

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ СЛЕПОГО ФОРМИРОВАТЕЛЯ ЛУЧА С ЛИНЕЙНО ОГРАНИЧЕННОЙ МИНИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТЬЮ

*Полянин М.С., аспирант, начальник группы АО «ИСС», e-mail: polyaninm@mail.ru.*

### REGULARIZATION FOR THE BLIND LCMP BEAMFORMER

*Polyanin M.S.*

*In practice, the input data for a non-recursive adaptive algorithm is usually ill-conditioned or singular sample covariance matrix (SCM) that leads to an incorrect solution. Calculating the value of the regularization coefficient (RC) of the sample matrix is one of the key issues for ensuring reliable operation of the optimal beamformer of adaptive phased array in the equipment. The article discusses the existing methods for estimating the optimal value of the RC, suitable for a blind beamformer, which have different efficiency and complexity of hardware implementation. The results of modeling a narrow-band LCMP beamformer using linear shrinkage algorithms are presented.*

**Key words:** space-time adaptive processing (STAP), regularization procedure, LCMP beamformer, adaptive phased antenna array.

**Ключевые слова:** пространственно-временная адаптивная обработка (STAP), регуляризация, LCMP формирователь луча, адаптивная фазированная антенная решетка (АФАР).

#### Введение

ФЛ с линейно ограниченной минимальной мощностью (LCMP) является оптимальным «слепым» бимформером, который максимизирует отношение сигнал/(помеха+шум) выходного сигнала (ОСПШ<sub>вых</sub>) при условии известных обратной ковариационной матрицы (КМ) входного сигнала и матрицы ограничения направления прихода целевых сигналов. Вычислительная сложность и время расчета напрямую связаны с количеством каналов адаптивного фильтра  $p$  и количеством временных выборок  $K$ . Параметр  $p$  задает энергетические характеристики, пространственное разрешение и степень свободы адаптивного алгоритма в сигнальном пространстве. Параметр  $K$  можно варьировать, получая разную ошибку оценки КМ. В реальных условиях ФЛ работает с оценкой КМ при ограниченной выборке сигнала, несоответствиях углов прихода целевых сигналов и геометрии апертуры с неидеальной калибровкой. В результате деградирует коэффициент усиления результирующей диаграммы направленности ФЛ и, как следствие, отношение ОСПШ<sub>вых</sub> катастрофически уменьшается.

Существуют различные методы оценки КМ, повышающие надежность работы оптимального ФЛ:

1. Диагональное дополнение ([1], [2], [3], [4], [5]).
2. Вероятностная оценка ([6], [7], [8]).
3. Минимаксная оценка ([9], [10], [11], [12]).
4. Структурированная оценка ([13], [14]).
5. Гибридная оценка ([15], [16], [17], [18]).

В статье рассматривается одна из широко применяемых и эффективных методик для уменьшения влияния негативных факторов – введение в выборочную матрицу или выборочную корреляционную матрицу (ВКМ) КР

*Входными данными для нерекурсивного адаптивного алгоритма настройки АФАР обычно выступает плохо обусловленная или сингулярная выборочная ковариационная матрица (ВКМ), которая приводит к некорректному решению. Расчет коэффициента регуляризации (КР) является одним из ключевых вопросов для обеспечения надежной работы оптимального бимформера – формирователя луча АФАР. В статье рассмотрены существующие методики оценки оптимального значения КР, подходящие для слепого формирователя луча (ФЛ), имеющие разную эффективность работы и сложность аппаратной реализации. Приведены результаты моделирования узкополосного ФЛ с линейно ограниченной минимальной мощностью (LCMP) с применением алгоритмов линейной усадки.*

[19]. Расчет значения КР является нетривиальным из-за его зависимости от сигнально-помеховой обстановки. Одни методы привязывают КР к уровню шума ([20]), другие к квадратичному ограничению значения весовых коэффициентов (ВК) [19]. В [21] предлагается вычислять КР на основе собственных значений ВКМ.

В [22] для вычисления КР используется отношение BRR (beam-to-reference ratio), которое вычисляется через мощность сигнала опорного канала и сигнала луча. Таким образом, чтобы вычислить КР нужно оценить выходной сигнал адаптивного фильтра, а это увеличивает время вычисления весовых коэффициентов. К тому же байесовский подход для финальной оценки ВК делает алгоритм арифметически сложным для работы системы связи в режиме реального времени. В [23] рассмотрен алгоритм определения КР по критерию минимума функции ошибки модуля информационных символов (constant modulus, CM). Здесь исключается одновременная работа нескольких абонентов в луче и необходимо априорное знание значения модуля.

В работах [24], [25], [26], [27] представлены алгоритмы поиска оптимального значения КР методом гребневой регрессии (аналогичной идеи Тихонова) и методом регрессии на основе эмпирической оценки Байеса. Вычисление КР может быть произведено посредством оценки мощности целевого сигнала или используя оцен-

ку максимального правдоподобия сигнала [24]. Все решения основаны на априорном знании целевого сигнала или его статистических характеристиках и оценке посредством минимизации функции КР. Таким образом, в случае слепой работы бимформера применение данного класса алгоритмов представляется сложным.

Различные методы отличаются по арифметической сложности и использованию итерационных процедур, что влияет на скорость реакции при изменении окружающей среды. Нужно отметить, что разнообразие алгоритмов предназначено в основном для ФЛ Кэйпона (Caron beamformer), и такие методы (например [5]) не имеют смысла для LCMP.

Таким образом, большинство предложенных методов имеют зависимость от различных допущений и ограничений на конкретные ситуативные модели, а также в расчете на достаточно большую выборку и не могут быть использованы в «слепом» ФЛ.

### Формирователь луча с LCMP

Рассмотрению подлежит адаптивная ФАР, содержащая  $p$  антенных элементов для приема множества источников сигнала с разными пространственными координатами.  $\mathbf{R}_{xx}$  – КМ входного сигнального вектора  $\mathbf{x}$ , которая предполагается положительно определенной и определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^* + \mathbf{R}_{IN}, \quad (1)$$

где  $\sigma_i^2$  – мощность  $i$ -го целевого сигнала,  $\mathbf{v}_i$  – вектор направления прихода  $i$ -го целевого сигнала,  $\mathbf{R}_{IN}$  – ковариационная матрица помехи + шум,  $M$  – количество узкополосных целевых сигналов.

Сигнал на выходе бимформера определяется как

$$y(t) = \mathbf{W}^H \left[ \sum_{i=1}^M \mathbf{X}_{Si}(t) + \sum_{i=1}^{M_I} \mathbf{X}_{Ii}(t) + \mathbf{x}_n(t) \right], \quad (2)$$

где  $\mathbf{W}$  – весовой вектор,  $(\cdot)^H$  – оператор Эрмитова сопряжения,  $\mathbf{X}_{Si}(t)$  – матрица целевых сигналов,  $\mathbf{X}_{Ii}(t)$  – матрица сигналов помех,  $\mathbf{x}_n(t)$  – матрица, определяющая внутренний шум системы.

ФЛ LCMP эффективен для работы с априорным знанием направления прихода целевых сигналов и отсутствием информации о характере и структуре целевых сигналов [19] (например для адаптивной ФАР космического аппарата). Весовые коэффициенты LCMP алгоритма вычисляются в соответствии с выражением

$$\mathbf{W}_{LCMP}^H = \mathbf{g}^H \left[ \mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{g}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{C} \mathbf{g}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{C}$  задает линейные ограничения для формирования главного луча через вектор амплитуд  $\mathbf{g}$  и фаз  $\mathbf{C}$ .

$\mathbf{W}_{LCMP}^H$  вычисляется, минимизируя мощность выходного сигнала адаптивной ФАР, т.е.  $P_{\min} = \mathbf{W}_{LCMP}^H \times \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}_{LCMP}$ , при условии отсутствия искажений в суммарном целевом сигнале в соответствии с линейными ограничениями.

В реальных условиях ограничены вычислительные ресурсы бортовой аппаратуры (БА), геометрия апертуры и амплитудно-фазовая калибровка не идеальны. Задача состоит в том, чтобы максимизировать выходной ОСПШ<sub>вых</sub> в неблагоприятных условиях:

$$\text{ОСПШ}_{\text{вых}} = \mathbf{W}^H \mathbf{R}_s \mathbf{W} (\mathbf{W}^H (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n) \mathbf{W})^{-1}. \quad (4)$$

На практике истинное значение КМ неизвестно. Вместо этого используется неструктурированная оценка в виде ВКМ:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k), \quad (5)$$

где  $K$  – количество выборок.

### Регуляризация

Использование регуляризации в алгоритмах на основе прямых методов оценки ВК имеет ключевое значение [1], [19], [28]. Регуляризация, как математическая операция, необходима для решения обратной задачи нахождения наилучшей оценки обратной ВКМ

$$\mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{R}} \quad (6)$$

через преобразование в прямую задачу:

$$\mathbf{R}^{-1} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{p}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{p})$  – оператор искажения, преобразующий  $\mathbf{R}$  в  $\hat{\mathbf{R}}$ .

Дискретная задача наименьших квадратов определяется как:

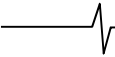
$$\min \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p})^2, \quad \hat{\mathbf{R}} \in A^{K \times p}, \quad K \geq p, \quad (8)$$

где  $\hat{\mathbf{R}}$  – плохо обусловленная ВКМ.

В настоящее время для линейных обратных задач применяются и развиваются линейные и нелинейные методы регуляризации [29]. Рассмотрению подлежат только линейные методы. Для таких задач были предложены различные прямые и итерационные методы численной регуляризации [30]. Прямые методы регуляризации: через усеченное SVD, метод Тихонова, неквадратическая регуляризация, статистическая, параметрическая.

Все методы заменяют некорректно поставленную задачу близкой корректной задачей, которая гораздо меньше чувствительна к возмущениям. Многие из методов аппроксимируют решение дискретной задачи регуляризации Тихонова. Процедура выбора КР приводит к существенному увеличению вычислительной нагрузки на аппаратуру и носит в той или иной степени итерационный характер.

В случае малой выборки, когда  $p \geq K$ , ВКМ не имеет обратной матрицы. При  $p \approx K$  ВКМ обращается, но плохо обусловлена и в процессе обращения оценка будет крайне недостоверной. Для бортовых ФЛ с количеством входов десятки и больше обеспечить приемлемое соотношение  $p/K$  в режиме реального времени зачастую не возможно. Интерес представляет ситуация с априорно неизвестной структурой ВКМ с оценкой далекой от истинной. Можно асимптотически приблизиться к оценке хорошо обусловленной ВКМ [3]. Один из способов получить хорошо обусловленную структурированную



ную оценку – это добавить искусственные данные с условием, что все дисперсии одинаковы, а все ковариации равны нулю.

$$\lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda \end{pmatrix}. \quad (9)$$

$\lambda \mathbf{I}$  – диагональная матрица с уровнем диагональных элементов  $\lambda$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Таким образом, оценка ВКМ (5) определяется следующим способом:

$$\mathbf{R}_{xx,r} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k) + \lambda \mathbf{I}. \quad (10)$$

Используя оптимальным образом рассчитанный КР, достигается лучшее ОСПШ<sub>вых</sub> и контроль над главным и боковыми лепестками. Как показано в [19], КР зависит от мощности шума и мощности помех. Таким образом отношение мощностей введённого КР и внутреннего шума (ОКРШ) будет определяться как:

$$ОКРШ = \frac{\lambda}{\sigma_n^2}. \quad (11)$$

Чтобы исключить эффект обнуления целевого сигнала должно выполняться условие:

$$ОКРШ \geq ОСШ + 10 \text{ dB}, \quad (12)$$

где ОСШ – отношение сигнал/шум целевого сигнала.

С другой стороны, чтобы получить удовлетворительное подавление помех, необходимо выполнять условие:

$$ОСШ - ОКРШ \geq 10 \text{ dB}. \quad (13)$$

Однако напрямую эти неравенства могут противоречить друг другу и несут эмпирический характер. В реальной обстановке априорное знание мощностей целевых сигналов и помех в слепом ФЛ исключено, поэтому необходимо на каждом проходе работы адаптивного алгоритма вычислять новое значение КР.

Метод регуляризации часто формально определяется как метод инверсии, зависящий от одного действительного параметра  $\lambda \geq 0$ , который дает семейство приближенных решений  $\tilde{\mathbf{R}}(\lambda)$  со следующими двумя свойствами: во-первых, для достаточно больших  $\lambda$  регуляризованное решение  $\tilde{\mathbf{R}}(\lambda)$  устойчиво на грани возмущений или шумов в данных (в отличие от обобщенного решения), и, во-вторых, когда  $\lambda$  стремится к нулю, восстанавливается нерегуляризованное обобщенное решение.

### Прямые методы регуляризации

#### Методы регуляризации на основе TSVD

Метод TSVD (truncated singular value decomposition) применяется для подавления шумовой составляющей и сохранения информации о сигналах, тем самым улучшая обусловленность ВКМ. Это достигается исключением компонентов решения, дающих наименьшие собственные значения (СЗ), полученные применением SVD (singular value decomposition). Алгоритмы использующие

TSVD известны под разными названиями: алгоритмы собственного разложения или собственного пространства [31], [32], алгоритм главных компонент, проекционный алгоритм [33] и др.

TSVD решение задачи определяется следующим образом:

SVD ВКМ  $\hat{\mathbf{R}}$ :

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T. \quad (14)$$

Получение инверсной усеченной матрицы  $\hat{\mathbf{R}}_m^{-1}$ :

$$\hat{\mathbf{R}}_m^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}_m^{-1} \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{\Sigma}_m^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_m^{-1}, 0, \dots, 0), \quad (15)$$

где  $m$  – размерность матрицы  $\hat{\mathbf{R}}$  после усечения с  $m$  не нулевыми СЗ,  $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_m^{-1}$  – обратные диагональные матрица СЗ до и после усечения соответственно,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  – левая и правая сингулярные матрицы.

Для данного метода следует разделить два случая [34]. Первый, когда ранг ВКМ определяется однозначно, и пороговое СЗ определяет коэффициент фильтрации в пространстве СЗ:

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} 1 & \text{for } \sigma_i \geq \sigma_m; \\ 0 & \text{for } \sigma_i < \sigma_m; \end{cases} \quad (16)$$

$\sigma$  – вектор матрицы СЗ  $\mathbf{\Sigma}$ .

Решение переписывается как:

$$\hat{\mathbf{R}}_m^{-1} = \sum_{i=1}^l \mathbf{f}_i^{(m)} \frac{\mathbf{u}_i^* \mathbf{v}_i}{\sigma_i}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  столбцы матриц  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  соответственно.

Индекс усечения  $m$  и является параметром регуляризации. Он определяет насколько точно  $\hat{\mathbf{R}}_m$  аппроксимирует  $\mathbf{R}$  и чувствительно к величине ошибки  $\hat{\mathbf{R}}$ . В результате решение, хотя и устойчиво к шуму, не включает компоненты сигналов с низким ОСШ (как в исходном обобщенном решении).

Второй случай, когда ранг ВКМ не определяется вследствие низкого ОСПШ, 0 дБ или меньше. В этом случае предлагаются более сложные методы, определяющие оптимальное значение  $m$  и в дальнейшем использующие (16).

Также может использоваться более сложная характеристика фильтра СЗ, как например в [35] ([36]):

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} 1 & \text{for } \sigma_i \geq \sigma_k; \\ \sigma_i / \sigma_k & \text{for } \sigma_k > \sigma_i \geq \sigma_{kl}; \\ 0 & \text{for } \sigma_i < \sigma_{kl}. \end{cases} \quad (18)$$

При регуляризации Тихонова значения коэффициентов фильтра спадают подобно двухполюсному ФНЧ, где полюс располагается на  $\sigma_i = \lambda$ , где  $\lambda$  – положительный КР:

$$\mathbf{f}_i = \sigma_i^2 / (\sigma_i^2 + \lambda^2). \quad (19)$$

Регуляризация Лаврентьева основана на методе Тихонова. Коэффициенты фильтра вычисляются по следующей формуле [37]:

$$\mathbf{f}_i = \sigma_i / (\sigma_i + \lambda). \quad (20)$$

Таким образом, TSVD регуляризация требует следующих операций: SVD разложение выборочной матрицы,

расчет порога усечения  $\sigma_k$  ( $\sigma_{k1}$ ) с применением одного из алгоритмов оптимизации, вычисление  $\hat{\mathbf{R}}_m^{-1}$  через обратную операцию (15). Отсюда большая вычислительная сложность. Необходимым условием для получения хороших регуляризованных решений является выполнение дискретного условия Пикара [30], требующего чтобы коэффициенты Фурье, выраженные в терминах обобщенного SVD, в среднем затухали до нуля быстрее, чем обобщенные сингулярные значения.

#### Регуляризация Тихонова

Дискретная задача регуляризации Тихонова как решение минимизационной задачи записывается следующим образом [38]:

$$\hat{\mathbf{R}}_\lambda = \operatorname{argmin} \{ \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p})^2 + \lambda^2 \mathbf{L}\hat{\mathbf{R}}^2 \}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{L}$  обычно является либо единичной матрицей, либо хорошо обусловленной дискретной аппроксимацией некоторого производного оператора,  $\lambda$  – КР. Первый член – это норма невязки, которая присутствует в МНК. Второй, называется регуляризатором или «краевым ограничителем», вводящим априорную информацию об ожидаемом поведении  $\mathbf{R}$ . Регуляризация Тихонова с  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$  работает аналогично TSVD, в том смысле, что влияние сингулярных значений с более высоким индексом на решение ослабляется. Другое следствие этого сходства состоит в том, что когда  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ , решение Тихонова не пытается восстановить компоненты сигналов, которые под шумами. Решение Тихонова при  $\mathbf{L} \neq \mathbf{I}$  содержит компоненты сигналов под шумами и таким образом допускает экстраполяцию из данных.

#### Неквадратическая регуляризация

Метод Тихонова основан на добавлении квадратичного штрафа к стандартному критерию достоверности данных методом наименьших квадратов (и следовательно, квадратичному). Оно приводит к обратной фильтрации, которая является линейной функцией данных. Хотя такая линейная обработка желательна, поскольку она приводит к прямым и достаточно эффективным методам вычислений, она также является ограничивающей, поскольку возможны гораздо более лучшие результаты, если используются нелинейные методы.

Обобщенная неквадратичная оценка

$$\hat{\mathbf{R}}_\lambda = \operatorname{arg min} J_1(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}}) + \lambda^2 J_2(\mathbf{R}), \quad (22)$$

где  $J_1(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}})$  представляет собой общую меру расстояния между истинной и её предсказанием на основе ВКМ, а  $J_2(\mathbf{R})$  – обобщенный штраф за регуляризацию. Оба члена могут быть не квадратичной функцией элементов  $\mathbf{R}$ . Далее рассматривается ряд популярных вариантов для  $J_1$  и  $J_2$ .

Широко используемый подход неквадратичной регуляризации – это *метод максимальной энтропии*. Энтропия положительной матрицы  $\mathbf{R}$  служит мерой ее неопределенности и может быть определена как:

$$-J_2(\mathbf{R}) = -\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \log(\mathbf{R}_i). \quad (23)$$

Эта интерпретация следует из соображений теории информации, когда ВКМ нормализована так, что

$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i = 1$ , и, таким образом, может интерпретироваться как функция плотности вероятности [39]. В этом случае решение с максимальной энтропией является самым неопределенным в отношении недостающей информации. Более простая мотивация использования критерия энтропии заключается в том, что он обеспечивает положительные решения. Комбинирование стоимости энтропии (23) со стандартным квадратичным членом точности данных для  $J_1$  дает максимальную оценку энтропии:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{мэ}}(\lambda) = \operatorname{arg min} \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p})^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \log(\mathbf{R}_i). \quad (24)$$

Существует ряд вариантов этой идеи, включающих связанные определения энтропии, кросс-энтропии и дивергенции [39]. Этот метод обеспечивает реконструкцию ВКМ с большей концентрацией энергии (т.е. большинство коэффициентов маленькие, а некоторые очень большие) относительно квадратичных Тихоновских подходов. Сложность формулировки (24) заключается в том, что она приводит к нелинейной задаче оптимизации решения, которую необходимо решать итеративно.

Еще одно неквадратическое краевое ограничение – *регуляризация общей дисперсии*. Мера общей дисперсии:

$$J_2(\mathbf{R}) = \mathbf{D}\mathbf{R}_1 - \sum_{i=1}^N \left| [\mathbf{D}\mathbf{R}]_i \right|, \quad (25)$$

где  $\| \cdot \|_1$  обозначает 1-норму (сумма абсолютных значений элементов), а  $\mathbf{D}$  представляет собой дискретное приближение к оператору градиента, так что элементы  $\mathbf{D}\mathbf{R}$  представляют собой просто изменения мощности. Полная оценка дисперсии получается объединением уравнения (25) со стандартным квадратичным членом достоверности данных для  $J_1(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{R}})$ :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{од}}(\lambda) = \operatorname{arg min} \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p})^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^N \left| [\mathbf{D}\mathbf{R}]_i \right|. \quad (26)$$

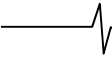
Общая дисперсия сигнала это общая сумма изменений и её можно рассматривать как меру изменчивости сигнала. Таким образом, она хорошо подходит для использования в качестве краевого ограничения. Трудность использования (26) заключается в том, что необходимо проводить нелинейную оптимизацию с итеративным подходом.

#### Статистические методы

Если шум  $\mathbf{n}$  и неизвестную  $\mathbf{R}$  рассматривать как случайные сигналы, то можно найти максимальную апостериорную оценку  $\mathbf{R}$ , максимизирующую апостериорную плотность вероятности  $p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}})$ . Используя правило Байеса и логарифмирование, имеем оценку:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{ов}} = \operatorname{arg max} p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}}) = \operatorname{arg max} (\ln[p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}})] + \ln[p(\mathbf{R})]). \quad (27)$$

Эта функция стоимости имеет два члена: зависимый от данных  $\ln[p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}})]$ , называемый функцией логарифмического правдоподобия, и член  $\ln[p(\mathbf{R})]$ , зависящий только от  $\mathbf{R}$ , называемый априорной моделью. Эти два



члена аналогичны двум членам в функционале Тихонова (21). Функция правдоподобия фиксирует зависимость данных от матрицы сигналов и обеспечивает точность данных в формуле (27). Член априорной модели фиксирует априорные знания об  $\mathbf{R}$  при отсутствии данных и позволяет включить эту информацию в оценку.

Для стохастических сигналов с гауссовским распределением:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{X} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{A}_n), \quad \mathbf{X} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{R}), \quad (28)$$

где  $\hat{\mathbf{X}} \sim \mathbf{N}(m, \mathbf{R})$  обозначает, что  $\hat{\mathbf{X}}$  – гауссовская случайная матрица со средним  $m$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{R}$ . При этих предположениях:

$$\ln[p(\mathbf{X}|\hat{\mathbf{X}})] \propto -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{X}_{\mathbf{R}_n^{-1}}^2 \quad \text{и} \quad \ln[p(\mathbf{X})] \propto -\frac{1}{2} \mathbf{X}_{\mathbf{R}^{-1}}^2,$$

а после подстановки в уравнение (27) получаем:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{co}} = \arg \min(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{X}_{\mathbf{R}_n^{-1}}^2 + \mathbf{X}_{\mathbf{R}^{-1}}^2). \quad (29)$$

Соответствующая система нормальных уравнений, определяющая статистическую оценку,

$$(\mathbf{A}(\mathbf{p})^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{p}) + \mathbf{R}^{-1}) \hat{\mathbf{X}}_{\text{co}} = \mathbf{A}(\mathbf{p})^T \mathbf{R}_n^{-1} \hat{\mathbf{X}}. \quad (30)$$

Решение уравнения (30) также является обобщенной (негауссовской) оценкой линейной минимальной среднеквадратичной ошибки (MMSE). Оценка MMSE минимизирует  $E[\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{\text{co}}]^2$ , где  $E[*]$  обозначает математическое ожидание выражения в скобках.

Статистический метод обеспечивает рациональный способ расчета оценки ВКМ, если объединить статистическое описание процесса наблюдения и априорной информации вместе с мерами неопределенности физическим моделированием.

### Итерационные методы

Итерационные подходы [40], [41] позволяют избежать процедур факторизации, требующей большого объема памяти, что критично для очень больших задач. Многие итерационные схемы естественным образом распараллеливаются и, таким образом, могут быть легко реализованы на ПЛИС для увеличения скорости. Причина, по которой происходит регуляризация в итерационных алгоритмах, заключается в том, что низкочастотные компоненты решения стремятся сходиться быстрее, чем высокочастотные компоненты (большие значения индекса  $i$  SVD разложения подобны высокочастотным коэффициентам Фурье соответствующих элементов). Для итерационных схем количество итераций играет роль, обратную параметру регуляризации  $\lambda$ , поэтому меньшее количество итераций соответствует большей регуляризации (большему  $\lambda$ ).

Метод сопряженных градиентов (МСГ) – это хорошо известный метод решения разреженных систем уравнений с симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов. Это самый быстрый из всех методов подпространства Крылова. Методы, использующие подпространства Крылова, ориентированные на матрицы больших размерностей, избегают матрично-матричные операции, за счет умножения матрицы на вектор. Для уравнения  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{R}}$  в подпространстве Крылова номер итерации МСГ, на которой оста-

навливается расчет, играет роль КР.

Решение  $\mathbf{x}^k$  после  $k$  шагов МСГ может быть определено как:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{cr}} = \min \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{R}_2, \quad (31)$$

при условии  $\mathbf{R} \in K_k(\mathbf{A}^T \mathbf{A}, \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{R}})$ .

Альтернативный итерационный алгоритм, который не использует в явном виде  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \text{LSQR}$  [42].

Алгоритм масштабирования проекции [20] – это вариант компенсации несоответствия оценки  $\hat{\mathbf{R}}$  рекурсивным способом. Выражение для вычисления вектора весовых коэффициентов следующее:

$$\mathbf{w}_{lms_r}(t+1) = \mathbf{w}_c + \tilde{\mathbf{P}}_c [\mathbf{w}_{lms_r}(t) - \mu(\hat{\mathbf{R}}(t) + \sigma_r^2 \mathbf{I}) \mathbf{w}_{lms_r}(t)]. \quad (32)$$

Избегая использовать  $\sigma_r^2$ , применяется критерий  $\sigma_r$ :

$$\mathbf{w}_{lms_{gr}}(t+1) = \mathbf{w}_c + \tilde{\mathbf{P}}_c [\mathbf{v}_{lms_r}(t) - \mu \hat{\mathbf{R}}(t) \mathbf{w}_{lms_r}(t)], \quad (33)$$

где на каждой итерации составляющая проекции  $\mathbf{w}_{lms_r}$  на нуль пространство вектора ограничений  $\mathbf{C}^* - |\tilde{\mathbf{v}}|^2$  сравнивается с функцией  $f(\sigma^2)$  и при превышении порога масштабируется.

Данный способ ограничения применяется в LMS алгоритмах, которые при низкой арифметической сложности имеют большое время схождения и большую остаточную ошибку. Также при большом числе обусловленности  $\hat{\mathbf{R}}$  нельзя применить этот алгоритм. Масштабирование составляющей  $\mathbf{v}$  происходит исходя из уровня белого шума, заданного заранее. Как таковые величины ОСШ и отношение помеха/шум (ОПШ) на решение не влияют. На каждой итерации нужно находить  $\hat{\mathbf{R}}(t)$ , сохраняя при этом предыдущее значение  $\hat{\mathbf{R}}(t-1)$ . Анализ этого способа для прямого метода оценки ВК ФЛ проводится в работе [43]. Показано, что результат при больших ОСШ (уже около 0 дБ) неудовлетворительный.

### Выбор коэффициента регуляризации

Методы можно условно разделить на два типа в зависимости о знании об априорной ошибке  $\|e_2\|$ . Эти два типа можно охарактеризовать следующим образом:

1. Методы, основанные на знании или хорошей оценке  $\|e_2\|$ .

2. Методы, которые не требуют знания априорной ошибки.

Регуляризация, не допуская усиления шума, включает компромисс между точностью входных выборок и точностью некоторого набора априорной информации. Эти два компонента обычно измеряются через норму невязки  $\|\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{R}\|$  и норму ограничения  $\|\mathbf{L}\hat{\mathbf{R}}\|$ . КР  $\lambda$  контролирует этот компромисс, и важной частью решения любой проблемы является поиск разумного значения для  $\lambda$ .

Для поиска оптимального КР применяются следующие методы ([44], [45], [46], [35]): минимизация функции обобщенной перекрестной проверки (GCV – generalized cross-validation), основанной на минимизации ошибок прогнозирования; метод L-кривой, основанный на графике зависимости нормы невязки от нормы краевого

ограничения; метод невязки, основанный на априорной информации о параметрах шума; выбор статистических параметров, основанный на моделировании лежащих в их основе процессов. Метод невязки относится к первому типу, остальные ко второму.

*L-кривая* представляет собой график (для всех допустимых параметров регуляризации) нормы  $\|\mathbf{L}\hat{\mathbf{R}}\|$  регуляризованного решения в зависимости от соответствующей нормы невязки  $\|\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{R}\|$ . Таким образом, *L-кривая* показывает компромисс между минимизацией этих двух величин. Для непрерывного КР  $\lambda$  вычисляется кривизна кривой  $(\log A_{x_\lambda} - b_2, \log L_{x_{\lambda 2}})$  (с параметром  $\lambda$ ) и находится точка с максимальной кривизной.

Метод *минимизации GCV функции* основан на предположении, что если произвольный элемент  $\hat{\mathbf{R}}_i$  в правой части  $\hat{\mathbf{R}}$  опущен, то соответствующее регуляризованное решение должно хорошо предсказывать это наблюдение, и выбор параметра регуляризации не должен зависеть от ортогонального преобразования  $\hat{\mathbf{R}}$  [45]. Это приводит к выбору КР, который минимизирует функцию GCV:

$$G = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{R}_\lambda - \hat{\mathbf{R}}_2^2}{(\text{Tr}[\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^1])^2}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{A}^1$  – матрица, которая дает регуляризованное решение  $\mathbf{R}_\lambda = \mathbf{A}^1\hat{\mathbf{R}}$ .

Метод *невязки* Морозова [47] использует сведения о шуме  $\mathbf{n}$  в  $\mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{p}) + \mathbf{n} = \hat{\mathbf{R}}$ . Эта информация указывается в виде дисперсии:

$$\|\mathbf{n}\| \leq \delta_n. \quad (35)$$

Это дает оценку нормы невязки  $\|\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{R}\| \leq \delta$ . Поскольку недорегуляризация заключается в чрезмерном усилении шума, имеет смысл выбрать параметр регуляризации достаточно большим, чтобы выборочная ошибка достигла этой границы, но не больше (чтобы избежать перерегуляризованности). Формально параметр регуляризации  $\lambda$  выбирается как значение, при котором норма невязки достигает равенства

$$\|\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{A}(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{R}}(\lambda)\|^2 = \delta_n^2. \quad (36)$$

В детерминированном случае значение  $\lambda$  обычно приводит к чрезмерной регуляризации, поскольку фактическая ошибка может быть меньше заданного порога. И наоборот, установка слишком маленького порога шума может привести к нежелательному росту шума в решении. Пороговое значение шума может быть получено из физических соображений, априорной информации или прямой экспериментальной оценке. Если эта информация недоступна, то этот метод не применим.

Выбор статистических параметров не является методом выбора параметра, а скорее, методом оценки. При наличии статистической модели процесса наблюдения через  $p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R})$  и априорной информации о  $\mathbf{R}$  через  $p(\mathbf{R})$  оценка  $\hat{\mathbf{R}}_{\text{co}}$  получается путем решения задачи оптимизации (27). Со статистической точки зрения про-

блема определения параметра регуляризации заменяется проблемой статистического моделирования посредством определения  $p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R})$  и  $p(\mathbf{R})$ . Компромисс между входными данными и априорными, присущий выбору КР  $\lambda$ , фиксируется при моделировании относительной неопределенности в матрицах  $\hat{\mathbf{R}}$  и  $\mathbf{R}$ . Иногда плотности  $p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R})$  и  $p(\mathbf{R})$  следуют из физических соображений или прямого эксперимента.

Для некоторых задач определение плотностей  $p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R})$  и  $p(\mathbf{R})$  может оказаться сложной задачей. К счастью, цель обычно состоит не в том, чтобы наиболее точно смоделировать матрицу  $\mathbf{R}$  или ВКМ  $\hat{\mathbf{R}}$ , а скорее в том, чтобы найти общую статистическую модель, которая даёт хорошую оценку. Кроме того, статистический характер этой модели может предполагать рациональный выбор параметров, не очевидных с точки зрения регуляризации Тихонова.

О методах поиска КР можно ознакомиться в работе [48], где представлено описание пакета «REGULARIZATION TOOLS» для Matlab используемого для анализа и решения дискретных некорректных задач.

#### Алгоритмы на основе метода линейной усадки

Метод усадки ВКМ к единичной матрице (ЕМ) LW (O. Ledoit, M. Wolf) описан в [3] для произвольного вида функции распределения выборок. Он рассчитывает коэффициенты оптимальной линейной комбинации в соответствии с квадратичной функцией потерь (квадратичная оптимизация). Истинный оптимальный вес заменяется согласованной оценкой. Ищется линейная комбинация ЕМ и ВКМ как компромисс между смещением и дисперсией за счет встречной усадки, в результате чего получается оценка, чья среднеквадратичная ошибка минимальна:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\rho}\hat{\mathbf{F}} + (1 - \hat{\rho})\hat{\mathbf{R}}, \quad (37)$$

$\hat{\rho}$  – коэффициент усадки, принимающий значения от 0 до 1 и может быть выборочной функцией. Матрица  $\hat{\mathbf{F}}$  называется целью усадки:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mu\mathbf{I} = \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}})}{p}\mathbf{I}. \quad (38)$$

$\text{Tr}(\cdot)$  – след матрицы,  $\mathbf{I}$  – ЕМ.

$\hat{\mathbf{R}}$  является несмещенной оценкой и решением максимального правдоподобия при  $K \geq p$ . Однако не достигает низкого MSE из-за его высокой дисперсии и обычно плохо подходит для  $K < p$ . С другой стороны  $\hat{\mathbf{F}}$  – наивная, но наиболее хорошо обусловленная оценка. Оптимизационная проблема имеет вид:  $\min_p E[\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}^2]$ .

СКО можно разложить на дисперсионную ошибку и ошибку смещения:

$$E[\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}^2] = E[\tilde{\mathbf{R}} - E[\tilde{\mathbf{R}}]]^2 + E[E[\tilde{\mathbf{R}}] - \mathbf{R}^2]. \quad (39)$$

СКО цели усадки  $\mu\mathbf{I}$  представляет собой смещение без дисперсии, в то время как для СКО ВКМ –  $\hat{\mathbf{R}}$  представляет собой дисперсию без смещения. Точка компромисса показана на рис. 1.

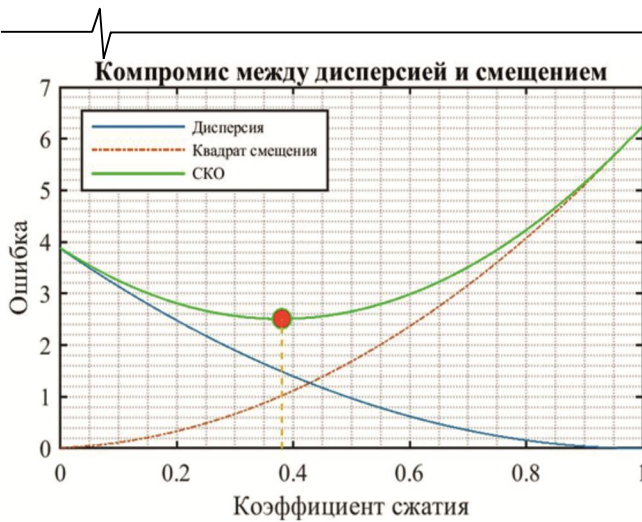


Рис. 1. Точка компромисса между дисперсионной ошибкой и ошибкой смещения

Оценка коэффициента усадки находится следующим образом:

$$\hat{\rho}_{LW} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i x_i^T - \hat{\mathbf{R}}_F^2}{k^2 \left[ \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}^2) - \frac{\text{Tr}^2(\hat{\mathbf{R}})}{p} \right]} \quad (40)$$

Методы RBLW (Rao-Blackwell Ledoit-Wolf) и OAS (Oracle Approximating Shrinkage) [4] разработаны на методе LW [3] для случая Гауссовского распределения выборок. Оценка  $\hat{\rho}_{LW}$  является функцией не только  $\hat{\mathbf{R}}$ , но и других статистических данных и, следовательно, по теореме Рао – Блэквелла – Колмогорова может быть улучшена.

Применение теоремы к оценке  $\hat{\rho}_{LW}$  дает следующий результат:

$$\hat{\rho}_{RBLW} = \frac{\frac{k-2}{k} \cdot \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}^2) + \text{Tr}^2(\hat{\mathbf{R}})}{(k+2) \left[ \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}^2) - \frac{\text{Tr}^2(\hat{\mathbf{R}})}{p} \right]} \quad (41)$$

Алгоритм OAS аппроксимирует оптимальный коэффициент усадки через итеративную процедуру. Алгоритм инициализируется  $\hat{\mathbf{R}}$  и итеративно улучшается. На практике оценка OAS рассчитывается без итераций как:

$$\hat{\rho}_{OAS} = \frac{\frac{1-2}{p} \cdot \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}^2) + \text{Tr}^2(\hat{\mathbf{R}})}{\left( \frac{k+1-2}{p} \right) \left[ \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}^2) - \frac{\text{Tr}^2(\hat{\mathbf{R}})}{p} \right]} \quad (42)$$

Коэффициенты всех решений метода усадки ВКМ ограничены сверху единицей, т.е.

$$\hat{\rho} = \min(\rho, 1). \quad (43)$$

OAS и RBLW имеют меньшую вычислительную нагрузку, по сравнению с LW, вследствие отсутствия расчета средней оценки ошибки  $\hat{\mathbf{R}}_k - \hat{\mathbf{R}}$ .

Метод GLC (General-Linear-Combination) [2] основан на методе [3]. Оценка ВКМ вычисляется по формуле:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \alpha \mathbf{I} + \beta \hat{\mathbf{R}}, \quad (44)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  параметры усадки, которые рассчитываются также посредством минимизации функции MSE  $\hat{\mathbf{R}}$ . Чтобы  $\hat{\mathbf{R}}$  была положительно определенной  $\alpha$  и  $\beta$  тоже должны быть положительно определенными. Решение этого метода приводится как:

$$\hat{\rho}_{GLC} = \frac{1}{K^2} \sum_{n=1}^K x(n)^4 - \frac{1}{K} \hat{\mathbf{R}}^2; \quad (45)$$

$$\hat{\alpha} = \min \left[ \hat{\nu} \frac{\hat{\rho}}{\hat{\mathbf{R}} - \hat{\nu} \mathbf{I}^2}, \hat{\nu} \right]; \quad (46)$$

$$\hat{\beta} = 1 - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\nu}}, \quad \hat{\nu} = \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) / K. \quad (47)$$

Для ФЛ LCMP выражение для весовых коэффициентов запишется как:

$$\mathbf{W}_{LCMPGLC}^H = \mathbf{g}^H \left[ \mathbf{C}^H \left( \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{xx} \right)^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C}^H \left( \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{xx} \right)^{-1}. \quad (48)$$

### Моделирование

Компьютерное моделирование проводилось на плоской 25 элементной квадратной решетке. Целевой гармонический сигнал с углом места  $0^\circ$  и вариацией ОСШ от -10 до +40 дБ с шагом 5 дБ. Две (рис. 2 а, б) и четыре (рис. 2 в, г) шумоподобные помехи равной мощности направлены в первые боковые лепестки с вариацией ОПШ +10, +20, +30 дБ. Учитывая ограниченные вычислительные ресурсы БА ФЛ, количество выборок сигнала принято не более 50. Также была применена техника матричного дополнения, которая учитывает изменение параметров помех по пространству и частоте и позволяет сохранять эффективность работы при расположении источника помехи на транспортном средстве, а также преднамеренном характере помех.

На рис. 2, 3 показаны результаты моделирования с применением метода Монте Карло для выбранных алгоритмов. По оси абсцисс отложены значения ОСШ. По оси ординат отложены значения ОСПШ<sub>вых</sub> адаптивного фильтра. Предельно достижимое значение ОСПШ<sub>вых</sub> (теоретическое) обозначено как «ОСПШ<sub>т</sub>». Максимально возможное значение ОСПШ<sub>вых</sub> рассчитывалось методом перебора значений КР в рабочем диапазоне и обозначено как «КР<sub>опт</sub>». Обозначение «LW» соответствует методу, описанному в работе [3] (O. Ledoit, M.Wolf). Обозначение «RBLW» и «OAS» соответствует методам, описанным в работе [4].

На рис. 3 представлена зависимость ОСПШ<sub>вых</sub> от количества выборок  $K$ , при 2-х помехах ОПШ 20 дБ каждая и ОСШ 10 дБ. Зависимость с легендой «КР = 0» описывает работу ФЛ без использования КР.



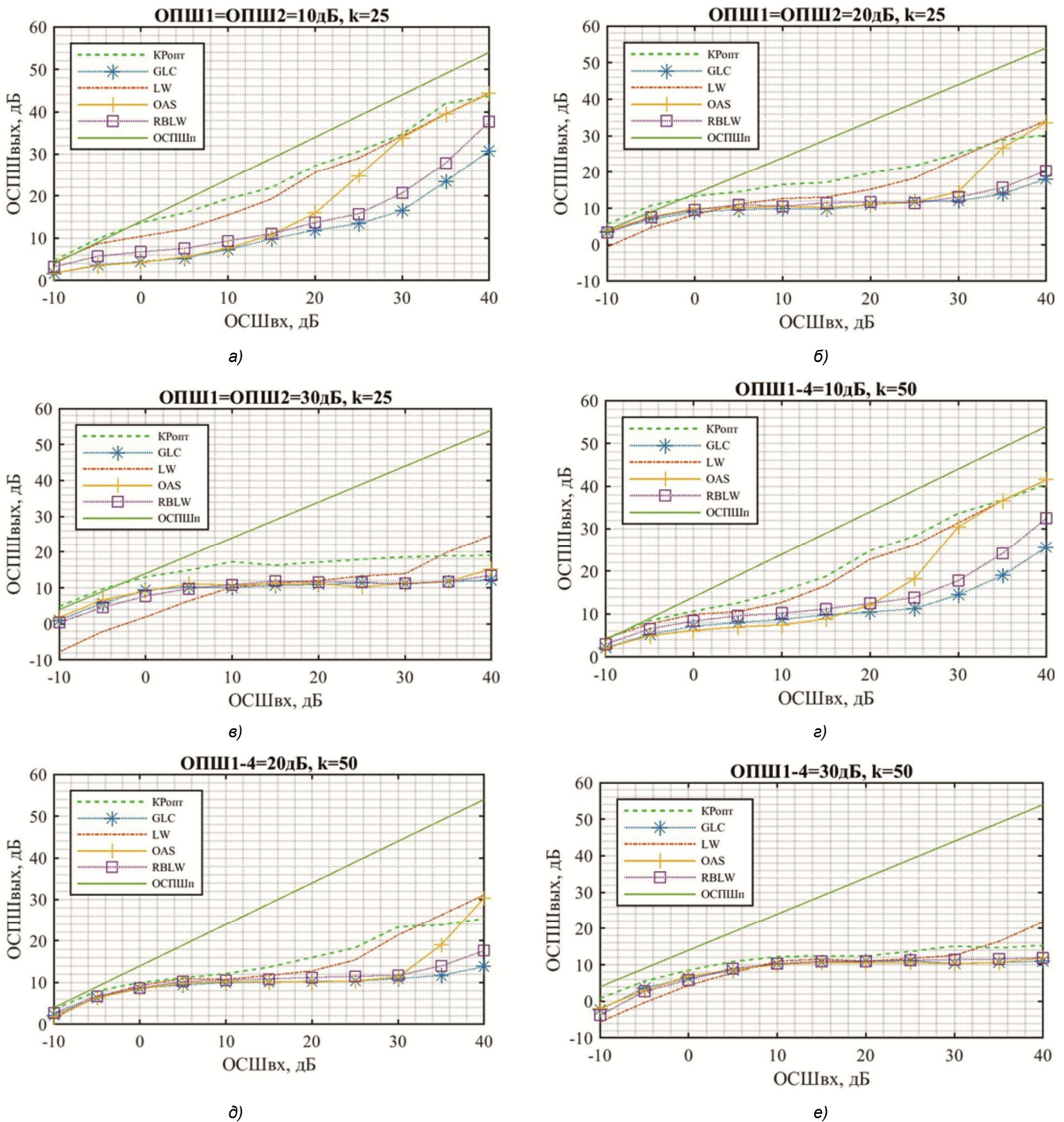


Рис. 2. Зависимость ОСПШ<sub>вых</sub> от ОСШ<sub>вх</sub>, при 2х помехах (K = 25) и 4х помехах (K = 50)

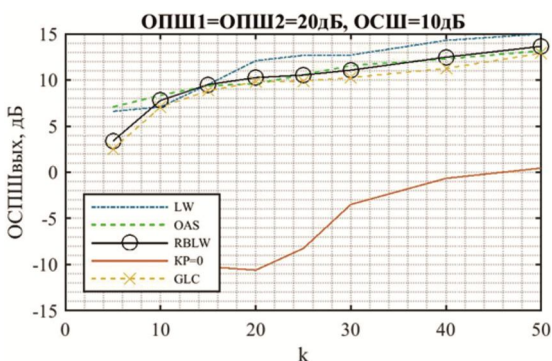
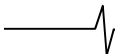


Рис. 3. Зависимость ОСПШ<sub>вых</sub> от K, при 2х помехах

### Заключение

В работе приведены существующие способы повышения надежности работы не рекурсивного ФЛ методом регуляризации ВКМ. Методы на основе TSVD вычислительно сложны из-за необходимости проведения SVD преобразования. Интерес представляют прямые алгоритмы на основе регуляризации Тихонова, не опирающиеся на статистические характеристики входных сигналов. Проведено моделирование слепого ФЛ LCMP, в условиях плохо обусловленной ВКМ. Сравнение методов регуляризации в зависимости от различных сигнально-помеховых ситуациях и количества выборок





приведены на графиках. Методы OAS и RBLW имеют меньшую вычислительную сложность, по сравнению с LW, вследствие отсутствия расчета средней оценки ошибки ВКМ. Так для LW она составляет  $3N^3$ , для OAS и RBLW  $2N^3$ . Метод GLC имеет еще меньшую вычислительную сложность –  $3N^2$ , но проигрывает в производительности. В оценках не учтены операции с членами порядка ниже, чем максимальный, для каждого алгоритма. Здесь  $N$  – размерность рабочей матрицы (количество каналов адаптивного фильтра). Таким образом, исходя из требований к возможностям ФЛ, можно оптимизировать программно-аппаратное обеспечение, подобрав соответствующий алгоритм регуляризации.

### Литература

1. B.D. Carlson, «Covariance Matrix Estimation Errors and Diagonal Loading in Adaptive Arrays», IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 24, no. 4, 1988.
2. L. Du, J. Li, and P. Stoica. «Fully Automatic Computation of Diagonal Loading Levels for Robust Adaptive Beamforming», IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 46, no. 1, pp. 449-458, 2010.
3. O. Ledoit and M. Wolf. «A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices», J. Multivar. Anal., vol. 88, no. 2, pp. 365-411, 2004.
4. Y. Chen, A. Wiesel, Y.C. Eldar, and A.O. Hero. «Shrinkage algorithms for MMSE covariance estimation», IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 10, pp. 5016-5029, 2010.
5. J. Li, P. Stoica, and Z. Wang. «On robust Capon beamforming and diagonal loading», IEEE Trans. Signal Process., vol. 51, no. 7, pp. 1702-1715, 2003.
6. A. Coluccia. «Regularized Covariance Matrix Estimation via Empirical Bayes», IEEE Signal Process. Lett., vol. 22, no. 11, pp. 2127-2131, 2015.
7. L.R. Haff. «Empirical Bayes Estimation of the Multivariate Normal Covariance Matrix», Ann. Stat., vol. 8, no. 3, pp. 586-597, 1980.
8. C. Culan and C. Adnet. «Regularized maximum likelihood estimation of covariance matrices of elliptical distributions», vol. 0, no. 2, pp. 1-9, 2016.
9. F. Perron. «Minimax estimators of a covariance matrix», J. Multivar. Anal., vol. 43, no. 1, pp. 16-28, 1992.
10. D.K. Dey and C. Srinivasan. «Estimation of a Covariance Matrix under Stein's Loss», Ann. Stat., vol. 13, no. 4, pp. 1581-1591, 1985.
11. C. Stein. «Lectures on the theory of estimation of many parameters», Zap. Nauchnykh Semin. Leningr. Otdeleniya Mat. Instituta im. V.A. Steklova AN SSSR, no. 74, pp. 4-65, 1977.
12. O. Ledoit and M. Wolf. «Optimal estimation of a large-dimensional covariance matrix under Stein's loss», Bernoulli, vol. 24, no. 4B, pp. 3791-3832, 2018.
13. P.J. Bickel and E. Levina. «Covariance regularization by thresholding», Ann. Stat., vol. 36, no. 6, pp. 2577-2604, 2008.
14. J. Fan, Y. Liao and M. Mincheva. «Large covariance estimation by thresholding principal orthogonal complements», J.R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol, vol. 75, no. 4, pp. 603-680, 2013.
15. C. Lam. «Nonparametric eigenvalue-regularized precision or covariance matrix estimator», Ann. Stat., vol. 44, no. 3, pp. 928-953, 2016.
16. C. Lam and P. Feng. «Integrating Regularized Covariance Matrix Estimators». pp. 1-21, 2017.
17. J.P. Hoffbeck and D.A. Landgrebe. «Covariance matrix estimation and classification with limited training data», IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 18, no. 7, pp. 763-767, 1996.
18. J.H. Friedman. «Regularized discriminant analysis», J. Am. Stat. Assoc., vol. 84, no. 405, pp. 165-175, 1989.
19. Harry L. Van Trees. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing. New York: Wiley, 2002.
20. H. Cox, R.M. Zeskind, and M.M. Owen. «Robust Adaptive Beamforming», IEEE Trans. Acoust., no. 10, pp. 1365-1376, 1987.
21. J. Gu and P.J. Wolfe. «Robust Adaptive Beamforming Using Variable Loading», no. 3, pp. 1-5, 2006.
22. C. Wu, Y. Guo, Y. Na and X. Wang. «Robust beamforming using beam-to-reference weighting diagonal loading and Bayesian framework», Electron. Lett., vol. 51, no. 22, pp. 29-30, 2015.
23. W. Liu and S. Ding. «An Efficient Method to Determine the Diagonal Loading Factor Using the Constant Modulus Feature», IEEE Trans. SIGNAL Process., vol. 56, no. 12, pp. 6102-6106, 2008.
24. Y. Selen, R. Abrahamsson, and P. Stoica. «Automatic robust adaptive beamforming via ridge regression», in ICASSP 2007, 2007, no. 3, pp. 965-968.
25. A.E. Hoerl, R.W. Kannard, K.F. Baldwin, A.E. Hoerl, R.W. Kannard and K.F.B. Ridge. «Ridge regression:some simulations», Commun. Stat. Theory Methods, vol. 4, 1975.
26. J.F. Lawless and P. Wang. «A simulation study of ridge and other regression estimators», Commun. Stat. – Theory Methods, vol. A5, no. 4, 1976.
27. A.M. Urmanov, A.V. Gribok, H. Bozdogan, J.W. Hines and R.E. Uhrig. «Information complexity-based regularization parameter selection for solution of ill conditioned inverse problems», Inverse Probl., vol. 18, pp. 1-9, 2002.
28. М.В. Ратынский, Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. – М: Радио и связь, 2003.
29. M. Benning and M. Burger, Modern regularization methods for inverse problems, vol. 27, no. May. 2018.
30. P.C. Hansen. «The discrete picard condition for discrete ill-posed problems», Bit, vol. 30, no. 4, pp. 658-672, 1990.
31. E.K.L. Hung and R.M. Turner. «A Fast Beamforming Algorithm for Large Arrays», IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-19, no. 4, pp. 598-607, 1983.
32. J.-L. Yu and C.-C. Yeh. «Generalized Eigenspace-Based Beamformers», IEEE Trans. Signal Process., vol. 43, no. 11, 1995.
33. D.D. Feldman and L.J. Griffiths. «A Projection Approach for Robust Adaptive Beamforming», IEEE Trans. Signal Process., vol. 42, no. 4, pp. 867-876, 1994.
34. P.C. Hansen. «The truncated SVD as a method for regularization», Bit, vol. 27, no. 4, pp. 534-553, 1987.
35. S. Noschese and L. Reichel. «A modified truncated singular value decomposition method for discrete ill-posed

problems», Numer. Linear Algebr. with Appl., vol. 21, no. 6, pp. 813-822, 2014.

36. X. Tuo, Y. Zhang, D. Mao, Y. Kang, and Y. Huang, «A RADAR FORWARD-LOOKING SUPER-RESOLUTION METHOD BASED ON SINGULAR VALUE WEIGHTED TRUNCATION», in IGARSS 2019, 2019, pp. 9180-9183.

37. М.М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

38. А.Н. Тихонов. «О регуляризации некорректно поставленных задач», ДАН СССР. 1963. Т. 153. №1. С. 49-52.

39. H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer. Regularization of Inverse Problems. DORDRECHT / BOSTON / LONDON: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1996.

40. M. Hanke and P.C. Hansen. «Regularization methods for large-scale problems», Rep. UNIC 92-04, UNIC (August 1992), to Appear Surv. Math. Ind.

41. Y. Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 3rd ed. SIAM, 2000.

42. C.C. Paige and M.A. Saunders. «LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares»,

ACM Trans. Math. Softw. 8 43-71.

43. S.A. Vorobyov. «Principles of minimum variance robust adaptive beamforming design», Signal Processing, vol. 93, no. 12, pp. 3264-3277, 2013.

44. V.A. Morozov. Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. New York: Springer, 1984.

45. G.H. Golub, M. Heath and G. Wahba. «Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter», Technometrics, vol. 21, no. 2, pp. 215-223, 1979.

46. Y. Wu, Y. Zhang, Y. Zhang, Y. Huang, and J. Yang. «TSVD with least squares optimization for scanning radar angular super-resolution», 2017 IEEE Radar Conf. Radar-Conf 2017, pp. 1450-1454, 2017.

47. S. Pereverzev and E. Schock. «Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces», Numer. Funct. Anal. Optim., vol. 21, no. 7-8, pp. 901-916, 2000.

48. P.C. Hansen. «REGULARIZATION TOOLS: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems», Numer. Algorithms, vol. 6, no. 1, pp. 1-35, 1994.