0)w(t) \exp(-j2\pi f_k t) dt, \quad (4)$$

где $f_k = kf_0$ и $f_0 = T^{-1}$.

В (4) $w(t)$ оконная функция, а W средняя мощность оконной функции.

Усредненная модифицированная периодограммная оценка СПМ будет равна:

$$\hat{S}_{XX}(f_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{S}_{XX}(m, f_k, T), \quad (5)$$

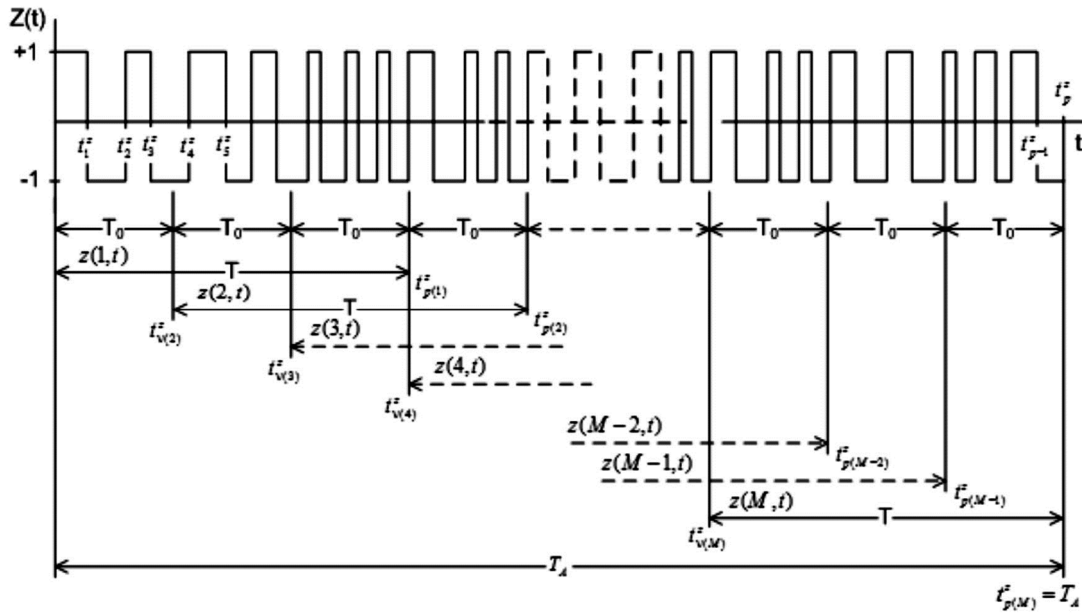


Рис. 1. Сегментирование результата бинарно-знакового стохастического квантования $z(t)$

Запишем (4) в следующем виде:

$$\hat{S}_{ZZ}(m, f_k, T) = \hat{a}_{k,m} - j\hat{b}_{k,m}, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{a}_{k,m} = \int_0^T z(t + (m-1)T_0) w(t) \cos 2\pi f_k t dt, \quad (7)$$

$$\hat{b}_{k,m} = \int_0^T z(t + (m-1)T_0) w(t) \sin 2\pi f_k t dt. \quad (8)$$

Тогда

$$\hat{S}_{XX}(m, f_k, T) = \frac{\xi^2}{TW} (\hat{a}_{k,m}^2 + \hat{b}_{k,m}^2), \quad (9)$$

Аналогичным образом, как это было сделано в [7], введем в рассмотрение функции:

$$g_a(f, t) = w(t) \cos 2\pi f t, \quad (10)$$

$$g_b(f, t) = w(t) \sin 2\pi f t. \quad (11)$$

С учетом функций (10) и (11) получаем:

$$\hat{a}_{k,m} = \int_0^T z(t + (m-1)T_0) g_a(f_k, t) dt, \quad (12)$$

$$\hat{b}_{k,m} = \int_0^T z(t + (m-1)T_0) g_b(f_k, t) dt. \quad (13)$$

Длительности сегментов псевдоансамбля равны $T = LT_0$. Можно считать, что каждый такой сегмент состоит из L непересекающихся сегментов длительностью T_0 . Отметим, что для сегментов псевдоансамбля на рис. 1 $L = 3$. Тогда для (12) и (13) получаем:

$$\hat{a}_{k,m} = \sum_{l=1}^L \int_{(l-1)T_0}^{lT_0} z(t + (m-1)T_0) g_a(f_k, t) dt, \quad (14)$$

$$\hat{b}_{k,m} = \sum_{l=1}^L \int_{(l-1)T_0}^{lT_0} z(t + (m-1)T_0) g_b(f_k, t) dt. \quad (15)$$

На интервале времени анализа T_A будем иметь $N = M + L - 1$ неперекрывающихся сегментов длитель-

ностью T_0 . С учетом того, что $t_0 = 0$, границам этих сегментов, образующих m -ый сегмент псевдоансамбля, будут соответствовать моменты времени:

$$t_{l+m-1} = lT_0 + (m-1)T_0 = (l+m-1)T_0, \quad (16)$$

где $1 \leq m \leq M$ и $1 \leq l \leq L$.

С учетом (16) для (14) и (15) будем иметь:

$$\hat{a}_{k,m} = \sum_{l=1}^L \int_{t_{l+m-2}}^{t_{l+m-1}} z(t) g_a(f_k, t - (m-1)T_0) dt, \quad (17)$$

$$\hat{b}_{k,m} = \sum_{l=1}^L \int_{t_{l+m-2}}^{t_{l+m-1}} z(t) g_b(f_k, t - (m-1)T_0) dt. \quad (18)$$

Если принять, что $n = (l+m-1)$, то (16) определяет множество отсчетов времени для сегментов длительностью T_0 :

$$\{t_0 = 0; t_n = nT_0; 1 \leq n \leq N\}, \text{ где } t_N = T_A. \quad (19)$$

Тогда (17) и (18) примут вид:

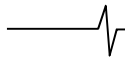
$$\hat{a}_{k,m} = \sum_{n=m}^{m+L-1} \hat{\alpha}_{k,n}, \quad (20)$$

$$\hat{b}_{k,m} = \sum_{n=m}^{m+L-1} \hat{\beta}_{k,n}, \quad (21)$$

$$\text{где } \hat{\alpha}_{k,n} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} z(t) g_a(f_k, t - t_m) dt, \quad (22)$$

$$\hat{\beta}_{k,n} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} z(t) g_b(f_k, t - t_m) dt. \quad (23)$$

Как следует из (22) и (23), задача свелась к вычислению оценок $\hat{\alpha}_{k,n}$ и $\hat{\beta}_{k,n}$, которые должны суммироваться согласно (20) и (21). Отметим, что оценки $\hat{\alpha}_{k,n}$ и $\hat{\beta}_{k,n}$ вычисляются на неперекрывающихся сегментах длительностью T_0 .



Рассмотрим вычисление оценок $\hat{\alpha}_{k,n}$ и $\hat{\beta}_{k,n}$. Для этого, как и в [7, 8] используем разработанную в [9] дискретно-событийную модель для представления результата бинарно-знакового стохастического квантования в дискретном виде. Она основана на том факте, что он может быть равен только «-1» и «+1», и смена этих значений во времени происходит последовательно. Согласно этой модели для результата бинарно-знакового стохастического квантования достаточно знать только одно значение $z(t_0)$, соответствующее начальному моменту времени квантования $t_0 = t_0^Z = 0$, и множество отсчетов времени $\{t_i^Z : 1 \leq i \leq (I-1)\}$, в которые на интервале времени анализа $T_A = T_I = NT_0$ происходит смена его значений. Следовательно, для n -ого сегмента достаточно знать значение $z(t_{n-1})$ и отсчеты времени t_i^Z на интервале $t_{n-1} \leq t \leq t_n$. В соответствии с этим для границ интервала $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ введем обозначения $t_{v(n)}^Z$ и $t_{v(n)+r(n)+1}^Z$, где индексы $v(n)$ и $r(n)$ являются целыми числами. Такие обозначения этих индексов показывает их зависимость от номера сегмента. Тогда для n -ого сегмента будем иметь множество отсчетов времени:

$$\{t_{v(n)+1}^Z, t_{v(n)+2}^Z, \dots, t_{v(n)+j}^Z, \dots, t_{v(n)+r(n)}^Z\} \in [t_{n-1}; t_n]. \quad (24)$$

Значения $z(t)$ равны «-1» или «+1». Поэтому интегралы в (22) и (23) с учетом (24) можно представить в виде суммы интегралов:

$$\hat{\alpha}_{k,n} = z(t_{n-1}) \sum_{j=0}^{r(n)} (-1)^j \int_{t_{v(n)+j}^Z}^{t_{v(n)+j+1}^Z} g_a(f_k, t - t_m) dt, \quad (25)$$

$$\hat{\beta}_{k,n} = z(t_{n-1}) \sum_{j=0}^{r(n)} (-1)^j \int_{t_{v(n)+j}^Z}^{t_{v(n)+j+1}^Z} g_b(f_k, t - t_m) dt. \quad (26)$$

Из (10) и (11) следует, что для непрерывной и интегрируемой по переменной времени оконной функцией $w(t)$ функции $g_a(f, t)$ и $g_b(f, t)$ также будут непрерывными и интегрируемыми по этой переменной. Поэтому существуют такие функции $G_a(f, t)$ и $G_b(f, t)$, для которых выполняется условия дифференцируемости [10]:

$$dG_a(t, f) = g_a(t, f) dt, \quad (27)$$

$$dG_b(t, f) = g_b(t, f) dt. \quad (28)$$

Исходя из (27) и (28), интегралы в (25) и (26) вычисляются аналитически:

$$\hat{\alpha}_{k,n} = z(t_{n-1}) \left(A_{k,n} - 2 \sum_{j=1}^{r(n)} (-1)^j G_a(f_k, t_{v(n)+j}^Z - t_m) \right), \quad (29)$$

$$\hat{\beta}_{k,n} = z(t_{n-1}) \left(B_{k,n} - 2 \sum_{j=1}^{r(n)} (-1)^j G_b(f_k, t_{v(n)+j}^Z - t_m) \right), \quad (30)$$

$$A_{k,n} = G_a(f_k, t_{v(n)}^Z - t_m) + (-1)^{r(n)} G_a(f_k, t_{v(n)+r(n)+1}^Z - t_m), \quad (31)$$

$$B_{k,n} = G_b(f_k, t_{v(n)}^Z - t_m) + (-1)^{r(n)} G_b(f_k, t_{v(n)+r(n)+1}^Z - t_m). \quad (32)$$

Введем обозначение $\Delta t_{v(n),j} = t_{v(n)+j}^Z - t_m$. Тогда:

$$\hat{\alpha}_{k,n} = z(t_{n-1}) \left(A_{k,n} - 2 \sum_{j=1}^{r(n)} (-1)^j G_a(f_k, \Delta t_{v(n),j}) \right), \quad (33)$$

$$\hat{\beta}_{k,n} = z(t_{n-1}) \left(B_{k,n} - 2 \sum_{j=1}^{r(n)} (-1)^j G_b(f_k, \Delta t_{v(n),j}) \right), \quad (34)$$

$$A_{k,n} = G_a(f_k, \Delta t_0) + (-1)^{r(n)} G_a(f_k, \Delta t_{v(n),r(n)+1}), \quad (35)$$

$$B_{k,n} = G_b(f_k, \Delta t_0) + (-1)^{r(n)} G_b(f_k, \Delta t_{v(n),r(n)+1}), \quad (36)$$

Соотношения (9), (20), (21) и (33)-(36) определяют вычислительные процедуры и последовательность их выполнения в процессе получения периодограммной оценки СПМ для m -го сегмента. Согласно (5) вычисляется усредненная модифицированная периодограммная оценка СПМ. Основу этих соотношений составляют операции сложения и вычитания значений функций $G_a(t, f)$ и $G_b(t, f)$ для дискретных частот $f_k = kf_0$ и $\Delta t_{v(n),j}$.

Результаты численных экспериментов

Соотношения (5), (9), (20), (21) и (33)-(36) стали основой разработки цифрового алгоритма, который был реализован в виде специализированного программного модуля. Экспериментальные исследования этого модуля проводились на основе имитационного моделирования процедуры бинарно-знакового стохастического квантования. При этом центрированная реализация сложного сигнала представляла собой модель следующего вида:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k^H \cos(2\pi f_k^H t + \varphi_k) + e(t). \quad (37)$$

В (37) приняты следующие обозначения:

- 1) A_k^H – нормированные амплитуды, значения которых задавались от нуля до единицы;
- 2) $f_k^H = f_k / 2F_{\max}$ – частоты гармонических составляющих, значения которые задавались от нуля до 0,5 и интерпретировались как нормированные относительно верхней граничной частоты F_{\max} диапазона оценивания СПМ.
- 3) φ_k – начальные фазы, значения которых задавались с использованием генератора равномерно распределенных величин из интервала $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$.

В качестве аддитивного шума $e(t)$ добавлялся белый шум, который генерировался с нулевым средним значением и дисперсией σ_e^2 .

В частности рассмотрим результат оценки СПМ, полученный для модели $x(t)$, которая содержала двенадцать гармонических составляющих, значения параметров которых приведены в табл. 1. При этом дисперсия шума $e(t)$ была равна единице. Применение оконных функций определяется видом анализируемого сигнала и задачей,

решаемой в ходе осуществления спектрального анализа [11-14]. Для примера на рис. 2 представлены нормированные оценки СПМ (normalized PSD estimates), вычисленные для этой модели с применением треугольного (Бартлетта) окна по одной, пяти, десяти и пятнадцати сегментам. Перекрытие сегментов составляло половину их длины.

Треугольное (Бартлетта) окно имеет вид:

$$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

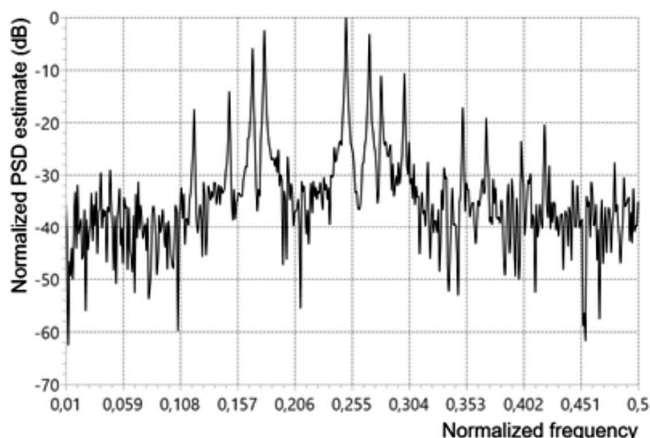
Функции $G_a(t, f)$ и $G_b(t, f)$ для треугольного (Бартлетта) окна равны:

$$G_a(f, t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f} - \frac{1}{T} \frac{\cos 2\pi ft}{(2\pi f)^2}.$$

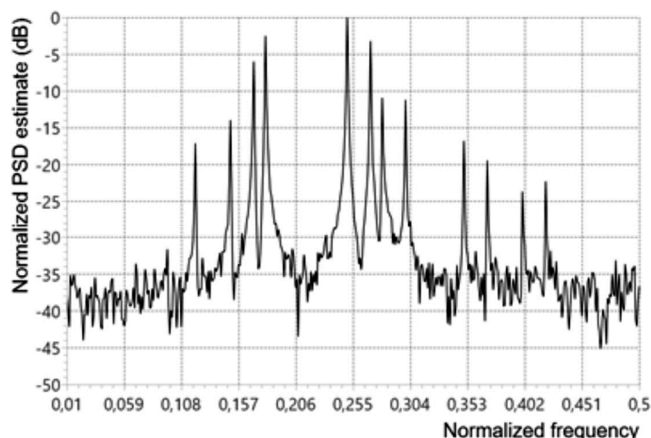
$$G_b(f, t) = -\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\cos 2\pi ft}{2\pi f} - \frac{1}{T} \frac{\sin 2\pi ft}{(2\pi f)^2}.$$

Значения параметров модели реализации $x(t)$

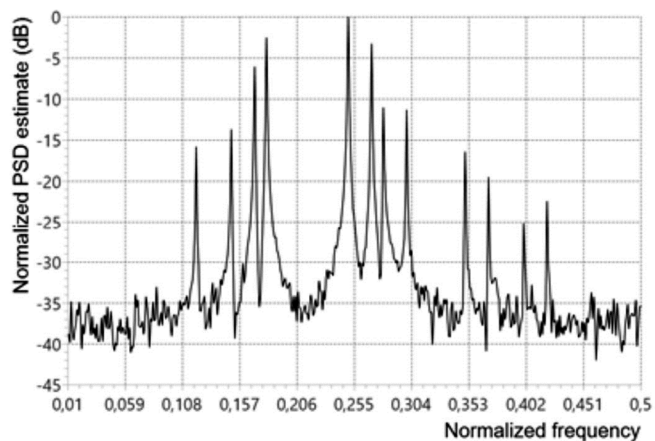
k	A_k^H	f_k^H	A_k^2 / A_{\max}^2 , дБ
1	0,15	0,12	-16,48
2	0,2	0,15	-13,98
3	0,5	0,17	-6,02
4	0,75	0,18	-2,50
5	1,0	0,25	0,00
6	0,7	0,27	-3,10



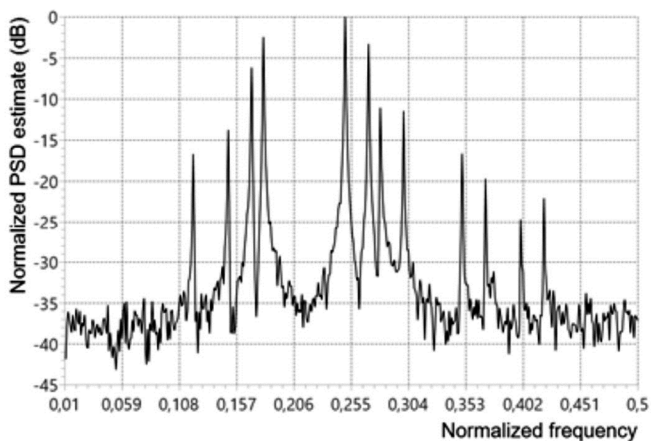
а) один сегмент



б) пять сегментов



в) десять сегментов



г) пятнадцать сегментов

Рис. 2. Нормированная оценка СПМ: треугольное (Бартлетта) окно

7	0,3	0,28	-10,46
8	0,25	0,3	-12,04
9	0,15	0,35	-16,48
10	0,1	0,37	-20,00
11	0,05	0,40	-26,02
12	0,07	0,42	-23,10

На графике оценки СПМ, вычисленной по одному сегменту, идентификация гармонических составляющих с малыми амплитудами затруднена. Наблюдается зашумление слабых гармонических составляющих. С увеличением числа обрабатываемых сегментов влияние аддитивного шума на оценку СПМ снижается и отчетливо прослеживается тенденция к её улучшению. Уже на графике оценки СПМ, вычисленной по пяти сегментам, имеется устойчивая идентификация гармонических составляющих, и их положение в спектре соответствует исходным значениям. Ложных спектральных линий нет. Результаты моделирования хорошо согласуются со значениями параметров гармонических составляющих, представленных в таблице.

Заключение

Разработано математическое обеспечение и соответствующее ему алгоритмическое обеспечение для оценки СПМ на основе метода усредненных модифицированных периодограмм. При этом формирование псевдоансамбля подлежащих обработке сегментов осуществляется с применением бинарно-знакового стохастического

квантования реализации анализируемого сигнала. Использование данного вида квантования позволило осуществить аналитическое вычисление интегральных операций при переходе от аналоговой формы модифицированных периодограмм к их вычислению в дискретном виде. Результатом такого интегрирования стали функции $G_a(t, f)$ и $G_b(t, f)$, и вычисление оценки СПМ свелось к дискретной обработке этих функций, основными операциями которой являются операции сложения и вычитания. При этом практически исключено выполнение операций умножения, что повышает вычислительную эффективность спектрального анализа. Отметим, что функции $G_a(t, f)$ и $G_b(t, f)$ являются аналитическими, и их вид определяется только видом применяемых оконных функций. Поэтому набор таких функций может быть сформирован аналитически в зависимости от требований, предъявляемых к спектральному анализу. Разработанное математическое и алгоритмическое обеспечение может найти применение при разработке прикладного программного обеспечения многофункциональных систем для статистического анализа сложных сигналов [15, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00228-а).

Литература

1. Oppenheim A.V. Discrete-time signal processing: Third edition / A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer – Pearson Higher Education, 2010. – 1108 p.
2. Marple, Jr.S.L. Digital spectral analysis with applications: Second edition / J.S.L. Marple – Dover Publications Inc, 2019. – 432 p.
3. Papadopoulos H.C. Sequential signal encoding from noisy measurements using quantizers with dynamic bias control / H.C. Papadopoulos, G.W. Wornell, A.V. Oppenheim // IEEE Transactions on information theory. – 2001. – Vol. 47, № 3. – P.978-1002. DOI: 10.1109/18.915654
4. Билинский И.Я. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов / И.Я. Билинский, А.К. Микельсон. – Рига: Зинатне, 1983. – 292 с.
5. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения / Г.Я. Мирский. – М.: Энергоиздат, 1982, – 320 с.
6. Max J. Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Т. 1: Principes generaux et methodes classiques / J. Max – Paris: Masson, 1996. – 354 p.
7. Якимов В.Н. Алгоритм вычисления оценки спектральной плотности мощности на основе обработки знаковых сигналов с использованием временных весовых функций / В.Н. Якимов, А.В. Машков // Цифровая обработка сигналов. – 2016. – № 4. – С. 3-8. http://www.dspsa.ru/articles/year2016/jour16_4/art16_4_1.pdf
8. Якимов В.Н., Машков А.В., Горбачев О.В. Цифровой гармонический анализ на основе метода усреднения Фурье-преобразования псевдоансамбля сегментов знакового сигнала // Цифровая обработка сигналов. – 2016. № 2. – С. 31-34.
9. Якимов В.Н. Цифровой комплексный статистический анализ на основе знакового представления случайных процессов / В.Н. Якимов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2016. – Т.18, №4(7). – С. 1346-1353.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. 8-изд. / Г.М. Фихтенгольц – М.: Физматлит, 2003. – 680 с.
11. Harris F.J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform / F.J. Harris // Proceedings of the IEEE. – 1978. – Vol. 66, № 1. – P. 51-83. DOI: 10.1109/PROC.1978.10837
12. Prabhu K.M.M. Window functions and their applications in signal processing / K.M.M. Prabhu – CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014. – 382 p.
13. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. – М.: Техносфера, – 2014. – 112 с.
14. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. Изд. 2-е. / В.П. Дворкович, А.В. Дворкович – М.: Техносфера, 2016. – 208 с.
15. Якимов В.Н., Горбачев О.В. Программно-аппаратное обеспечение системы оценки амплитудного спектра многокомпонентных процессов // Приборы и техника эксперимента. – 2013. – № 5. – С. 49-55.
16. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V. Bu-ka-nova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals // Proceedings of IEEE XXI International Conference on Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019. pp. 698-701.