

## АЛГОРИТМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponova@mail.ru;*

*Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: palexizh@gmail.com;*

*Смирнова Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkav@gmail.com*

## ALGORITHMS FOR PARAMETRIC FAST FOURIER TRANSFORM

*Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V.*

*Classical Fourier processing of finite information discrete signals (FID signals) is the most important method of digital analysis, modeling, optimization, improvement of control and decision making. The theoretical basis of classical Fourier processing of FID signals is the discrete Fourier transform (DFT). The practical basis of classical Fourier processing of FID signals is the Fast Fourier Transform (FFT). The practice of using classical Fourier processing of FID signals, having confirmed its effectiveness, revealed a number of negative effects inherent in this type of digital signal processing (DSP). The aliasing effect, scalloping effect, picket fence effect, significantly affect the effectiveness of analysis, modeling, optimization, improvement of management and decision making. To increase the efficiency of Fourier processing of FID signals, the authors of the paper have developed a generalization of DFT in the form of a parametric DFT (DFT-P). Since the direct application of parametric Fourier processing of FID signals (as well as the use of classical Fourier processing of FID signals) requires complex multiplications, fast procedures are required for the practical implementation of this type of FID signals. Purpose of the research is to develop algorithms for the fast parametric discrete Fourier transform (FFT-P). The work developed fast procedures for the implementation of DFT-P by time decimation. Parametric FFT-P with substitution (in place) and without substitution (no place) are proposed. The estimation of the efficiency of the FFT-P algorithms is given. The practical significance of the work is in the fact that developing algorithms for the parametric fast Fourier transform can reduce the computational costs of performing parametric discrete transformations by three or more orders of magnitude.*

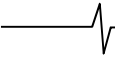
**Key words:** fast Fourier transform, finite signal, Fourier processing, problem, negative effects of discrete Fourier transform, basis, parametric DFT.

**Ключевые слова:** быстрое преобразование Фурье, финитный сигнал, Фурье-обработка, проблема, негативные эффекты дискретного преобразования Фурье, базис, варьируемый параметр.

## Введение

Классическая Фурье-обработка финитных информационных дискретных сигналов (ФИД сигналов) нашла самое широкое приложение в системном анализе, управлении и обработке информации. Данный вид обработки ФИД сигналов является важнейшим методом анализа, моделирования, оптимизации, совершенствования управления и принятия решений с целью повышения эффективности функционирования сложных объектов исследования [1-9]. Теоретической основой классической Фурье-обработки ФИД сигналов является дискретное преобразование Фурье (ДФФ) [10-17]. Практической основой классической Фурье-обработки ФИД сигналов являются быстрые алгоритмы реализации ДПФ – алгоритмы быстрого преобразования Фурье (алгоритмы БПФ). Практика применения алгоритмов БПФ, с одной стороны, подтвердила результативность преобразования ДПФ, с другой стороны, выявила проявление, ряда негатив-

Классическая Фурье-обработка финитных информационных дискретных сигналов (ФИД сигналов) является важнейшим методом цифрового анализа, моделирования, оптимизации, совершенствования управления и принятия решений. Теоретическая основа классической Фурье-обработки ФИД сигналов – дискретное преобразование Фурье (ДФФ). Практическая основа классической Фурье-обработки ФИД сигналов – быстрое преобразование Фурье (БПФ). Практика применения классической Фурье-обработки ФИД сигналов, подтвердив ее эффективность, выявила и ряд негативных эффектов присутствующих этому виду цифровой обработки сигналов (ЦОС). Эффект наложения (aliasing effect), гребешковый эффект (scalloping effect), эффект частоты (picket fence effect), существенно влияют на результативность анализа, моделирования, оптимизации, совершенствования управления и принятия решений. Для повышения эффективности и результативности Фурье-обработки ФИД сигналов авторами данной работы разработано обобщение теоретической основы классической Фурье-обработки – ДПФ в виде параметрического преобразования ДПФ (ДФФ-П). Поскольку непосредственное применение параметрической Фурье-обработки ФИД сигналов (как и применение классической Фурье-обработки ФИД сигналов) требует выполнения  $N^2$  комплексных умножений, то для практической реализации этого вида ФИД сигналов необходимы быстрые процедуры. Цель исследования: разработка алгоритмов быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье (БПФ-П). В работе разработаны быстрые процедуры реализации ДПФ-П прореживанием по времени. Предложены параметрические БПФ-П с замещением (in place) и без замещения (no place). Дана оценка эффективности алгоритмов БПФ-П. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанные алгоритмы параметрического быстрого преобразования Фурье позволяют сократить вычислительные затраты на выполнение параметрических дискретных преобразований на три и более порядков.



ных эффектов, присущих этому преобразованию [18-19]. Оказалось, что эффект наложения (*aliasing effect*), гребешковый эффект (*scalloping effect*), эффект частотола (*picket fence effect*) и эффект утечки (*leakage effect*), существенно влияют на результативность анализа и обработки информации. Для снижения влияния негативных эффектов ДПФ при Фурье-обработке ФИД сигналов было предложено их (ФИД сигналы) дополнять нулями (операция дополнения нулями – ОДН) [1-3, 20, 21]. Теоретические исследования подтвердили, что применение ОДН к ФИД сигналам (получение ФИД-ОДН сигналов), позволяет существенно снизить влияние негативных эффектов ДПФ при Фурье-обработке ФИД сигналов. Практическая же Фурье – обработка ФИД – ОДН сигналов выявила два существенных недостатка применения ОДН к ФИД сигналам: во-первых, необходимость обеспечения систем Фурье-обработки ФИД-ОДН сигналов значительным объемом дополнительной памяти, во-вторых, проведения непроизводительных вычислений с нулевыми отсчетами. В работах авторов [1, 2, 6] предложено обобщение ДПФ для обработки ФИД-ОДН сигналов в виде параметрических ДПФ (ДПФ-П). Однако, чтобы воспользоваться преимуществами, которыми обладают ДПФ-П в сравнении с ДПФ, необходимы быстрые процедуры реализации ДПФ-П, поскольку параметрические дискретные преобразования Фурье (как и дискретные преобразования Фурье) требуют выполнения  $N^2$  комплексных умножений.

**Цель исследования:** разработка быстрых процедур реализации параметрического дискретного преобразования Фурье – алгоритмов быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье с замещением и без замещения.

### Параметрическое дискретное преобразование Фурье

ДПФ-П может быть представлено в алгебраической форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}; \quad (1)$$

где  $x(n)$  – ФИД сигнал,  $n = \overline{0, N-1}$ ;  $W_N = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right]$  – параметрическая дискретная экспоненциальная функция (ДЭФ-П),  $k = \overline{0, N-1}$ ;  $0 \leq \theta < 1$ ;  $S_N(k, \theta)$  – коэффициенты ДПФ-П (параметрический спектр ФИД сигнала).

ДПФ-П может быть представлено в матричной форме:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} \cdot X_N; \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (2)$$

где  $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – представление ФИД сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в виде вектора  $N$ -мерного линейного пространства;  $T$  – знак транспонирования;  $S_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s(N-1, \theta)]^T$  – вектор коэффициентов разложения вектора  $X_N$  по системе параметрических ДЭФ (ДЭФ-П), задаваемой матрицей  $F_{N,\theta}$ :

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

Система параметрических ДЭФ (3) является полным, ортогональным параметрическим базисом ДПФ-П, свойства которого подробно рассмотрена в монографии [1, 2].

Обратное ДПФ-П (ОДПФ) также может быть представлено в двух формах – в алгебраической форме:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k, \theta) \cdot W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (4)$$

и в матричной форме:

$$X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (5)$$

где \* – символ комплексного сопряжения матрицы  $F_{N,\theta}$ ;

$$F_{N,\theta}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} & k \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_N^{-\theta} & W_N^{-(1+\theta)} & \dots & W_N^{-(N-1+\theta)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_N^{-(N-1)\theta} & W_N^{-(N-1)(1+\theta)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1+\theta)} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

Отметим, что матрицей  $F_{N,\theta}^*$  задается полный, ортогональный параметрический базис ОДПФ-П.

В силу того, что параметрические экспоненциальные базисы прямого (3) и обратного (6) ДПФ-П мультипликативны только по одной переменной, соответственно по переменной  $n$  и по переменной  $k$ , то существует только один класс алгоритмов БПФ-П и только один класс алгоритмов ОБПФ-П. Для алгоритмов БПФ-П это класс быстрых алгоритмов с *прореживанием по времени*. Для алгоритмов ОБПФ-П это класс быстрых алгоритмов с *прореживанием по частоте*. Идея алгоритмов БПФ-П и ОБПФ-П в матричной форме заключается в факторизации соответственно матриц  $F_{N,\theta}$  (3) и  $F_{N,\theta}^*$  (6). Напомним, что в теории матриц под факторизацией матриц понимается представление матриц в виде произведения слабозаполненных матриц (матриц, многие элементы которых нулевые). Рассмотрим алгоритм прямого параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени и без замещения (*no place*).

### Алгоритм прямого параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени и без замещения (*no place*)

Пусть  $N = r \cdot s$ , где  $r$  – простое число. В этом случае любую  $k$ -строку матрицы  $F_{N,\theta}$  можно представить в виде:





$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 W_8^0 & W_8^\theta & & & & & & \\
 & W_8^\theta & & & & & & \\
 & & W_8^0 & W_8^{(1+\theta)} & & & & \\
 & & & W_8^0 & W_8^{(2+\theta)} & & & \\
 W_8^0 & W_8^{(4+\theta)} & & & & & W_8^0 & W_8^{(3+\theta)} \\
 & & W_8^0 & W_8^{(5+\theta)} & & & & \\
 & & & W_8^0 & W_8^{(6+\theta)} & & & \\
 & & & & W_8^0 & W_8^{(7+\theta)} & & 
 \end{bmatrix} ; \\
 \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 1 & & W_8^{2\theta} & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & W_8^{2\theta} & 1 & W_8^{(2+2\theta)} & & & \\
 1 & W_8^{(4+2\theta)} & & & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} & \\
 & 1 & & W_8^{(4+2\theta)} & & & & \\
 & & 1 & & W_8^{(6+2\theta)} & & & \\
 & & & 1 & & W_8^{(6+2\theta)} & & 
 \end{bmatrix} ; \\
 \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 1 & & & W_8^{4\theta} & & & & \\
 & 1 & & & W_8^{4\theta} & & & \\
 & & 1 & & & W_8^{4\theta} & & \\
 1 & & & W_8^{(4+4\theta)} & & & & W_8^{4\theta} \\
 & 1 & & & W_8^{(4+4\theta)} & & & \\
 & & 1 & & & W_8^{(4+4\theta)} & & \\
 & & & 1 & & & W_8^{(4+4\theta)} & 
 \end{bmatrix} .
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 1 & & W_8^{2\theta} & & & & & \\
 & 1 & & W_8^{2\theta} & & & & \\
 & & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} & & & \\
 1 & -W_8^{2\theta} & & & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} & \\
 & 1 & & -W_8^{2\theta} & & & & W_8^{(2+2\theta)} \\
 & & 1 & & & -W_8^{(2+2\theta)} & & \\
 & & & 1 & & & -W_8^{(2+2\theta)} & \\
 & & & & 1 & & & -W_8^{(2+2\theta)} 
 \end{bmatrix} ; \\
 \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 1 & & & W_8^{4\theta} & & & & \\
 & 1 & & & W_8^{4\theta} & & & \\
 & & 1 & & & W_8^{4\theta} & & \\
 1 & & & -W_8^{4\theta} & & & & W_8^{4\theta} \\
 & 1 & & & -W_8^{4\theta} & & & \\
 & & 1 & & & -W_8^{4\theta} & & \\
 & & & 1 & & & -W_8^{4\theta} & 
 \end{bmatrix} .
 \end{matrix}$$

Введем условное обозначение базовой операции алгоритма прямого БПФ-П с прореживанием по времени («бабочки прямого БПФ-П») (рис. 1):

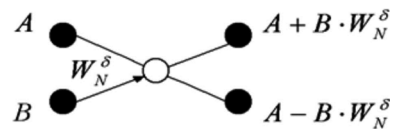


Рис. 1. Условное обозначение базовой операции алгоритма прямого параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени

Отметим, что матрицы  $F_{8,\theta}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  приведены с минимальными фазами. Представим каждый из этапов умножения вектора на матрицу (15) в виде двухдольного направленного графа. Поскольку матрицы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  являются слабозаполненными, то многие дуги двухдольного направленного графа отсутствуют. Объединение двухдольных направленных графов представляет собой направленный граф – алгоритм прямого параметрического быстрого преобразования Фурье без замещения (*no place*).

С учетом того, что  $W_8^0 = 1$ ,  $W_8^{(4+\theta)} = -W_8^{0+\theta}$ ,  $W_8^{(5+\theta)} = -W_8^{(1+\theta)}$ , ...,  $W_8^{(7+\theta)} = -W_8^{(3+\theta)}$ ,  $W_8^{(4+2\theta)} = -W_8^{2\theta}$ ,  $W_8^{(6+2\theta)} = -W_8^{(2+2\theta)}$ ,  $W_8^{(4+4\theta)} = -W_8^{4\theta}$  представим матрицы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  в следующем виде:

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
 1 & & & & & & & \\
 & W_8^\theta & & & & & & \\
 & & 1 & W_8^{(1+\theta)} & & & & \\
 & & & W_8^{(1+\theta)} & & & & \\
 1 & -W_8^\theta & & & 1 & W_8^{(2+\theta)} & & \\
 & & & & & & & 1 & W_8^{(3+\theta)} \\
 1 & & & & & & & & 1 & W_8^{(3+\theta)} \\
 & 1 & -W_8^\theta & & & & & & & \\
 & & & 1 & -W_8^{(1+\theta)} & & & & & \\
 & & & & & 1 & -W_8^{(2+\theta)} & & & \\
 & & & & & & & 1 & -W_8^{(3+\theta)} & 
 \end{bmatrix} ;
 \end{matrix}$$

С учетом «бабочки БПФ-П» и того, что  $W_8^0 = 1$ ,  $W_8^{(4+\theta)} = -W_8^{0+\theta}$ ,  $W_8^{(5+\theta)} = -W_8^{(1+\theta)}$ , ...,  $W_8^{(7+\theta)} = -W_8^{(3+\theta)}$ ,  $W_8^{(4+2\theta)} = -W_8^{2\theta}$ ,  $W_8^{(6+2\theta)} = -W_8^{(2+2\theta)}$ ,  $W_8^{(4+4\theta)} = -W_8^{4\theta}$  на рис. 2 приведен направленный граф алгоритма прямого параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени и без замещения (*no place*).

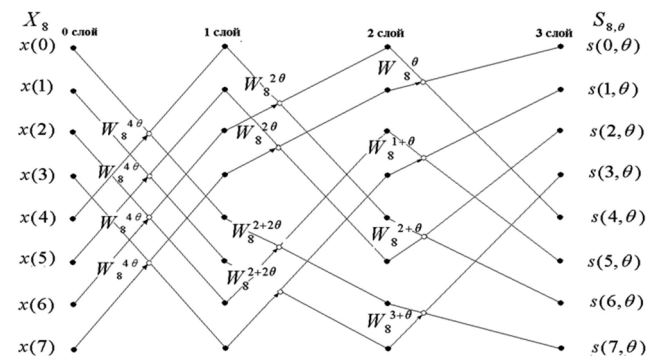


Рис. 2. Граф алгоритма прямого БПФ-П с прореживанием по времени и без замещения (естественный порядок отсчетов на входе и выходе алгоритма)

Преимуществом предложенного алгоритма БПФ-П является естественный порядок отсчетов спектра ДПФ-П на выходе алгоритма. Недостатком данного алгоритма является необходимость оперативной памяти для хра-

нения, как входного сигнала, так и спектра. Рассмотрим алгоритм прямого БФФ-П с прореживанием по времени и с замещением, который требует в два раза меньших затрат памяти, поскольку выходной массив формируется на месте входного массива.

### Алгоритм прямого параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени и с замещением (*in place*)

Пусть задан дискретный временной сигнал  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $N = 2^r$ ,  $r = 2, 3, \dots$ . Разделим реализацию временного ряда  $x(n)$  на две  $N/2$  – точечные последовательности  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , которые состоят из четных и нечетных членов  $x(n)$ , соответственно:

$$x_1(n) = x(2n); \quad x_2(n) = x(2n+1); \quad n = \overline{0, N/2-1}. \quad (17)$$

ДПФ-П последовательности  $x(n)$  (1):

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1};$$

представим в следующем виде:

$$S(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{2n\theta} \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_N^{(2n+1)\theta} \cdot W_N^{(2n+1)k}.$$

Поскольку  $W_N^2 = W_{N/2}$ , то:

$$S(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{n\theta} \cdot W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot W_N^\theta \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{n\theta} \cdot W_{N/2}^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{(k+\theta)n} + W_N^k \cdot W_N^\theta \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{(k+\theta)n}.$$

Следовательно, преобразование (4) может быть получено из результатов двух ДПФ-П двух последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ :

$$S(k, \theta) = S_1(k, \theta) + W_N^k \cdot W_N^\theta \cdot S_2(k, \theta), \quad k = \overline{0, N/2-1},$$

где  $S_1(k, \theta)$  и  $S_2(k, \theta)$  – ДПФ-П последовательностей  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , соответственно.

Поскольку  $W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$  для  $k = \overline{N/2, (N-1)}$ , то:

$$S(k, \theta) = S_1[(k - N/2), \theta] - W_N^{(k-N/2)} \cdot W_N^\theta \cdot S_2[(k - N/2), \theta], \quad k = \overline{0, N/2-1}.$$

Данная процедура может быть продолжена до получения двухточечных ДПФ-П. Граф, иллюстрирующий измерения спектра данным алгоритмом для  $N = 2^3 = 8$ , приведен на рис. 3.

Поскольку порядок коэффициентов ДПФ-П на выходе алгоритма является двоично-инверсным, то необходим дополнительный алгоритм для упорядочивания коэффициентов ДПФ-П в естественном порядке. Это несколько усложняет алгоритм данного вида. Преимуществом

этого вида алгоритма БФФ-П является меньшая требуемая оперативная память, по сравнению с алгоритмом БФФ-П без замещения.

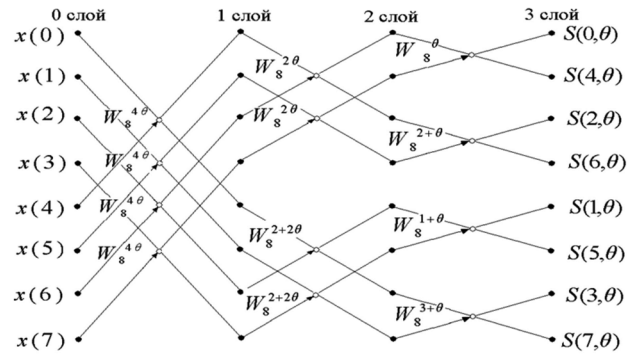


Рис. 3. Граф алгоритма прямого БФФ-П с прореживанием по времени и с замещением (естественный порядок отсчетов на входе алгоритма, двоично-инверсный порядок отсчетов на выходе алгоритма)

### Эффективность алгоритма параметрического быстрого преобразования Фурье

Непосредственная реализация прямого ДПФ-П как в алгебраической (1), так и в матричной (2) формах требует выполнения  $N^2$  комплексных умножений. Очевидно, что ДПФ-П крайне неэффективно.

Применение алгоритмов прямого БФФ-П позволяет резко сократить число комплексных операций при вычислении ДПФ-П. Из материалов, изложенных в предыдущих разделах настоящей статьи, непосредственно следует, что число комплексных умножений в алгоритмах БФФ-П равно  $(N \log_2 N)/2$ . Сокращение числа умножений в алгоритмах БФФ-П в сравнении с непосредственной реализацией ДПФ-П достигает значительных величин. Например, при  $N = 8192$  применение алгоритма БФФ-П позволяет сократить число комплексных умножений более чем в 1200 раз.

Сокращение числа умножений в алгоритмах БФФ-П в сравнении с непосредственным вычислением ДПФ-П иллюстрируется рис. 4.

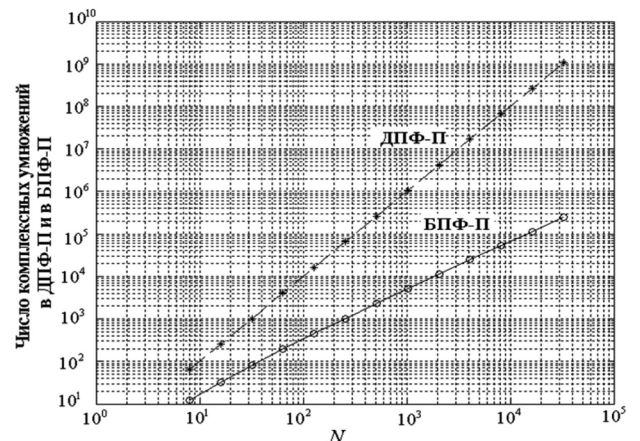


Рис. 4. Число комплексных умножений при реализации прямого ДПФ-П и реализации прямого БФФ-П

В настоящее время, в связи с развитием цифровых технологий, выполнение комплексных умножений не составляет основную долю объема вычислений при аппаратной реализации алгоритма БФФ. Учитывая

структуры базовой операции БПФ-П, структуры их направленных графов, аналогичное утверждение справедливо и для аппаратурной реализации быстрых параметрических дискретных преобразований Фурье. При этом важным показателем эффективности при аппаратурной реализации алгоритмов БПФ-П становится общий объем выполняемых действительных умножений и сложений.

Вычислительные затраты на выполнение стандартного  $N$ -точечного комплексного ДПФ-П по основанию 2 равны  $N^2$ . Поскольку комплексное умножение требует выполнения четырех действительных умножений и двух действительных сложений, то вычислительные затраты на выполнение стандартного  $N$ -точечного комплексного ДПФ-П по основанию 2 равны  $4N^2$  действительных умножений и  $2N(N-1)$  действительных сложений. Поскольку каждая базовая операция БПФ-П требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений, то выполнение одной базовой операции БПФ-П потребует выполнения четырех действительных умножений и шести действительных сложений. Таким образом, вычислительные затраты на выполнение стандартного  $N$ -точечного комплексного БПФ-П по основанию 2 равны  $2N \log_2 N$  действительных умножений и  $3N \log N$  сложений.

Несложно установить, что выигрыш в числе действительных умножений и действительных сложений, выполняемых при БПФ-П по отношению к числу действительных умножений и действительных сложений ДПФ-П, определяется соотношением:

$$\gamma = \frac{\text{Сумма действительных умножений и сложений при ДПФ-П}}{\text{Сумма действительных умножений и сложений при БПФ-П}} = \frac{10N-6}{5 \log_2 N}$$

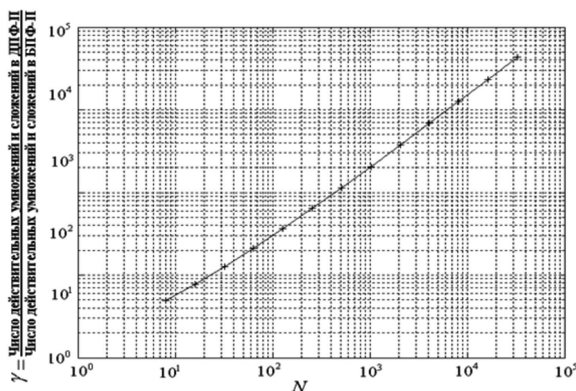


Рис. 5. Отношение числа действительных умножений и сложений при реализации ДПФ-П к числу действительных умножений и сложений при реализации БПФ-П

Например, при  $N = 8192$  применение алгоритма БПФ-П позволяет сократить число действительных умножений и сложений более чем в 1250 раз.

## Заключение

Классическая Фурье-обработка финитных информационных дискретных сигналов, основанная на теории дискретного преобразования Фурье как показала практика ее приложений, обладает кроме достоинств и рядом недостатков. Недостатки классической Фурье-обработки вытекают из свойств ее теоретической основы.

С целью повышения эффективности и результативности Фурье-обработки финитных информационных дискретных сигналов авторами статьи предложено ее обобщение – теория параметрической Фурье-обработки. Обобщение основано на смене теоретической и практической основы классической Фурье-обработки, а именно: применение теории параметрического дискретного преобразования Фурье и параметрического быстрого преобразования Фурье.

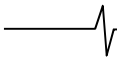
Непосредственная реализация параметрической Фурье-обработки финитных информационных дискретных сигналов (как и их классической Фурье-обработки) с некоторым числом отсчетов требует выполнения квадрата этого числа комплексных умножений. Для практической реализации параметрической Фурье-обработки финитных информационных дискретных сигналов необходимы быстрые процедуры ее реализации.

В работе разработаны алгоритмы параметрического быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени с замещением (*in place*) и без замещения (*no place*). Дана оценка эффективности алгоритмов параметрических быстрых преобразований Фурье.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанные алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье позволяют сократить вычислительные затраты на выполнение параметрических преобразований на три и более порядков.

## Литература

1. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ. 2016. – 172 с.
2. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т.17. – №1. – С. 71-77.
3. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. – 406 p.
4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. – 790 с.
5. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова, 2016. – Т.19. – № 2. – С. 80-83.
6. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис... д-ра техн. наук: 05.13.01. – Ижевск, 2016. – 357 с.
7. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т.17. – № 1. – С.88-94.
8. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов// Метрология. 2017. – №1. – С. 20-32.
9. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т.17. – №2. – С. 81-87.
10. Пономарева О.В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериио-



дического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве, 2014. – №1(23). С. 100-107.

11. Пономарев В.А, Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии, 2014. – Т.1. – №15. – С. 183-184.

12. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии, 2013. – Т.1. – №14. – С.121-124.

13. Пономарева О.В. Теоретико-вероятностные характеристики случайных дискретных информационных сигналов и аксиомы их измерения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т.17. – №2. – С. 73-80.

14. Пономарева Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 26-32.

15. Пономарева Н. В., Пономарева О.В., Хворенков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производ-

стве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 33-40.

16. Пономарева Н.В., Пономарева В.Ю. Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 15-18.

17. Пономарева Н.В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 4 (31). – С. 32-34.

18. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67-68.

19. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ им. М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 106-109.

20. Пономарева О.В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. – 2014. № 2(62). – С. 102-106.

21. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4<sup>th</sup> Ed. Published by Pearson. 2018. – 1168 p.