

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Научно-технический журнал  
№ 4/2020

Издается с 1999 года  
Выходит четыре раза в год

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**  
д.т.н., чл. кор. РАН Ю.Б. ЗУБАРЕВ

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:**  
д.т.н., проф. В.В. ВИТЯЗЕВ,  
д.т.н., член-корр. РАН А.В. ДВОРКОВИЧ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**  
д.т.н., проф. Ар.С. Аджемов, д.т.н., проф. Б.А. Алпатов,  
д.т.н., проф. В.Г. Бартенев, д.т.н. Ю.И. Борисов,  
д.т.н., проф. Ю.А. Брюханов, д.т.н., проф. В.И. Джиган,  
д.т.н., проф. В.В. Еремеев, д.т.н. Г.В. Зайцев,  
Р.В. Зубарев, А.П. Кирпичников,  
д.т.н., акад. РАН Н.А. Кузнецов,  
В.Г. Мистюков, д.т.н., проф. С.Л. Мищенко,  
д.т.н., проф. Ю.Н. Прохоров,  
д.т.н. А.Л. Приоров, д.т.н., проф. В.Г. Санников,  
д.т.н., проф. Чиров Д.С.,  
к.т.н., проф. В.С. Сперанский.

**Адрес редакции:**  
г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 8  
Научный центр МТУСИ  
Тел.: (+7) 903-201-53-33  
E-mail: rntores@mail.ru  
vityazev.v.v@rsreu.ru  
http://www.dspsa.ru

**Издатель:**  
Российское научно-техническое общество  
радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова  
Компьютерная верстка: И.А. Благодарова  
Дизайн: М.В. Аверин

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – **82185**

Подписано в печать 18.02.21 г.  
Формат 60х90/8.

Гарнитура «Arial». Печать офсетная.  
Бумага офсетная. Печ.л. 6,5. Тираж 200 экз.

Заказ № 942. Отпечатано в  
ООО НПЦ «Информационные технологии»  
Рязань, ул. Островского, д. 21/1  
тел.: (4912) 98-69-84

Издание зарегистрировано в Министерстве  
Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1488  
от 14.01.2000 г.

## УЧРЕДИТЕЛИ:

АО «Инструментальные системы»  
ФГУП «НИИ радио»  
ООО «Российское научно-техническое общество  
радиотехники, электроники  
и связи им. А.С. Попова»

### В НОМЕРЕ:

#### Пономарев А.В.

Двумерная обработка сигналов в пространственно-  
частотной области в базисах Фурье  
с варьируемыми параметрами ..... 3

#### Кузьмин Е.В.

Анализ частотных характеристик процедур квадратурной  
корреляционной обработки комплексных сигналов ..... 13

#### Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П.

Неортогональный множественный доступ:  
основные направления и возможности ..... 21

#### Пахотин В.А., Симонов Р.В., Власова К.В., Петров С.В.

Оптимальный приемник для обнаружения совокупности  
сигналов с неизвестными параметрами ..... 36

#### Киселева Т.П.

Расчет времени вхождения в синхронизм  
на этапе синхронизации по циклическому префиксу символов  
в технологии LTE OFDMA ..... 43

#### Вершинин В.А.

Использование алгоритма Витерби при передаче  
перекрывающимися элементарными сигналами ..... 49

#### Бартенев В.Г.

Об использовании трех сигнальных признаков  
для классификации и бланкирования  
дискретных мешающих отражений ..... 54

#### Дрынкин В.Н., Царева Т.И. Павлов Ю.В., Мысин Д.В.

Метод повышения чувствительности видеокамер  
на основе биннинга с восстановлением  
пространственного разрешения ..... 58

Журнал «Цифровая обработка сигналов» включен  
в перечень ведущих рецензируемых научных изданий,  
в которых по рекомендации Минобрнауки РФ,  
должны быть опубликованы основные научные результаты  
диссертаций на соискание ученой степени доктора  
и кандидата наук

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – **82185**

# Digital Signal Processing

Science & Technical Magazine  
Issue 4, 2020 year

Is published quarterly since 1999

## THE EDITOR-IN-CHIEF:

Dr.Sci. (Tech.), Professor, Corresponding Member  
of Russian Academy of Sciences U.N. Zubarev

## DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:

Dr.Sci. (Tech.), Professor V.V. Vityazev,  
Dr. Sci (Tech), Professor  
Corresponding Member of RAS A.V. Dvorkovich

## EDITORIAL BOARD:

Adzhemov A.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Alpatov B.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Bartenev V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Borisov Y.I., Dr.Sci.(Tech.)  
Bruchanov Y.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Djigan V.I., Dr. Sci (Tech), Professor  
Eremeyev V.V., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Zaitsev G.V., Dr.Sci.(Tech.)  
Zubarev R.V.,  
Kirpichnikov A.P.,  
Kuznetsov N.A., Dr.Sci.(Tech.), Academician  
Mistyukov V.G.,  
Mishenkov S.L., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Priorov A.L., Dr. Sci (Tech)  
Prokhorov Y.N., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Sannikov V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Chirov D.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Speranskii V.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor

## Editorial office address:

Aviamotornaya, 8, Moscow, Russia  
Research Center of MTUCI  
Phone: (+7) 903-201-53-33  
E-mail: rntores@mail.ru,  
vityazev.v.v@rsreu.ru  
Web: <http://www.dspsa.ru>

## Publisher:

Russian A.S. Popov Society for Radioengineering,  
Electronics & Communications

## Computer makeup:

I.A. Blagodarova

## FOUNDERS: InSys

Radio Research and Development Institute

## CONTENTS:

### **Ponomarev A.V.**

*Two-dimensional signal processing in space-frequency domain  
in Fourier bases with variable parameters* .....3

### **Kuzmin E.V.**

*Analysis of the frequency responses  
of the quadrature correlation processing of complex signals* .....13

### **Bakulin M.G., Kreyndelin V.B., Shumov A.P.**

*Non-orthogonal multiple access:  
main directions and capabilities*.....21

### **Pakhotin V.A., Simonov R.V., Vlasova K.V., Petrov S.V.**

*Optimal receiver for detecting set  
of signals with unknown parameters* .....36

### **Kiseleva T.P.**

*Calculating the time of entering synchronism  
at the synchronization stage using  
a cyclic character prefix in LTE OFDMA technology* .....43

### **Vershinin V.A.**

*The use of the Viterbi algorithm in the transmission overlapping  
the elementary signals* .....49

### **Bartenev V.G.**

*The usage of three signal fetures for classification and blanking  
of discrete interfering reflections*.....54

### **Drynkin V.N., Tsareva T.I., Pavlov U.V., Mysin D.V.**

*Method for increasing the sensitivity of video cameras based  
on binning with restoration of spatial resolution* .....58



Subscription index: 82185 ("Rospechat")  
ISSN: 1684-2634 9 771684 263005

## ДВУМЕРНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ В БАЗИСАХ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@mail.ru*

### TWO-DIMENSIONAL SIGNAL PROCESSING IN SPACE-FREQUENCY DOMAIN IN FOURIER BASES WITH VARIABLE PARAMETERS

*Ponomarev A. V.*

*Discrete Fourier Transform (DFT) is the basis of digital Fourier processing. Two methods for determining 2-D DFT are considered, each of which is carried out using a two-stage application of 1-D DFT. 1-D DFT and 2-D DFT, apart from their advantages, have a number of disadvantages. These disadvantages are manifested in applications in the form of negative effects. Main negative effects are leakage effect, scalloping effect, picket fence effect, aliasing effect. An effective method of dealing with these effects, both in one-dimensional and two-dimensional cases, is to use the operation of padding zeros to a signal. Significant disadvantages of this approach are large required memory size and the need for the great number of unproductive computations with zero elements. There are three options for extending the reference area of a 2-D signal with zeros: zero-padding of the vertical, horizontal, and both vertical and horizontal periods of the two-dimensional signal. It is proved that each of the three options for padding zeros to the reference area samples generates its own set of Fourier bases with variable parameters. The sets were called by the author as Fourier bases of the first, second and third type. The foundations of the theory of two-dimensional signal processing in the spatial-frequency domain in Fourier bases with variable parameters of the first type have been developed. Bases of two-dimensional exponential functions with a variable parameter of the first kind (2-D DEF-VP-1) are introduced and investigated. The basic properties of two-dimensional exponential functions of the first type with a variable parameter are proved. Algebraic and matrix forms of direct and inverse two-dimensional discrete Fourier transform with a variable parameter of the 1st type – 2-D DFT-VP-1 are introduced. The generalization of the 2-D signal periodicity is carried out in the form of the parametric 2-D signal periodicity. The generalization of the cyclic shift of a 2-D signal in the form of a parametric cyclic shift of a 2-D signal is carried out. The main properties of the two-dimensional discrete Fourier transform with a variable parameter of the first type are investigated. The theoretical foundations of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters of the first type make it possible to develop new and improve existing methods for two-dimensional Fourier - signal processing.*

**Key words:** theoretical foundations, information technologies of digital Fourier processing, negative effects of two-dimensional DFT, Fourier bases with variable parameters, periodicity of a two-dimensional signal, parametric periodicity of a two-dimensional.

**Ключевые слова:** теоретические основы, информационные технологии цифровой Фурье – обработки, негативные эффекты двумерного ДПФ, базисы Фурье с варьируемыми параметрами, периодичность двумерного сигнала, параметрическая периодичность двумерного сигнала.

#### Введение

Информационные технологии цифровой обработки как одномерных сигналов (1-D сигналов) в частотной области, так и двумерных сигналов (2-D сигналов) в пространственно-частотной области, нашли свои приложения во многих предметных областях – в радиотехнике, активной и пассивной гидролокации, гидрологии, сейсмологии, геодезии, медицине, метеорологии, контроле и диагностике сложных систем [1 – 33].

При проведении 2-D корреляционного анализа и 2-D свертки сигналов, 2-D спектральной и векторной обработки сигналов широко используется операция дополнения 2-D сигнала  $x(n_1, n_2)$ ;  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ;

*Рассмотрено два метода определения 2-D ДПФ, каждый из которых проводится с помощью двухэтапного применения 1-D ДПФ. 1-D ДПФ и 2-D ДПФ обладают рядом недостатков, которые в приложениях проявляются в виде негативных эффектов. Основные негативные эффекты: эффект утечки (leakage effect), гребешковый эффект (scalloping effect), эффект частоты (picket fence effect), эффект наложения (aliasing effect). Результативным методом борьбы с этими эффектами, как в одномерном, так и в двумерном случае, является применение операции дополнения сигналов нулями. Возможны три варианта расширения опорной области 2-D сигнала нулевыми отсчетами: дополнение нулями вертикального, горизонтального и одновременно вертикального и горизонтального периодов двумерного сигнала. Доказано, что каждый из трех вариантов расширения опорной области нулевыми отсчетами порождает свое множество базисов Фурье с варьируемыми параметрами, названных автором базисами Фурье первого, второго и третьего рода. Разработаны основы теории двумерной обработки сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода. Введены и исследованы базисы двумерных экспоненциальных функций с варьируемым параметром первого рода – 2-D ДЭФ-ВП-1. Доказаны основные свойства двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром. Введены алгебраическая и матричная формы прямого и обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ДПФ-ВП-1, 2-D ОДПФ-ВП-1. Проведено обобщение периодичности 2-D сигнала в виде параметрической периодичности 2-D сигнала. Проведено обобщение циклического сдвига 2-D сигнала в виде параметрического циклического сдвига 2-D сигнала. Исследованы основные свойства двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода. Теоретические основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов.*



**Метод 2.**  $S_{N_1 \times N_2}^{k_1, k_2} = \left[ \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right] F_{N_2 \times N_2}^{(1)} ; (9, б)$

**шаг № 1:**  $S_{N_2 \times N_1}^{(2)} = \left[ \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right];$

**шаг № 2:**  $S_{N_1, N_2}^{k_1, k_2} = \left[ S_{N_2 \times N_1}^{(2)} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)} \right].$

Отметим, что каждый из трех вариантов расширения опорной области нулевыми отсчетами порождает свое множество базисов Фурье с варьируемыми параметрами первого, второго и третьего рода. Свойства базисов Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода подробно исследованы в работе автора [1].

**Целью настоящей работы** является создание основ теории двумерной обработки сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода.

**Дискретная двумерная обработка сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода**

С учетом дополнения сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  нулевыми матрицами по варианту 1 (3) соотношения (9, а) и (9, б) преобразуются соответственно к виду:

$S_{N_1 r_1 \times N_2}^{k_1, k_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1 \cdot r_1}^{(2)} \cdot [X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}]; (10, а)$

$S_{N_1 r_1 \times N_2}^{k_1, k_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} [F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1 \cdot r_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2}] \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)} ; (10, б)$

где  $X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} = (11)$

$$= \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) & n_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \\ N_1 \\ \dots \\ (N_1 \cdot r_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, (N_2 - 1)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x((N_1 - 1), 0) & x((N_1 - 1), 1) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & ; & \end{matrix}$$

$$F_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) & k_2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1)} \end{bmatrix} & ; & \end{matrix}$$

$$F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1 \cdot r_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 \cdot r_1 - 1) & n_1 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 \cdot r_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{0 \cdot (N_1 \cdot r_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{1 \cdot (N_1 \cdot r_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot (N_1 \cdot r_1 - 1)} \end{bmatrix} & ; & \end{matrix}$$

Исследуем структуру матричного уравнения (10, а), как одну из эквивалентных форм. Нетрудно установить, что если обозначить матричное произведение  $[X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}]$  как столбцевую матрицу  $Y_{N_1 \cdot r_1 \times N_2}$ , то

$$Y_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} = \begin{bmatrix} X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)} \\ O_{N_1 \cdot (r_1 - 1) \times N_2} \end{bmatrix}. (14)$$

Перемножение матриц  $F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1 \cdot r_1}^{(2)}$  и  $Y_{N_1 \cdot r_1 \times N_2}$  приводит к усечению  $N_1 \cdot (r_1 - 1)$  столбцов квадратной матрицы  $F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1 \cdot r_1}^{(2)}$  и превращению ее в прямоугольную матрицу  $F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1}^{(2)}$ :

$$F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) & n_1 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 \cdot r_1 - 1) \\ k_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{0 \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{1 \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 \cdot r_1 - 1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & ; & \end{matrix}$$

Обозначим множество номеров строк матрицы  $F_{N_1 \cdot r_1 \times N_1}^{(2)}$  (15) через  $C$ :

$C : C = \{0, 1, 2, \dots, (N_1 \cdot r_1 - 1)\}.$

Применим к множеству  $C$  отношение сравнимости по модулю  $r_1$ . Известно, что отношение сравнимости по модулю  $m$  является отношением эквивалентности и обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности*.

Отношение сравнимости по модулю  $r_1$  разбивает множество строк  $C$  на  $r_1$  классов вычетов по модулю  $r_1$ :

$$C_0 = \left\{ 0, r_1, \dots, (N_1 - 1)r_1 \right\};$$

$$\dots$$

$$C_{(r_1 - 1)} = \left\{ (r_1 - 1), \dots, (N_1 r_1 - 1) \right\}; (16)$$

$C_i \neq \emptyset; C_i \cap C_j = \emptyset; \bigcup_{i=0}^{r_1 - 1} C_i = C.$

Матрицу (15), используя разбиение (16) множества  $C$  на  $r_1$  классов вычетов по модулю  $r_1$ , представим в виде  $r_1$  матриц размером  $N_1 \times N_1$ :

$$F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) & n_1 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \\ k_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & ; & \end{matrix}$$

где  $\theta_1 = 0, 1/r_1, \dots, (r_1 - 1)/r_1$ .

Дискретные двумерные экспоненциальные функции вида

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2};$$

$$k_1 = \overline{0, N_1 - 1}; \quad k_2 = \overline{0, N_2 - 1}; \quad 0 \leq \theta_1 < 1;$$

назовем **двумерными экспоненциальными функциями с варьируемым параметром первого рода – 2-D ДЭФ-ВП-1**.

$$\begin{aligned} & \text{Функции } def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2} = \\ & = \left[ \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1\right) \right] \cdot \left[ \exp\left(-j \frac{2\pi}{N_2} k_2 \cdot n_2\right) \right] = \\ & = \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1\right) \right] \times \\ & \times \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 \cdot n_2\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 \cdot n_2\right) \right] = \\ & = \cos\left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) - \\ & - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right). \end{aligned} \quad (18)$$

образуют при каждом конкретном значении  $\theta_1$  базисную систему с Фурье варьируемым параметром  $\theta_1$  первого рода.

На рис. 1-3 приведены примеры двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром.

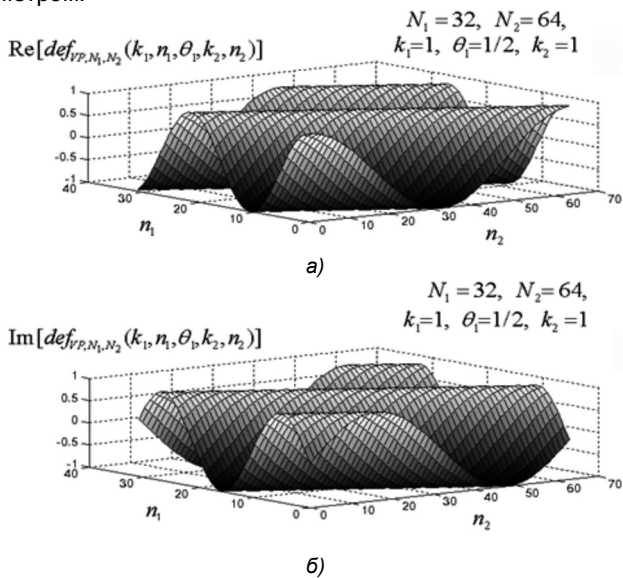


Рис. 1. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при  $N_1 = 32; N_2 = 64; k_1 = 1; k_2 = 1; \theta_1 = 1/2$

Рассмотрим основные свойства двумерных дискретных экспоненциальных функций (2-D ДЭФ-ВП-1), совокупность которых составляет при каждом значении параметра  $\theta_1$  свою базисную систему двумерного ДПФ-ВП-1 в пространстве  $\mathbf{I}_2^N$ .

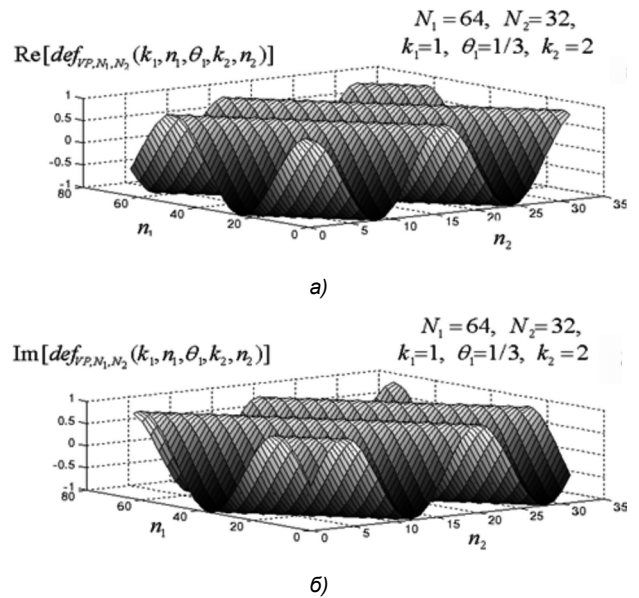


Рис. 2. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при  $N_1 = 64; N_2 = 32; k_1 = 1; k_2 = 2; \theta_1 = 1/3$

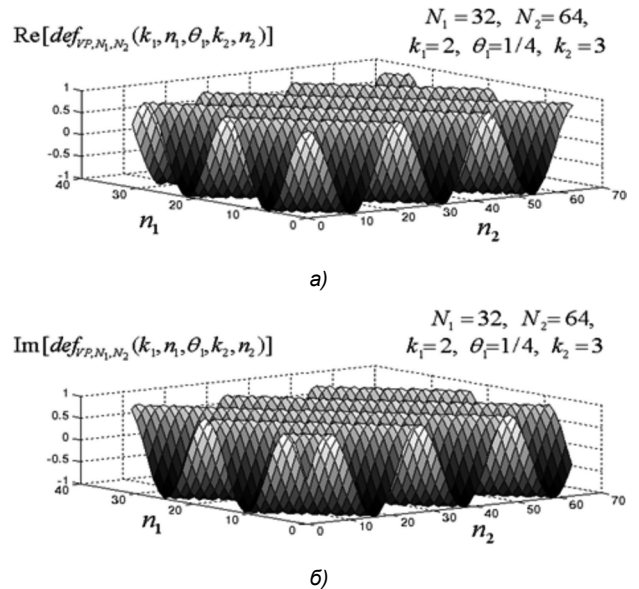


Рис. 3. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при  $N_1 = 32; N_2 = 64; k_1 = 2; k_2 = 3; \theta_1 = 1/4$

Отметим, что каждая из двумерных дискретных экспоненциальных функций с варьируемым параметром 1 рода имеет свои пространственные частоты  $k_1, k_2$ , которые определяют ее место в конкретной базисной системе.

**Основные свойства двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром:**

1. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются комплексными функциями по определению.
2. 2-D ДЭФ-ВП-1 является обобщением базисной системы 2-D ДЭФ и равна ей при нулевом значении параметра  $\theta_1$ .
3. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются двумерными функциями четырех равноправных переменных  $k_1, k_2$  и  $n_1, n_2$ , а

также одного варьируемого параметра  $\theta_1$  :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}. \quad (19)$$

4. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются периодическими по переменной  $k_1$  с периодом  $N_1$  и по переменным  $k_2, n_2$  с периодом  $N_2$  :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1 \pm lN_1, n_1, \theta_1, k_2 \pm mN_2, n_2 \pm qN_2) = def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2); \quad (20)$$

где  $l, m, q$  – целые числа.

5. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются параметрически периодическими<sup>3</sup> по переменной  $n_1$  с периодом  $N_1$  :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1 \pm pN_1, \theta_1, k_2, n_2) = def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot W_{N_1}^{\theta_1 N_1 p}, \quad (21)$$

где  $p$  – целое число.

6. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 по переменным  $k_1, k_2$  не является мультипликативной:

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot def_{VP,N_1,N_2}(k_3, n_1, \theta_1, k_4, n_2) \neq def_{VP,N_1,N_2}((k_1+k_3)_{\text{mod } N_1}, n_1, \theta_1, (k_2+k_4)_{\text{mod } N_2}, n_2). \quad (22)$$

7. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 по переменным  $n_1, n_2$  является мультипликативной:

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_3, \theta_1, k_2, n_4) = def_{VP,N_1,N_2}(k_1, (n_1+n_3)_{\text{mod } N_1}, k_2, \theta_1, (n_2+n_4)_{\text{mod } N_2}). \quad (23)$$

8. Среднее значение 2-D ДЭФ-ВП-1 с пространственными частотами  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$  равно нулю:

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} def_{N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1 \cdot N_2}^{N_2(k_1+\theta_1)n_1} \cdot \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1 \cdot N_2}^{N_1 k_2 n_2} \right] = \left[ \frac{1-W_{N_1}^{k_1(1+\theta_1)N_1}}{1-W_{N_1}^{k_1+\theta_1}} \right] \cdot \left[ \frac{1-W_{N_2}^{k_2 N_2}}{1-W_{N_2}^{k_2}} \right] = 0. \quad (24)$$

9. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 это ортогональная система по переменным  $k_1, k_2$  :

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1 \cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_1+N_1 k_2 n_2)} \cdot W_{N_1 \cdot N_2}^{(N_2(k_3+\theta_1)n_1+N_1 k_4 n_2)*} = \begin{cases} 1, & \text{если } k_1 = k_3, k_2 = k_4, \\ 0, & \text{если } k_1 \neq k_3, k_2 \neq k_4 \end{cases} \quad (25)$$

и по переменным  $n_1, n_2$  :

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1 \cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_1+N_1 k_2 n_2)} \cdot W_{N_1 \cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_3+N_1 k_2 n_4)*} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_1 = n_3, n_2 = n_4, \\ 0, & \text{если } n_1 \neq n_3, n_2 \neq n_4, \end{cases} \quad (26)$$

где символ \* означает комплексное сопряжение.

10. 2-D ДЭФ-ВП-1 в пространстве можно изобразить

в виде двух векторов единичной длины, вращающихся скачкообразно на углы  $2\pi(k_1+\theta_1)/N_1$  и  $2\pi k_2/N_1$  соответственно, при изменении переменных  $n_1$  и  $n_1$  на единицу. Проекции этих векторов на соответствующие оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функций  $W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1}$  и  $W_{N_2}^{k_2 n_2}$ . На интервале  $N_1$  вектор  $W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1}$  проходит угол  $2\pi(k_1+\theta_1)$  радиан, совершая  $(k_1+\theta_1)$  оборотов, а на интервале  $N_2$  вектор  $W_{N_2}^{k_2 n_2}$  проходит угол  $2\pi k_2$  радиан, совершая  $k_2$  оборотов. Вектора:  $W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)n_1} = W_{N_1}^{(N_1-(k_1+\theta_1))n_1}$  и  $W_{N_2}^{-k_2 n_2} = W_{N_2}^{(N_2-k_2)n_2}$  совершают соответственно  $(N_1-(k_1+\theta_1))$  и  $(N_2-k_2)$  оборотов.

Рис. 4 иллюстрирует такое представление 2-D ДЭФ-ВП-1, на котором углы  $\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)$  и  $\frac{2\pi}{N_2}k_2$  отмечены соответствующими точками.

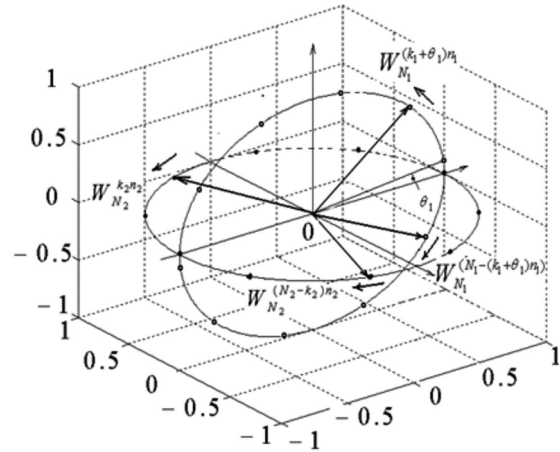


Рис. 4. Представление двумерной экспоненциальной функции первого рода с варьируемым параметром

11. В силу того, что число функций в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1 равно числу отсчетов каждой функции, а также линейной независимости функций в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1, система 2-D ДЭФ-ВП-1 является полной в пространстве  $\mathbf{I}_2^N$ .

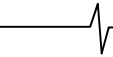
Разложение по базисным системам вида (18) определим как прямое двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемым параметром 1 рода (2-D ДПФ-ВП-1). Существует две формы 2-D ДПФ-ВП-1: алгебраическая и матричная. Рассмотрим их.

**Алгебраическая форма прямого двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ДПФ-ВП-1:**

$$S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}, \quad (27)$$

где  $k_1 = 0, (N_1 - 1), k_2 = 0, (N_2 - 1)$  – пространственные частоты;  $\theta_1$  – параметр преобразования 2-D ДПФ-ВП-1:

<sup>3</sup> Определение понятия параметрической периодичности двумерного сигнала  $x(n_1, n_2)$  рассмотрено в статье позже.



$0 \leq \theta_1 < 1$ ;  $x(n_1, n_2)$  – двумерный сигнал,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ ,  $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1)$  – коэффициенты 2-D ДПФ-ВП-1 (двумерный векторный пространственно-частотный спектр сигнала  $x(n_1, n_2)$  в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1).

**Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-ВП-1, учитывая свойство разделимости (сепарабельности) ядра 2-D ДПФ-ВП-1, может быть реализована в двух видах:**

$$S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \left[ \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2} \right]; \quad (28, \text{а})$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \left[ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} x(n_1, n_2) \right] \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2}. \quad (28, \text{б})$$

Формулами (28, а, б) задается двухэтапное определение прямого 2-D ДПФ-ВП-1 методом двух одномерных параметрических ДПФ (ДПФ-П) [1], выполняемых последовательно: формулой (28, а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (28, б) – по столбцам, а затем по строкам. Отметим, что вычисление ДПФ-П может проводиться методами параметрического быстрого преобразования Фурье (БПФ-П). Существует обратное 2-D ДПФ-ВП-1 (2-D ОДПФ-ВП-1).

**Алгебраическая форма обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода 2-D ДПФ-ВП-1:**

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1) W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot n_2}; \quad (29);$$

$n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ ;

Докажем, что (29) действительно обратное преобразование по отношению к (27).

Умножим правую и левую часть соотношения (27) на

$$\begin{aligned} & W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot m_2} \text{ и просуммируем по } k_1 \text{ и } k_2 \\ & \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1) W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot m_2} = \\ & = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2} \times \\ & \times W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot m_2} = \\ & = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{-\theta_1 \cdot (m_1 - n_1)} \\ & \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{-k_1 \cdot (m_1 - n_1)} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot (m_2 - n_2)}. \quad (30) \end{aligned}$$

С учетом ортогональности систем функций  $W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot m_1}$  и  $W_{N_2}^{-k_2 \cdot m_2}$ , замены переменных  $m_1$  и  $m_2$  на  $n_1$  и  $n_2$ , и поменяв местами левую и правую части соотношения (30), окончательно получим:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta) \cdot W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 \cdot n_2}; \quad (31)$$

$n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ;  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ .

что совпадает с (29). Используя свойство сепарабельности ядра 2-D ДПФ-ВП-1 введем два вида матричной формы прямого 2-D ДПФ-ВП-1.

**Матричная форма прямого двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ДПФ-ВП-1:**

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} [X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}]; \quad 0 \leq \theta_1 < 1; \quad (32)$$

$$F_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \quad (33)$$

$$= \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \end{matrix};$$

$$F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \quad (34)$$

$$= \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(0+\theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(1+\theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ k_1 \end{matrix} \end{matrix};$$

или в виде:

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1} = \frac{1}{N_1} [F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2}] \frac{1}{N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}. \quad (35)$$

Подчеркнем, различие матриц (17) и (34), заключающееся в характере изменения параметра  $\theta_1$ .

**Матричная форма обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ОДПФ-ВП-1:**

Обратное 2-D ДПФ-ВП-1 в матричной форме задается матричным уравнением в виде:

$$X_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)*} \cdot \frac{1}{N_2} [S_{N_1 \times N_2, \theta_1} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)*}]; \quad 0 \leq \theta_1 < 1; \quad (36)$$

или в виде:

$$X_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1} [F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)*} \cdot S_{N_1 \times N_2}] \frac{1}{N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)*}; \quad 0 \leq \theta_1 < 1. \quad (37)$$

Рассмотрим понятия периодичности и параметрической периодичности двумерных сигналов  $x(n_1, n_2)$  и их математическую формализацию.

**Периодичность и параметрическая периодичность двумерных сигналов**

Конечный дискретный двумерный сигнал  $x(n_1, n_2)$  с прямоугольной опорной областью  $SA_{N_1 \times N_2}$ :



$$SA_{N_1 \times N_2} := \{ (n_1, n_2) : n_1 = \overline{0, N_1 - 1}, n_2 = \overline{0, N_2 - 1} \}; \quad (38)$$

является периодическим в пространственной области с вертикальным периодом  $N_1$  и горизонтальным периодом  $N_2$ . В рамках теории двумерных дискретных сигналов  $x(n_1, n_2)$  любые линейные преобразования не должны выводить их за пределы фундаментального периода, а сдвиг понимается как циклический сдвиг:

– сдвиг двумерного сигнала  $x(n_1, n_2)$  в направлении вертикального периода  $N_1$  понимается как циклическая перестановка строк матрицы  $X_{N_1 \times N_2}$  (1);

– сдвиг двумерного сигнала  $x(n_1, n_2)$  в направлении горизонтального периода  $N_2$  понимается как циклическая перестановка столбцов матрицы  $X_{N_1 \times N_2}$ ;

– одновременный сдвиг двумерного сигнала  $x(n_1, n_2)$  в направлении вертикального периода  $N_1$  и горизонтального периода  $N_2$  понимается как одновременные циклические перестановки строк и столбцов матрицы  $X_{N_1 \times N_2}$ .

Введем в рассмотрение матрицы циклических сдвигов двумерного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$ . Матрица вертикального сдвига  $H_{V.Sh, N_1 \times N_1}$ :

$$H_{V.Sh, N_1 \times N_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (N_1 - 2) & (N_1 - 1) & n_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_1 - 2) \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (39)$$

Матрица горизонтального сдвига  $H_{H.Sh, N_2 \times N_2}$ :

$$H_{H.Sh, N_2 \times N_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (N_2 - 2) & (N_2 - 1) & n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_2 - 2) \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (40)$$

Указанные выше циклические сдвиги строк и столбцов двумерного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  могут быть математически описаны с помощью матриц (39) и (40) следующими блочными матричными уравнениями.

Сдвиг сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  в вертикальном направлении:

$$C_{V.Sh} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^0 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^1 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^2 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ \dots \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^{(N_1 - 1)} \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (41)$$

Сдвиг сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  в горизонтальном направлении:

$$C_{H.Sh} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^0 \\ [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^1 \\ [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^2 \\ \dots \\ [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^{(N_2 - 1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (42)$$

Сдвиг сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  в вертикальном и горизонтальном направлениях:

$$C_{V.H.Sh} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^0 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^0 \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^1 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^1 \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^2 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^2 \\ \dots \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^{(N_1 - 1)} \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \cdot H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^{(N_2 - 1)} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (43)$$

где  $H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^0$ ,  $H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^0$  – единичные матрицы, выражения  $H_{V.Sh, N_1 \times N_1}^m$ ,  $H_{H.Sh, N_2 \times N_2}^m$ , означает возведение в степень  $m$  матриц  $H_{V.Sh, N_1 \times N_1}$ ,  $H_{H.Sh, N_2 \times N_2}$ .

Двумерные экспоненциальные функции первого рода с варьируемым параметром являются периодическими по переменной  $n_2$  с периодом  $N_2$  (20) и параметрически периодическими по переменной  $n_1$  с периодом  $N_1$  (21). Периодичность по переменной  $n_2$  является классическим понятием и особого пояснения не требует. Рассмотрим понятие параметрической периодичности.

В теории двумерного ДПФ-ВП-1 под параметрическим сдвигом двумерного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  в вертикальном направлении будем понимать циклический параметрический сдвиг вида:

$$C_{V.Sh, \theta_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} H_{V.Sh, N_1 \times N_1, \theta_1}^0 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1, \theta_1}^1 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1, \theta_1}^2 \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \\ \dots \\ H_{V.Sh, N_1 \times N_1, \theta_1}^{(N_1 - 1)} \cdot [X_{N_1 \times N_2}]^T \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (44)$$



Введем символическое обозначения для ДПФ-ВП-1:

$$x_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2).$$

**Теорема линейности:**

ДПФ-ВП-1 является линейным преобразованием по определению.

Если:

$$x_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

$$y_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} Q_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

то:

$$\lambda_1 \cdot x_{\theta_1}(n_1, n_2) + \lambda_2 \cdot y_{\theta_1}(n_1, n_2) =$$

$$\lambda_1 \cdot S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) + \lambda_2 \cdot Q_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – произвольные числа.

**Теорема сдвига:**

Если:

$$x_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

то:

$$x_{\theta_1}((n_1 + m_1), (n_2 + m_2)) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}}$$

$$W_{N_1}^{-(k_1 + \theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 m_2} \cdot S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

**Доказательство.**

Обозначим:

$$U_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = W_{N_1}^{-(k_1 + \theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 m_2} \cdot S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) =$$

$$= W_{N_1}^{-(k_1 + \theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 m_2}.$$

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}$$

и введем замену переменных:

$$l_1 = n_1 + m_1; l_2 = n_2 + m_2.$$

Тогда:

$$U_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{l_1=m_1}^{N_1+m_1-1} \sum_{l_2=m_2}^{N_2+m_2-1} x_{\theta_1}(l_1, l_2) W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)(l_1 - m_1)} \cdot W_{N_2}^{k_2(l_2 - m_2)}.$$

С учетом (52) получим:

$$U_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = W_{N_1}^{-(k_1 + \theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2 m_2} \cdot S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2).$$

Аналогично для сдвигов  $(n_1 - m_1), (n_2 - m_2)$  получим:

$$x_{\theta_1}((n_1 - m_1), (n_2 - m_2)) =$$

$$= W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 m_2} \cdot S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2).$$

**Теорема корреляции:**

Если:

$$x_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

$$y_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} Q_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

$$R_{\theta_1}(n_1, n_2) =$$

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1, n_2) \cdot y_{\theta_1}((n_1 + m_1), (n_2 + m_2));$$

где  $R_{\theta_1}(n_1, n_2)$  циклическая (круговая) корреляция сиг-

налов  $x_{\theta_1}(n_1, n_2)$  и  $y_{\theta_1}(n_1, n_2)$ ;

$$R_{\theta_1}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\text{ДПФ-ВП-1}} Z_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2);$$

то:

$$Z_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = S_{N_1, N_2}^*(k_1, \theta_1, k_2) \cdot Q_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2).$$

**Доказательство.**

ДПФ-ВП-1 циклической (круговой) корреляции сигналов  $x_{\theta_1}(n_1, n_2)$  и  $y_{\theta_1}(n_1, n_2)$  равно:

$$Z_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) =$$

$$= \frac{1}{N_1^2 \cdot N_2^2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1, n_2) \cdot y_{\theta_1}((n_1 + m_1), (n_2 + m_2)) \times \\ \times W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}.$$

Применив теорему сдвига, несложно установить справедливость теоремы корреляции:

$$Z_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = S_{N_1, N_2}^*(k_1, \theta_1, k_2) \cdot Q_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2).$$

**Теорема (равенство) Парсевалля:**

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} |x_{\theta_1}(n_1, n_2)|^2 = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} |S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2)|^2.$$

**Доказательство.**

Если положить:

$$x_{\theta_1}(n_1, n_2) = y_{\theta_1}(n_1, n_2);$$

то из теоремы корреляции непосредственно следует:

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} |x_{\theta_1}(n_1, n_2)|^2 = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} |S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2)|^2.$$

Для ДПФ-ВП-1 можно ввести аналогично двумерному ДПФ понятия спектра мощности  $P_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2)$  и энер-

гетического спектра  $G_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2)$ :

$$P_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = |S_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2)|^2;$$

$$G_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) = P_{N_1, N_2}(k_1, \theta_1, k_2) / \Delta f; \Delta f = 1 / (N_1 \cdot N_2).$$

## Заключение

В работе предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода. Предложенная теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной Фурье – обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости.

Теоретические основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов.

Предложенные двумерные базисы Фурье с варьируемыми параметрами первого рода, дискретное преобразование Фурье на их основе существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий двумерной цифровой обработки сигналов и изображений в пространственной и пространственно-частотной областях.

Исследования аналитических свойств базисов Фурье с варьируемыми параметрами первого рода, позволяют сделать вывод о перспективности проведения исследований вероятностных свойств спектров, полученных на их основе, на основе двумерной версии теоремы Винера – Хинчина.

## Литература

1. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. – 2019. – № 2. – С. 12-20.
2. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ. 2016. – 172 с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Перевод с англ.– М.: Мир. 1978. – 839 с.
4. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. – 406 p.
5. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. – 1168 p.
6. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. – 790 с.
7. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Изменение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова, 2016. – Т. 19. – № 2. – С. 80-83.
8. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис...-д-ра техн. наук: 05.13.01. – Ижевск, 2016. – 357 с.
9. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 88-94.
10. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов// Метрология. 2017. – № 1. – С. 20-32.
11. Смирнова Н.В., Пономарева О.В. Векторная и спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2019. – № 2. – С. 3-11.
12. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 2. – С.81-87.
13. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2010. – № 2(16). – С.36-42.
14. Пономарев В.А, Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. 2014. – Т. 1. – № 15. – С.183-184.
15. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. 2013. – Т. 1. – № 14. – С.121-124.
16. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. 2013. – Т. 2. – № 14. – С. 90-93.
17. Пономарева О.В. Теоретико-вероятностные характеристики случайных дискретных информационных сигналов и аксиомы их измерения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 2. – С. 73-80.
18. Пономарева Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 26-32.
19. Пономарева Н. В., Пономарева О.В., Хворонков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 33-40.
20. Пономарева Н.В., Пономарева В.Ю. Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 15-18.
21. Пономарева Н.В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 4 (31). – С. 32-34.
22. Пономарева О.В., Пономарева Н.В., Пономарева В.Ю. Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 19-21.
23. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Инверсия дискретного времени и параметрическое дискретное преобразование Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 4 (31). – С. 25-31.
24. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67-68.
25. Пономарева О.В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 102-106.
26. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом аperiодического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 106-109.
27. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического Фурье - спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – № 2. – С. 8 - 16.
28. Пономарева О.В., Пономарев В.А. Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2(22). – С. 149-157.
29. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 115-118.
30. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 244-247.
31. Пономарева О.В. Горизонтальная скользящая пространственно-частотная обработка двумерных дискретных действительных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 78-87.
32. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 71-77.
33. Ponomarev A.V. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margaritha Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. – 2020.

УДК 621.376

## АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕДУР КВАДРАТУРНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ КОМПЛЕКСНЫХ СИГНАЛОВ

*Кузьмин Е.В., к.т.н., доцент, доцент кафедры радиотехники ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»; e-mail: EKuzmin@sfu-kras.ru; kuzminev@mail.ru*

### ANALYSIS OF THE FREQUENCY RESPONSES OF THE QUADRATURE CORRELATION PROCESSING OF COMPLEX SIGNALS

*Kuzmin E.V.*

*The frequency responses of classical correlator and two procedures for the quadrature correlation processing of complex signals based on the Fourier transform have been analytically obtained. The considered procedures imply the quadrature transformation of the incoming signal and differ in the method of forming the reference signal. The first method involves preparing the reference signal in the same way as the input one, which is the most common case. The implementation of the second method is focused on a special case – processing a binary phase shift keying signal, while the reference signal is formed by samples of a pseudo-random sequence.*

**Key words:** correlation processing, cross-correlation function, frequency response, phase shift keying signal, Fourier transform.

**Ключевые слова:** корреляционная обработка, взаимная корреляционная функция, частотная характеристика, фазоманипулированный сигнал, преобразование Фурье.

#### Введение

В теории и практике приёма сигналов широкое применение находит квадратурная корреляционная схема (к примеру, [1, стр. 44]; [2, стр. 593]; [3, стр. 123]; [4]), образованная парой корреляторов, вычисляющих значения взаимных корреляционных функций (ВКФ) входной реализации  $y(t)$  и квадратурных опорных сигналов. При современном уровне развития программных и аппаратных средств всё чаще встречаются примеры обработки сигналов и вычисления ВКФ на основе дискретного и быстрого преобразования Фурье (например, [3, стр. 502-505]; [5, стр. 263]; [6-12]). На рис. 1 представлена структурная схема, поясняющая одно из возможных типовых решений общего характера для реализации процедуры квадратурной корреляционной обработки на основе преобразования Фурье (ПФ). Данная схема демонстрирует «подготовку» комплексных сигналов [5, стр. 280] и применение к ним широко используемой методики получения ВКФ [5-9]. Здесь и далее для удобства записи и проведения анализа временные процессы и частотные спектры показаны функциями непрерывных аргументов. Как видно из рис. 1, квадратурная «подготовка» комплексного входного сигнала<sup>1</sup>  $\dot{a}_{\text{вх}}(t)$  обеспечивается гетеродинированием входной реализации  $y(t)$  при помощи комплексного сигнала опорной частоты:  $\dot{a}_{\text{вх}}(t) = y(t)\exp(\pm j\omega_{\text{оп}}t)$ . Аналогичным образом подготавливается комплексный опорный сигнал –

*Аналитическим путём получены частотные характеристики классического коррелятора и двух процедур квадратурной корреляционной обработки комплексных сигналов, использующих преобразование Фурье. Рассмотренные процедуры предусматривают квадратурное преобразование входной реализации и отличаются способом формирования опорного сигнала. Первый способ предполагает подготовку опорного сигнала аналогично входному, что является наиболее общим случаем. Реализации второго способа ориентированы на частный случай – обработку фазоманипулированного сигнала, при этом опорный сигнал образуется отсчётами псевдослучайной последовательности.*

на основе гетеродинирования вещественного опорного сигнала:  $\dot{a}_{\text{оп}}(t) = s_{\text{оп}}(t)\exp(\mp j\omega_{\text{оп}}t)$ . Известно [13, стр. 494], что при выполнении таких операций над сигналами  $y(t)$  и  $s_{\text{оп}}(t)$  происходит сдвиг соответствующих им спектров  $\dot{Y}(\omega)$  и  $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$ , причём направление сдвига спектра определяется знаком показателя экспоненты [5, стр. 280]. Преобразование Фурье сигналов  $\dot{a}_{\text{вх}}(t)$  и  $\dot{a}_{\text{оп}}(t)$ , показанное на рис. 1, 2 в виде оператора  $\mathcal{F}(\bullet)$ , приводит соответственно к спектрам  $\dot{A}_{\text{вх}}(\omega) = \dot{Y}(\omega \mp \omega_{\text{оп}})$  и  $\dot{A}_{\text{оп}}(\omega) = \dot{S}_{\text{оп}}(\omega \pm \omega_{\text{оп}})$  [5]; [13]. Перемножение спектров  $\dot{A}_{\text{вх}}(\omega) = \dot{A}_{\text{вх}}(\omega)\dot{A}_{\text{оп}}^*(\omega)$  определяет свёртку соответствующих им сигналов [13, стр. 34], поэтому обратное ПФ  $\mathcal{F}^{-1}(\dot{A}_{\text{вх}}(\omega))$  приводит к величине, пропорциональной интегралу<sup>2</sup>  $\dot{Z}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}_{\text{вх}}(t)\dot{a}_{\text{оп}}(t-\tau)dt$ , представляю-

<sup>1</sup> По тексту статьи точка сверху означает комплексную величину либо указывает на потенциально возможный комплексный характер величины.

<sup>2</sup> При оговоренном проводимом рассмотрении задачи в непрерывном времени и учёте взаимного соответствия операций комплексного сопряжения спектра и временной «перестановки» сигнала.

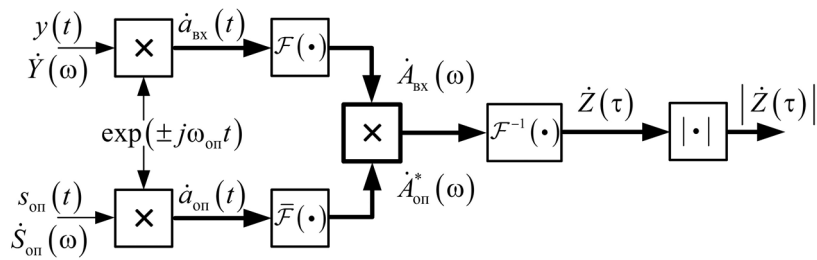


Рис. 1. Обобщённая структурная схема процедуры квадратурной корреляционной обработки, основанной на преобразовании Фурье (случай произвольного опорного сигнала)

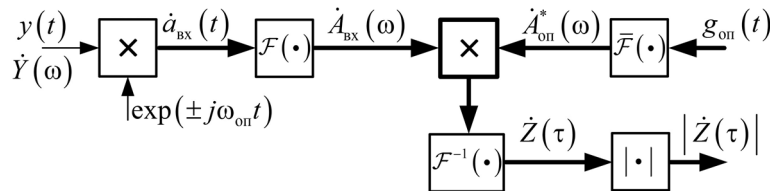


Рис. 2. Структурная схема процедуры вычисления ВКФ входной реализации и опорной ПСП (порождающей ФМ-сигнал) на основе преобразования Фурье (частный случай реализации квадратурного коррелятора для обработки ФМ-сигнала)

щему собой ВКФ<sup>3</sup> [13, стр. 70]. На рис. 1, 2 операция вычисления модуля показана в виде  $|\cdot|$ ; черта сверху в операторе ПФ  $\bar{F}(\cdot)$  и символ звездочка «\*» означают комплексное сопряжение.

На рис. 2 показан часто встречающийся частный случай (к примеру, [7-9]), предполагающий реализацию на основе ПФ процедуры квадратурной корреляционной обработки сигнала с фазовой манипуляцией (ФМ), образуемого псевдослучайной последовательностью (ПСП), опорная копия  $\dot{a}_{оп}(t) = g_{оп}(t)$  которой формируется в приёмнике. Как видно из рис. 1, 2, общей частью рассматриваемых структурных схем является квадратурное гетеродинирование входной реализации, а отличия заключаются в способе формирования опорного сигнала.

Известно [14, стр. 8], что коррелятор, составляющий основу квадратурной корреляционной схемы, является частотно-избирательным устройством, позволяющим максимизировать выходное отношение «сигнал/помеха» при обработке полезного сигнала в смеси с помехой в виде белого гауссовского шума, что паритетно эффективности согласованного фильтра с точки зрения указанного достигаемого положительного эффекта [14, стр. 11]. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) согласованного фильтра записывается путём взятия модуля от его комплексной передаточной функции, и с точностью до постоянного множителя определяется амплитудным спектром сигнала, для которого фильтр является согласованным [15, стр. 27]. Однозначная же формализация АЧХ коррелятора не так очевидна по причине «организационных» различий данных подходов, хотя интуитивно понятно, что определяющим фактором, по-прежнему, является спектр полезного сигнала, подаваемого в качестве опорного на один из входов коррелятора. При ре-

ализации процедур квадратурной корреляционной обработки за счёт вычисления ВКФ комплексных сигналов<sup>4</sup> на основе ПФ, «прозрачности» в вопросе о форме АЧХ не добавляется. Таким образом, поскольку описание частотных характеристик коррелятора<sup>5</sup> в явном виде в литературе не встречается, а потребность в таком описании может представлять интерес для учёта особенностей его работы, то получение формализации частотных характеристик процедур квадратурной корреляционной обработки (рис. 1, 2) представляется востребованной и полезной научной задачей.

Для решения данной задачи необходимо сделать терминологическую оговорку об определении АЧХ коррелятора, а также обсудить методику её получения. Как известно, АЧХ линейной системы – это модуль отношения комплексных выходной и входной величин, т.е. модуль комплексной передаточной функции [16, стр. 361]; [17, стр. 96]. Следует обязательно заметить, что отклик традиционных линейных фильтров (в т.ч. согласованных) является временным процессом, обладающим длительностью не меньшей, чем у входного процесса, а откликом коррелятора<sup>6</sup> является скалярное произведение [15, стр. 25], что существенно отличает коррелятор. Понимание этих отличий делает слегка затруднительным однозначное толкование и определение комплексной передаточной функции коррелятора, которое бы не противоречило общепринятому, и используемому, в частотности, применительно к согласованным фильтрам. Поэтому для проведения анализа будем пользоваться дополнительно оговариваемым обобщённым термином «частотная характеристика коррелятора» (далее частотная характеристика), которую условимся считать зависимостью комплексной выходной величины

<sup>4</sup> Получаемых путём гетеродинирования.

<sup>5</sup> Здесь и далее, исходя из контекста, может подразумеваться как классический одноканальный коррелятор, так и процедуры обработки сигналов создаваемые на его основе.

<sup>6</sup> При обработке за время накопления в интеграторе.

<sup>3</sup> Здесь и далее необходимое комплексное сопряжение функции комплексного опорного сигнала [13, стр. 70], находящегося в подынтегральных выражениях, учтено при гетеродинировании.

(отклика) коррелятора от частоты. Модуль введённой частотной характеристики является аналогом общепринятой и хорошо воспринимаемой АЧХ. Для её определения обратимся к возможной методике [17, стр. 96] и на вход рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки будем подавать гармонический тестовый сигнал (ТС)  $y(t) = y_{тс}(t)$  с фиксированной амплитудой. Изменяя частоту входного ТС и проводя фиксацию значения соответствующего ей отклика<sup>7</sup>, получим зависимость, которая представляется величиной, пропорциональной искомой частотной характеристике, что и является решением обсуждаемой задачи анализа.

**Цель статьи:** формализация частотных характеристик двух процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых на основе преобразования Фурье, при общем и частном виде опорных сигналов, а также вычислительная верификация полученных выражений.

**Анализ частотных характеристик процедур корреляционной обработки при наблюдении за время одного периода опорного сигнала**

Для формализации частотных характеристик рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых за счёт перехода в частотную область и обратно, зададимся моделью гармонического ТС  $y_{тс}(t)$ , спектральная плотность  $\dot{Y}_{тс}(\omega)$  которого записывается известным образом [13, стр. 53]:

$$y_{тс}(t) = A_{тс} \cos(\omega_{тс} t + \varphi_{тс}) \Leftrightarrow \dot{Y}_{тс}(\omega), \quad (1)$$

$$\dot{Y}_{тс}(\omega) = A_{тс} \pi [e^{j\varphi_{тс}} \delta(\omega - \omega_{тс}) + e^{-j\varphi_{тс}} \delta(\omega + \omega_{тс})],$$

где  $A_{тс}$ ,  $\omega_{тс}$ ,  $\varphi_{тс}$  – соответственно амплитуда, угловая частота и начальная фаза ТС; символ « $\Leftrightarrow$ » означает переход от временной функции к частотной и обратно за счёт пары преобразований Фурье;  $\delta(\omega)$  – дельта-функция [13, стр. 43]. Квадратурное гетеродинирование ТС приводит к комплексному сигналу  $\dot{a}_{вх}(t)$ , обладающему функцией спектральной плотности  $\dot{Y}_{тс}(\omega - \omega_{оп})$ , смещённой вправо относительно функции  $\dot{Y}_{тс}(\omega)$  [5]; [13]:

$$\dot{A}_{вх}(\omega) = \dot{Y}_{тс}(\omega - \omega_{оп}) \Leftrightarrow \dot{a}_{вх}(t) = y_{тс}(t) e^{j\omega_{оп} t},$$

$$\dot{Y}_{тс}(\omega - \omega_{оп}) = A_{тс} \pi [e^{j\varphi_{тс}} \delta(\omega - (\omega_{тс} + \omega_{оп})) + e^{-j\varphi_{тс}} \delta(\omega + (\omega_{тс} - \omega_{оп}))]. \quad (2)$$

Произвольный опорный сигнал  $s_{оп}(t) \Leftrightarrow \dot{S}_{оп}(\omega)$ , подвергнутый операции гетеродинирования, образует комплексный опорный сигнал  $\dot{a}_{оп}(t)$  со спектральной плотностью [5]; [13]:

$$\dot{A}_{оп}(\omega) = \dot{S}_{оп}(\omega + \omega_{оп}) \Leftrightarrow \dot{a}_{оп}(t) = s_{оп}(t) e^{-j\omega_{оп} t}. \quad (3)$$

Выходная величина процедуры квадратурной корреляционной обработки, формируемая за время одного периода работы  $T$ , определяется на основе скалярного произведения комплексных сигналов  $\dot{Z} = \langle \dot{a}_{вх}(t),$

$\dot{a}_{оп}(t) \rangle$ , которое может быть вычислено в частотной области [13, стр. 34]; [18, стр. 56]:

$$\dot{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{a}_{вх}(t) \dot{a}_{оп}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}_{вх}(\omega) \dot{A}_{оп}^*(\omega) d\omega. \quad (4)$$

Выражение (4) является аналитической основой для вычисления выходной величины процедуры квадратурной корреляционной обработки при произвольных входных и опорных сигналах. Подставим спектральные плотности (2) и (3) в выражение для скалярного произведения (4) и, таким образом, оценим отклик<sup>8</sup> рассматриваемой процедуры на ТС. Вычислительная работа приводит к следующим результатам для скалярного произведения и его модуля

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{тс}(\omega - \omega_{оп}) \dot{S}_{оп}^*(\omega + \omega_{оп}) d\omega = \\ &= \frac{A_{тс}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{j\varphi_{тс}} \delta(\omega - (\omega_{тс} + \omega_{оп})) + \\ &+ e^{-j\varphi_{тс}} \delta(\omega + (\omega_{тс} - \omega_{оп}))] \dot{S}_{оп}^*(\omega + \omega_{оп}) d\omega = \\ &= \frac{A_{тс}}{2} \left( e^{j\varphi_{тс}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - (\omega_{тс} + \omega_{оп})) \dot{S}_{оп}^*(\omega + \omega_{оп}) d\omega + \right. \\ &\left. + e^{-j\varphi_{тс}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + (\omega_{тс} - \omega_{оп})) \dot{S}_{оп}^*(\omega + \omega_{оп}) d\omega \right) = \\ &= \frac{A_{тс}}{2} [e^{j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(\omega_{тс} + 2\omega_{оп}) + e^{-j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(2\omega_{оп} - \omega_{тс})]; \\ |\dot{Z}| &= \frac{A_{тс}}{2} |e^{j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(\omega_{тс} + 2\omega_{оп}) + e^{-j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(2\omega_{оп} - \omega_{тс})|. \end{aligned} \quad (5)$$

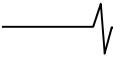
Подстановка в (4) сигналов  $\dot{a}_{вх}(t) = y(t) \Leftrightarrow \dot{Y}(\omega)$  и  $\dot{a}_{оп}(t) = s_{оп}(t) \Leftrightarrow \dot{S}_{оп}(\omega)$  позволяет получить отклик классического одноканального коррелятора [15, стр. 26], т.е. скалярное произведение  $\dot{Z} = \langle y(t), s_{оп}(t) \rangle = \int_0^T y(t) s_{оп}(t) dt$  [15, стр. 25]. При этом частотная характеристика, а также и её модуль, могут быть найдены с использованием (1) и (4) по аналогии с (5):

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{тс}(\omega) \dot{S}_{оп}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{A_{тс}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{j\varphi_{тс}} \delta(\omega - \omega_{тс}) + e^{-j\varphi_{тс}} \delta(\omega + \omega_{тс})] \dot{S}_{оп}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{A_{тс}}{2} [e^{j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(\omega_{тс}) + e^{-j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(-\omega_{тс})]; \\ |\dot{Z}| &= \frac{A_{тс}}{2} |e^{j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(\omega_{тс}) + e^{-j\varphi_{тс}} \dot{S}_{оп}^*(-\omega_{тс})|. \end{aligned} \quad (6)$$

При проведении интегрирования в (5), (6) учтено фильтрующее свойство дельта-функции [13, стр. 44]. Полученные выражения (5), (6) определяют величины, пропорциональные частотным характеристикам для процедуры квадратурной корреляционной обработки и классического одноканального коррелятора соответ-

<sup>7</sup> В момент окончания корреляционной обработки.

<sup>8</sup> В одной «точке».



венно при опорном сигнале произвольного вида. Как видно из (5), (6) поведение функций  $\dot{Z}(\omega_{\text{тс}})$  и  $|\dot{Z}(\omega_{\text{тс}})|$  определяется спектральной плотностью  $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$  сигнала  $s_{\text{оп}}(t)$ , на который «настроена» корреляционная схема. Выражения (5), (6) обладают общностью и позволяют производить учёт нюансировки, связанной со спектром конкретного сигнала и особенностями последующей обработки, к примеру – с возведением в квадрат значений откликов. Кроме того, далее будет показано, что при несложной модификации выражения (5), (6) позволяют получать частотные характеристики процедур корреляционной обработки при  $M$ -кратном увеличении времени накопления (интегрирования).

Поинтересуемся формой частотной характеристики процедуры квадратурной корреляционной обработки (рис. 1) для случая её «настройки» на полезный ФМ-сигнал  $s_{\text{оп}}(t)$  [3, стр. 86]; [15, стр. 39]:

$$\begin{aligned} s_{\text{оп}}(t) &= A_{\text{оп}} g_{\text{оп}}(t) \cos(\omega_{\text{оп}} t + \varphi_{\text{оп}}), \\ g_{\text{оп}}(t) &= \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} \text{rect}(t - (l-1)T_g), \\ g_{\text{оп}l} &= \{\pm 1\}_{l=1}^L, t \in [0, T], \\ T &= LT_g, \text{rect}(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, T_g], \\ 0, t \notin [0, T_g], \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

где  $g_{\text{оп}}(t)$  – видеосигнал бинарной ПСП  $g_{\text{оп}l}$  длины  $L$ , спектральная плотность  $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$  которого записывается в виде [15, стр. 40]

$$\begin{aligned} g_{\text{оп}}(t) &\Leftrightarrow \dot{G}_{\text{оп}}(\omega) = \dot{G}_{\text{оп}0}(\omega) \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j\omega(l-1)T_g}, \\ \dot{G}_{\text{оп}0}(\omega) &= \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_g}) = \\ &= T_g \text{sinc}\left(\frac{\omega T_g}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T_g}{2}}, \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \end{aligned} \quad (8)$$

и позволяет на основе известного свойства преобразования Фурье [13, стр. 32] записать спектральную плотность вещественного опорного ФМ-сигнала (7)

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{оп}}(\omega) &\Leftrightarrow s_{\text{оп}}(t) = A_{\text{оп}} g_{\text{оп}}(t) \cos(\omega_{\text{оп}} t + \varphi_{\text{оп}}), \\ \dot{S}_{\text{оп}}(\omega) &= \frac{A_{\text{оп}}}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}(\omega - \omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}(\omega + \omega_{\text{оп}}) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (8)  $\dot{G}_{\text{оп}0}(\omega)$  – спектральная плотность одиночного парциального импульса ПСП (прямоугольного гест-импульса длительности  $T_g$ ) [15, стр. 40]; [16, стр. 261].

Нетрудно показать, что подстановка функции  $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$  (8) в (9) приводит к результату, исчерпывающе описывающему спектральную плотность несмещённого опорного сигнала (7) для произвольных параметров. Указанная подстановка приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{оп}}(\omega) &= \frac{A_{\text{оп}}}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{оп}}} \frac{(1 - e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}})T_g})}{j(\omega - \omega_{\text{оп}})} \times \right. \\ &\times \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\left. + e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \frac{(1 - e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}})T_g})}{j(\omega + \omega_{\text{оп}})} \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} \right] = \\ &= \frac{A_{\text{оп}} T_g}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{оп}}} \text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_{\text{оп}})T_g}{2}\right) \times \right. \\ &\times e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}})\frac{T_g}{2}} \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} + \\ &\left. + e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_{\text{оп}})T_g}{2}\right) e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}})\frac{T_g}{2}} \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} \right]. \end{aligned}$$

Спектральная плотность (9) и её «расширенная» версия (10) позволяют производить учёт различных манипуляций над сигналом, к примеру – внесение задержки, смещение частоты.

Подстановка спектральной плотности (10) в (5) даёт искомые характеристики при опорном сигнале вида (7). Для уменьшения громоздкости выкладок, при записи данных характеристик, подставим спектральную плотность (9) в (5) и для скалярного произведения (а также его модуля) тестового сигнала (1) и опорного сигнала (7), подвергнутых квадратурному гетеродинированию, запишем

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{\text{тс}}(\omega - \omega_{\text{оп}}) \dot{S}_{\text{оп}}^*(\omega + \omega_{\text{оп}}) d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{тс}}}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{тс}}} \dot{S}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + 2\omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}} \dot{S}_{\text{оп}}^*(2\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) \right] = \\ &= \frac{A_{\text{тс}} A_{\text{оп}}}{4} \left[ e^{j\varphi_{\text{тс}}} (e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + \omega_{\text{оп}}) + \right. \\ &+ e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + 3\omega_{\text{оп}})) + \\ &+ e^{-j\varphi_{\text{тс}}} (e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) + e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(3\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}})) \left. \right]; \\ |\dot{Z}| &= \frac{A_{\text{тс}} A_{\text{оп}}}{4} \left| e^{j\varphi_{\text{тс}}} e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + \omega_{\text{оп}}) + \right. \\ &+ e^{j\varphi_{\text{тс}}} e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + 3\omega_{\text{оп}}) + \\ &+ e^{-j\varphi_{\text{тс}}} e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) + e^{-j\varphi_{\text{тс}}} e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(3\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) \left. \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

При выводе (11) учтено, что

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{оп}}^*(\omega) &= 0,5 A_{\text{оп}} [e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega - \omega_{\text{оп}}) + e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega + \omega_{\text{оп}})], \\ \dot{S}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + 2\omega_{\text{оп}}) &= \\ &= 0,5 A_{\text{оп}} [e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + \omega_{\text{оп}}) + e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{тс}} + 3\omega_{\text{оп}})], \\ \dot{S}_{\text{оп}}^*(2\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) &= \\ &= 0,5 A_{\text{оп}} [e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}}) + e^{j\varphi_{\text{оп}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(3\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{тс}})]. \end{aligned}$$

Полученные выражения (11) описывают частную характеристику процедуры квадратурной корреляционной обработки ФМ-сигнала на основе структурной схемы, показанной на рис. 1.

Далее, проведём формализацию, аналогичную (5), для случая реализации процедуры квадратурной корреляционной обработки на основе структурной схемы, показанной на рис. 2. Данный случай, в отличие от предыдущего (рис. 1), ориентирован исключительно на обра-

<sup>9</sup> В случае (12) подразумевается группа из опорных ПСП.



ботку ФМ-сигналов. Подставляя в (4) спектральную плотность ТС (2), спектральную плотность видеосигнала бинарной ПСП, а также применяя упомянутое ранее фильтрующее свойство дельта-функции, получим выражения для  $\dot{Z}$  и  $|\dot{Z}|$ :

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_{\text{TC}}(\omega - \omega_{\text{оп}}) \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{j\varphi_{\text{TC}}} \delta(\omega - (\omega_{\text{TC}} + \omega_{\text{оп}})) + \right. \\ &+ \left. e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \delta(\omega + (\omega_{\text{TC}} - \omega_{\text{оп}})) \right] \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega) d\omega = \\ &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} \left( e^{j\varphi_{\text{TC}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - (\omega_{\text{TC}} + \omega_{\text{оп}})) \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega) d\omega + \right. \\ &+ \left. e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + (\omega_{\text{TC}} - \omega_{\text{оп}})) \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega) d\omega \right) = \\ &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} [e^{j\varphi_{\text{TC}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{TC}} + \omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{TC}})]; \\ |\dot{Z}| &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} |e^{j\varphi_{\text{TC}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{TC}} + \omega_{\text{оп}}) + e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{TC}})|. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения (11), (12) имеют общий характер с точки зрения вида ПСП  $g_{\text{оп}l}$  и позволяют легко записать выражения для квадратов модулей  $|\dot{Z}|^2$ , при необходимости возведения в квадрат выходной величины рассматриваемых процедур корреляционной обработки. Подстановка комплексно-сопряжённой спектральной плотности  $\dot{G}_{\text{оп}}^*(\omega)$  (8) в (11), (12) позволяет выполнять расчёты искомым характеристикам для произвольных параметров опорного сигнала и опорной ПСП.

### Анализ частотных характеристик процедур корреляционной обработки при M-кратном увеличении времени накопления (интегрирования)

Полученные выражения (5), (6), (11), (12) позволяют производить расчёт частотных характеристик рассматриваемых процедур квадратурной корреляционной обработки и классического одноканального коррелятора, при времени наблюдения, равном как одному  $T$ , так и нескольким периодам работы  $MT$  ( $M$  – целое). Условие  $M > 1$  соответствует так называемому когерентному накоплению, предполагающему формирование выходной величины коррелятора по результатам непрерывной обработки за время, равное  $M$  периодам опорного сигнала (к примеру, [3, стр. 130, 135]). Для формализации частотных характеристик рассматриваемых процедур в режиме M-кратного накопления необходимо произвести модификацию функций спектральных плотностей  $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$  и  $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$  опорных сигналов  $s_{\text{оп}}(t)$  и  $g_{\text{оп}}(t)$ , учитывающую трансформацию спектра при переходе от одиночного сигнала к группе (пачке, серии) из  $M$  сигналов. Спектральная плотность группы из  $M$  примыкающих друг к другу опорных сигналов, обладающих длительностью  $T$ , записывается известным образом – путём умножения спектра одиночного сигнала на множитель  $(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \dots + e^{-j\omega(M-1)T}) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^M e^{-j\omega(n-1)T} \quad [13, \text{стр. 41}]; [16, \text{стр. 263}]: \\ \dot{S}_{M \text{ оп}}(\omega) &= \dot{S}_{\text{оп}}(\omega) \sum_{n=1}^M e^{-j\omega(n-1)T}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{G}_{M \text{ оп}}(\omega) = \dot{G}_{\text{оп}}(\omega) \sum_{n=1}^M e^{-j\omega(n-1)T}. \quad (14)$$

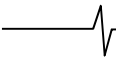
Подстановка  $\dot{S}_{M \text{ оп}}(\omega)$  (13) в (5), (6) вместо  $\dot{S}_{\text{оп}}(\omega)$ , позволяет вычислить частотную характеристику (и её модуль) процедуры квадратурной корреляционной обработки (рис. 1) и классического одноканального коррелятора в режиме M-кратного накопления при произвольном опорном сигнале. Для краткости ограничимся подстановкой (13) в (5) и запишем выражение лишь для  $\dot{Z}_M(\omega_{\text{TC}})$ , понимая, что операция взятия модуля  $|\dot{Z}_M(\omega_{\text{TC}})|$  элементарно записывается при необходимости:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_M &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} [e^{j\varphi_{\text{TC}}} \dot{S}_{M \text{ оп}}^*(\omega_{\text{TC}} + 2\omega_{\text{оп}}) + \\ &+ e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \dot{S}_{M \text{ оп}}^*(2\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{TC}})] = \\ &= \frac{A_{\text{TC}}}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{TC}}} \left( \dot{S}_{\text{оп}}(\omega_{\text{TC}} + 2\omega_{\text{оп}}) \sum_{n=1}^M e^{-j(\omega_{\text{TC}} + 2\omega_{\text{оп}})(n-1)T} \right)^* + \right. \\ &+ \left. e^{-j\varphi_{\text{TC}}} \left( \dot{S}_{\text{оп}}(2\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{TC}}) \sum_{n=1}^M e^{-j(2\omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{TC}})(n-1)T} \right)^* \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Замена  $\dot{G}_{\text{оп}}(\omega)$  на  $\dot{G}_{M \text{ оп}}(\omega)$  в (11) и (12), с использованием (14), позволяет вычислить аналогичные характеристики для обеих рассматриваемых процедур при опорной группе ФМ-сигналов<sup>9</sup>. Подстановки (10) в (13) и (8) в (14) приводят соответственно к частным случаям – выражениям для спектральных плотностей групп ФМ-сигналов и групп ПСП:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{M \text{ оп}}(\omega) &= \frac{A_{\text{оп}} T_g}{2} \left[ e^{j\varphi_{\text{оп}}} \text{sinc} \left( \frac{(\omega - \omega_{\text{оп}}) T_g}{2} \right) \times \right. \\ &\times e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}}) \frac{T_g}{2}} \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega - \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} + \\ &+ \left. e^{-j\varphi_{\text{оп}}} \text{sinc} \left( \frac{(\omega + \omega_{\text{оп}}) T_g}{2} \right) e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}}) \frac{T_g}{2}} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j(\omega + \omega_{\text{оп}})(l-1)T_g} \right] \sum_{n=1}^M e^{-j\omega(n-1)T}, \\ \dot{G}_{M \text{ оп}}(\omega) &= \\ &= \left[ T_g \text{sinc} \left( \frac{\omega T_g}{2} \right) e^{-j\omega \frac{T_g}{2}} \sum_{l=1}^L g_{\text{оп}l} e^{-j\omega(l-1)T_g} \right] \sum_{n=1}^M e^{-j\omega(n-1)T}. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, в результате проведённого анализа получены аналитические выражения для частотных характеристик классического одноканального коррелятора и двух процедур квадратурной корреляционной обработки, основанных на использовании преобразования Фурье. Кроме того, записаны необходимые вспомогательные выражения для спектральных плотностей частных рассматриваемых опорных процессов. В качестве дополнения отметим, что аналитические выражения (5), (11), (12), (15) получены без учёта возможной и применяемой (см. к



примеру, [5, стр. 285]; [19]; [20, стр. 367]) низкочастотной фильтрации компонентов входного и опорного комплексных сигналов. Такой подход обоснован, с одной стороны, возможностью получения наиболее полного представления о спектральном составе получаемых комплексных сигналов, причём не исключает возможности учёта низкочастотной фильтрации (при необходимости) за счёт соответствующей коррекции (2), (3) и последующих выражений. С другой стороны, при обработке ФМ-сигналов на основе рассматриваемых процедур (рис. 1, 2), низкочастотная фильтрация не является необходимой и может не использоваться [7-9].

### Верификация проведённого анализа и обсуждение результатов

Для оценки правильности полученных в статье выражений (11), (12) проведена серия вычислительных проверок. Основные принципы проведённой верификации заключаются в следующем. Путём изменения частоты ТС и, таким образом, проведения табулирования выражений (11), (12), получались массивы значений  $|\dot{Z}(\omega_{\text{TC}})|$ . Одновременно с этим, для каждой из устанавливаемых частот ТС, производились вычислительные оценки преобразований генерируемых с шагом дискретизации  $T_d$  отсчётов ТС (1) и опорных процессов (7), образующих соответствующие векторы  $\{y_{\text{TC}}(kT_d)\}_{k=1}^{MK}$ ,  $\{s_{\text{оп}}(kT_d)\}_{k=1}^{MK}$ ,  $\{g_{\text{оп}}(kT_d)\}_{k=1}^{MK}$ , содержащие  $MK$  отсчётов:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\text{вх}} &= \mathcal{F}(\{A_{\text{TC}} \cos(\omega_{\text{TC}} kT_d + \varphi_{\text{TC}}) [e^{j\omega_{\text{оп}} kT_d}]\}_{k=1}^{MK}), \\ \hat{A}_{\text{оп1}}^* &= \\ &= \overline{\mathcal{F}}(\{A_{\text{оп}} g_{\text{оп}}(kT_d) \cos(\omega_{\text{оп}} kT_d + \varphi_{\text{оп}}) [e^{-j\omega_{\text{оп}} kT_d}]\}_{k=1}^{MK}), \\ \hat{A}_{\text{оп2}}^* &= \overline{\mathcal{F}}(\{g_{\text{оп}}(kT_d)\}_{k=1}^{MK}), \\ |\dot{Z}_1| &= |\mathcal{F}^{-1}(\hat{A}_{\text{вх}} \hat{A}_{\text{оп1}}^*)|, \quad |\dot{Z}_2| = |\mathcal{F}^{-1}(\hat{A}_{\text{вх}} \hat{A}_{\text{оп2}}^*)|. \end{aligned} \quad (18)$$

То есть проводилось имитационное моделирование рассматриваемых процедур обработки сигналов, показанных в виде структурных схем на рис. 1, 2. Временно-

му интервалу  $t \in [0, T]$  соответствуют отсчёты с номерами  $k = 1, 2, \dots, K$ . Смысл  $M$  прежний.

С целью визуализации примеров частотных характеристик, рассчитываемых по полученным в статье аналитическим выражениям, на рис. 3-10 показаны сегменты нормированных модулей частотных характеристик  $Z_{\text{н}} = |\dot{Z}(\omega_{\text{н}})| / |\dot{Z}_{\text{макс}}(\omega_{\text{н}})|$  как функции нормированной частоты  $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{TC}} / \omega_{\text{оп}}$ . Рис. 3, 4 соответствуют процедуре квадратурной корреляционной обработки, структурная схема которой показана на рис. 1. Рис. 5-10 относятся ко второй из рассматриваемых процедур (рис. 2). Сплошные линии на рис. 3, 4 рассчитаны на основе (8), (11), (17), а круглыми символами « $\circ$ » показаны нормированные значения  $|\dot{Z}_1|$ , полученные согласно (18).

Для исключения избыточности круглых символов при их отображении использована децимация: десятикратная для рис. 3 и пятикратная для рис. 4. Как видно из рис. 3, 4, результаты аналитических вычислений совпадают с результатами имитационного моделирования. Дальнейшая проведённая верификация показала, что такое же совпадение имеет место для всех рассмотренных характеристик, поэтому на рис. 5-10, полученных на основе (8), (12), (17), круглые символы для  $|\dot{Z}_2|$  (18) с целью облегчения визуализации не показаны. Основные условия, при которых получены рис. 3-10, были следующими. Рис. 3, 5, 6 соответствуют времени обработки в корреляторе, равному одному периоду опорного сигнала:  $M = 1$ . Рис. 7, 8 соответствуют случаю двух когерентных накоплений  $M = 2$ . Рис. 4, 9, 10 получены при пяти когерентных накоплениях  $M = 5$ . Рис. 3, 4 получены для ПСП в виде  $M$ -последовательности длины  $L = 15$  [15, стр. 59]. Рис. 5-10 получены при длине ПСП  $L = 1023$ , причём рис. 5, 7, 9 получены для кода Голда [21, стр. 64], а рис. 6, 8, 10 соответствуют  $M$ -последовательности [15, стр. 60]. Длительности парциальных импульсов ПСП выбраны произвольно и являются различными для рис. 3, 4 и рис. 5-10. Сравнительно небольшая длина ПСП ( $L = 15$ ) позволила показать детали модуля частотной характеристики (рис. 3) в её главном и первых

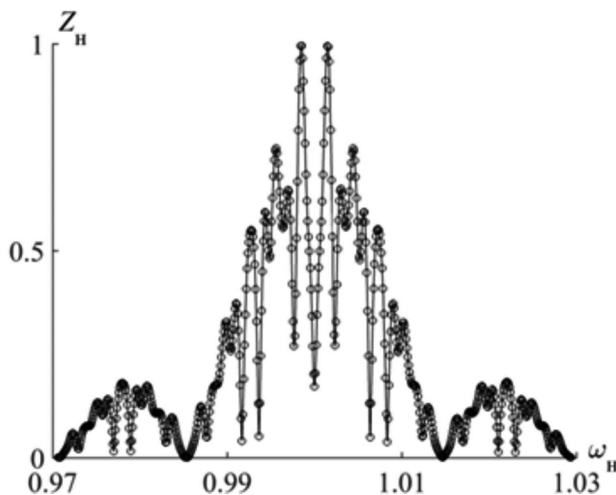


Рис. 3. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 1) при опорном ФМ-сигнале на основе  $M$ -последовательности ( $L = 15$ ;  $M = 1$ )

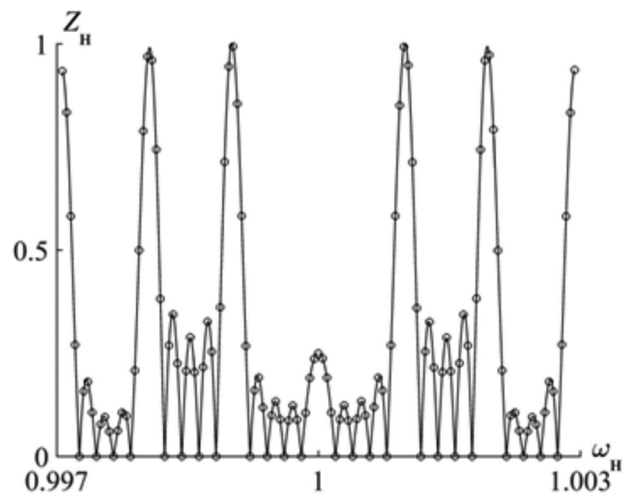


Рис. 4. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 1) при опорном ФМ-сигнале на основе  $M$ -последовательности ( $L = 15$ ;  $M = 5$ )

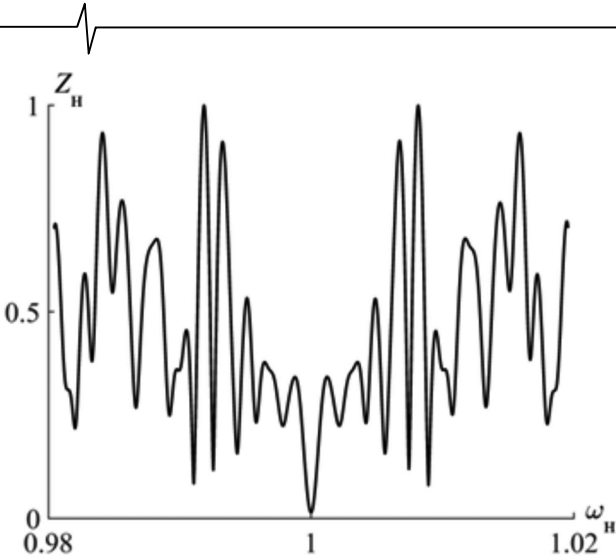


Рис. 5. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда ( $L = 1023; M = 1$ )

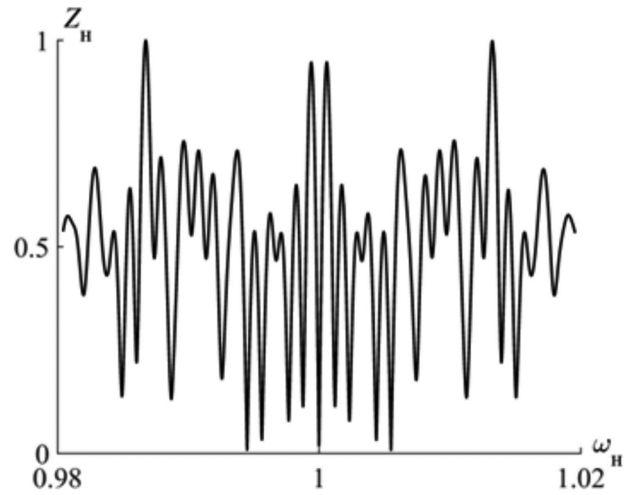


Рис. 6. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде  $M$ -последовательности ( $L = 1023; M = 1$ )

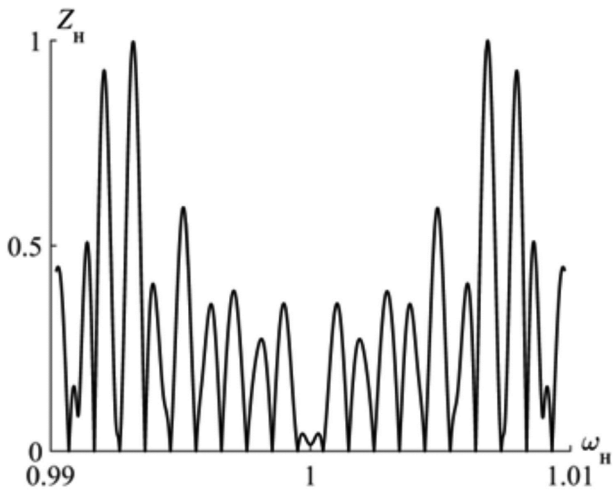


Рис. 7. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда ( $L = 1023; M = 2$ )

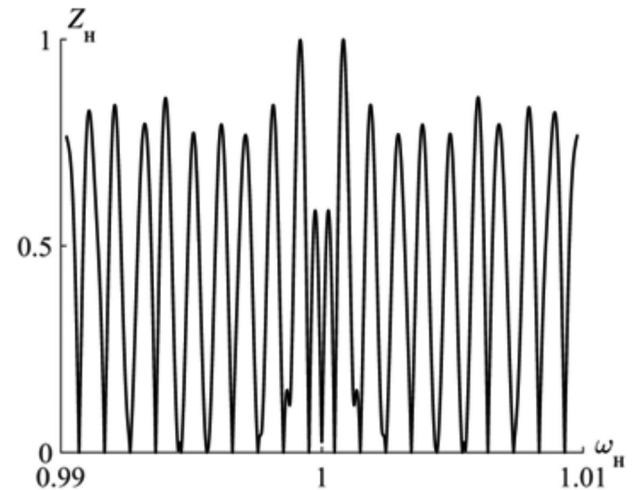


Рис. 8. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде  $M$ -последовательности ( $L = 1023; M = 2$ )

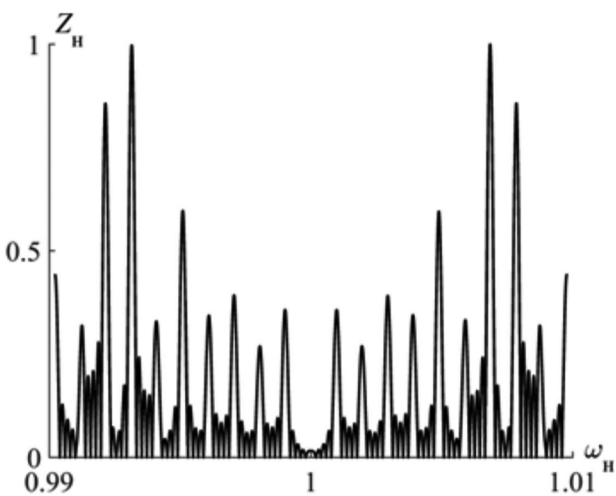


Рис. 9. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде кода Голда ( $L = 1023; M = 5$ )

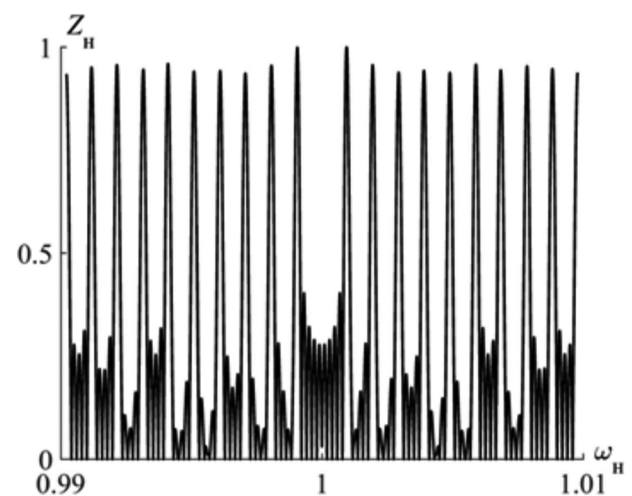


Рис. 10. Сегмент нормированной частотной характеристики процедуры (рис. 2) при опорной ПСП в виде  $M$ -последовательности ( $L = 1023; M = 5$ )

боковых «лепестках», т.е. в сравнительно широких пределах изменения частоты. При длине ПСП  $L = 1023$

(рис. 5-10) сегменты характеристик представлены лишь для заметно ограниченного интервала частот, примыка-

ющего к центральной области. Проведённое рассмотрение этих характеристик при более широких пределах изменения частоты приводит к спектральным картинам, форма которых определяется амплитудными спектрами опорных сигналов (как и для рис. 3), однако рассмотрение деталей получаемых характеристик при этом оказывается затруднительным. По этой же причине все характеристики, соответствующие случаям  $M > 1$ , представлены в более узком интервале частот.

Таким образом, проведённая вычислительная верификация показала, что для всех рассмотренных случаев результаты имитационного моделирования (18) с точностью до постоянного множителя совпадают с расчётами, выполненными на основе (11), (12) с применением вспомогательных выражений, представленных в статье. Рис. 3-10 наглядно иллюстрируют сегменты частотных характеристик процедур квадратурной корреляционной обработки в случае «настройки» последних на сигнал с фазовой манипуляцией вида (7), порождаемый псевдослучайной последовательностью. Как видно из рис. 3-10, форма частотных характеристик квадратурного коррелятора, формализованных в статье, существенно зависит от спектральных особенностей опорного сигнала. Кроме того, заметное влияние на форму полученных кривых оказывает количество производимых когерентных накоплений. Из полученных аналитических выражений, а также из рис. 3-10 видно, что непосредственное влияние на особенности поведения представленных частотных характеристик  $Z_n$  оказывают структура и параметры используемой псевдослучайной последовательности.

### Заключение

В статье получены аналитические выражения частотных характеристик классического одноканального коррелятора, а также двух процедур квадратурной корреляционной обработки, реализуемых на основе преобразования Фурье. Частотные характеристики формализованы для случаев обработки в корреляторе за время одного периода, а также для режима  $M$ -кратного когерентного накопления. Методика проведённого анализа основана на вычислении отклика коррелятора в частотной области. Проведённая вычислительная верификация, приближенная к возможной практической реализации, подтвердила правильность полученных аналитических путём выражений, на основе которых рассчитаны представленные в статье сегменты нормированных частотных характеристик.

### Литература

1. Радиотехнические системы: учебник для вузов. / Ю.П. Гришин, В.П. Ипатов, Ю.М. Казаринов и др. Под ред. Ю.М. Казаринова. М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
3. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.
4. Кравец А.П. Поиск и обнаружение сигналов спутниковой радионавигационной системы ГЛОНАСС в бортовом навига-

ционном комплексе космического потребителя / А.П. Кравец, В.Ю. Лебедев, В.И. Тисленко, В.А. Филимонов, В.В. Шаврин // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2015. – № 4 (38). – С.35-41. URL: <https://journal.tusur.ru/storage/43423/6.pdf?1464686947>.

5. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / А.С. Глинченко. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. – 482 с.

6. Кириллов С.Н. Быстрый алгоритм поиска и обнаружения фазоманипулированного сигнала спутниковой системы передачи информации, адаптивный к действию узкополосных помех / С.Н. Кириллов, А.С. Слесарев // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2009. – №1 (27). – С. 3-7. URL: <http://vestnik.rsreu.ru/archive/2009/1-vypusk-27>.

7. Власов И.Б. Применение последовательных алгоритмов для решения задачи ускоренного поиска навигационного сигнала / И.Б. Власов, Я.В. Мыкольников, И.С. Слепова // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. №1. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/290478.html>.

8. Kim B. Design of FFT-Based TDCC for GNSS Acquisition / B. Kim, S.-H. Kong // IEEE Transactions On Wireless Communications, V. 13, №5, May 2014. P. 2798–2808.

9. Leclère J. FFT Splitting for Improved FPGA-Based Acquisition of GNSS Signals / J. Leclère, C. Botteron, R.Jr. Landry, P.-A. Farine // International Journal of Navigation and Observation, V. 2015, Article ID 765898, 12 p. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/765898>.

10. Yang Y. A Novel VLSI Architecture for Multi-Constellation and Multi-Frequency GNSS Acquisition Engine / Y. Yang, X. Ba, J. Chen // IEEE Access, V. 7, 2019. Pp. 655-665.

11. Бахолдин В.С. Обнаружение радиосигналов спутниковых навигационных систем бескодовым методом / В.С. Бахолдин, Д.А. Гаврилов, В.А. Добриков, В.Ф. Иванов // Гироскопия и навигация. – 2019. – Т. 27. – № 4 (107). – С. 147-161. – URL: <http://www.elektroprbor.spb.ru/nauchnaya-deyatelnost/zhurnal/elektronnaya-versiya/156/1298>.

12. Кузьмин Е.В. О влиянии квантования по уровню на эффективность процедуры поиска шумоподобного сигнала по задержке на фоне шума и гармонической помехи / Е.В. Кузьмин // Цифровая обработка сигналов. – 2020. – №2. – С.41-45.

13. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

14. Варакин Л.Е. Теория сложных сигналов / Л.Е. Варакин. – М.: Советское радио, 1970. – 376 с.

15. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.

16. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1969. – 424 с.

17. Каганов В.И. Радиотехника: от истоков до наших дней : учеб. пособие / В.И. Каганов. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018. – 352 с.

18. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С.И. Баскаков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462с.

19. Бехар В. Алгоритмы цифровой демодуляции ЛЧМ-сигналов / В. Бехар, Х. Кабакчиев // Цифровая обработка сигналов. – 2001. – №2. – С.25-31.

20. Оптимальный приём сигналов на фоне помех и шумов / Под ред. Ю.И. Савватеева. – М.: Радиотехника, 2011. – 424 с.

21. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В.С. Шибшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич и др.; Под ред. В.С. Шибшаевича. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.

УДК 621.396.2

## НЕОРТОГОНАЛЬНЫЙ МНОЖЕСТВЕННЫЙ ДОСТУП: ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ВОЗМОЖНОСТИ

*Бакулин М.Г., доцент МТУСИ, e-mail: m.g.bakulin@gmail.com;*

*Крейнделин В.Б., профессор, заведующий кафедрой МТУСИ, e-mail: vitkrend@gmail.com;*

*Шумов А.П., доцент РГРТУ, e-mail: magnit2250@mail.ru*

### NON-ORTHOGONAL MULTIPLE ACCESS: MAIN DIRECTIONS AND CAPABILITIES

*Bakulin M.G., Kreyndelin V.B., Shumov A.P.*

*Non-orthogonal multiple access (NOMA) today becomes an important enabling technology for the fifth-generation (5G) wireless systems to meet the heterogeneous demands on low latency, high reliability, massive connectivity, improved fairness, and high throughput. The key idea behind NOMA is to take off orthogonality requirement when servicing multiple users in the same resource block, such as a time slot, subcarrier, or spreading code. The NOMA principle is a general basis, and several recently proposed 5G multiple access schemes can be viewed as special cases. This article provides an overview of the latest NOMA research and innovations such as power-domain NOMA with single and multiple antennas in uplink and downlink, code-domain NOMA and other. In paper are considered various techniques of resource allocation such as user pairing and power allocation for NOMA systems, some forms of cooperative NOMA are discussed.*

**Key words:** Non-orthogonal multiple access (NOMA), power-domain, code-domain NOMA, MIMO, cooperative NOMA networks.

**Ключевые слова:** Неортогональный множественный доступ – Non-orthogonal multiple access (NOMA), 5G и за пределами, мобильная сотовая связь, технологии радиодоступа.

#### Введение

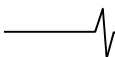
Каждое поколение сотовых сетей приходит с новыми стандартами, технологиями и характеристиками, отличающимися от стандартов, технологий и характеристик предыдущих поколений. Это связано с тем, что новые поколения систем связи вводятся для поддержания новых сервисов, включая мультимедийные приложения, приложения, основанные на Internet-of-Things (IoT), vehicle-to-everything (V2X) коммуникации [1].

Появление новых областей использования ведет к резкому росту мобильного трафика, который, в свою очередь, приводит к значительному дефициту частотного ресурса, как к одному из наиболее критических вызовов, на который должны ответить системы связи 5G и следующих поколений.

Множественный доступ является одним из основополагающих принципов беспроводных коммуникационных систем. Он имеет значительное влияние на характер использования доступного частотного спектра, пропускную способность, задержку в системах связи. Применительно к сотовым системам множественный доступ представляет собой технологию, с помощью которой множество пользователей используют общие радиоресурсы для организации линий связи с базовой станцией (BS). Некоторые из широко используемых технологий множественного доступа в предыдущих поколениях со-

*В настоящее время неортогональный множественный доступ – non-orthogonal multiple access (NOMA) – становится важной технологией, которая может дать беспроводным сетям пятого поколения (5G) новые возможности для того, чтобы соответствовать новым требованиям по низкой задержке, высокой надежности, массовой соединяемости, повышенной справедливости для пользователей, высокой пропускной способности, которые уже сейчас планируются для беспроводных систем связи будущих поколений. Ключевая идея, лежащая в основе NOMA, состоит в том, чтобы снять условие ортогональности при обслуживании множества пользователей. Принцип NOMA представляет собой общую концепцию, и несколько недавно предложенных 5G схем множественного доступа могут рассматриваться как ее специальные случаи. В этой статье обсуждаются основы power-domain NOMA – NOMA в домене мощности – с одной или многими антеннами в условиях линий вверх и вниз, рассматриваются основные принципы code-domain NOMA – NOMA в кодовом домене. В статье рассматриваются разные технологии размещения ресурсов, такие как спаривание пользователей и размещение мощностей для систем с NOMA, обсуждаются основные формы кооперативного NOMA и его вариантов.*

товых сетей включают в себя множественный доступ с временным разделением (time division multiple access (TDMA)), множественный доступ с частотным разделением (frequency division multiple access (FDMA)), множественный доступ с кодовым разделением (code division multiple access (CDMA)). Эти технологии относятся к так называемому ортогональному множественному доступу – orthogonal multiple access (OMA). При OMA доступ пользователей является ортогональным, и в идеале пользователи при совместном использовании канала связи не должны создавать друг другу помех. В этих схемах множеству пользователей назначаются ортого-



нальные радиоресурсы во временной, частотной, кодовой областях или в их комбинации. В TDMA выделенный временной слот назначается каждому пользователю для передачи его сигналов. На приемных сторонах сигналы пользователей различаются путем идентификации соответствующих временных слотов. Аналогично FDMA делит доступную полосу частот (bandwidth (BW)) на несколько неперекрывающихся частотных подканалов, назначает каждый подканал отдельному пользователю и разрешает множеству пользователей посылать их сигналы, используя назначенные подканалы. На приемных сторонах сигналы пользователей, таким образом, различаются путем идентификации соответствующих частотных диапазонов. В отличие от FDMA и TDMA, CDMA назначает каждому пользователю уникальную ортогональную расширяющую последовательность, и пользователи передают свои сигналы, используя один и тот же частотно-временной ресурс за счет использования каждым пользователем назначенной ему уникальной расширяющей последовательности. На приемных сторонах сигналы пользователей разделяются за счет использования декорреляции, которая идентифицирует сигналы пользователей на основе соответствующих назначенных кодовых последовательностей, рассматривая при этом сигналы других пользователей как шум.

Теоретически, основанные на OMA системы, благодаря ортогональному размещению ресурсов не должны испытывать межпользовательской интерференции, вследствие чего для детектирования сигнала требуемого пользователя могут быть использованы приемники со сравнительно низкой сложностью. Однако, поскольку число ортогональных ресурсов ограничено, а количество пользователей, которых предполагается обслуживать в системах 5G, существенно возрастает, то системы OMA, скорее всего, не смогут обслуживать необходимое количество пользователей систем 5G и более поздних. В противоположность OMA неортогональный множественный доступ (non-orthogonal multiple access (NOMA)) допускает межпользовательскую интерференцию при размещении ресурсов для пользователей, и таким образом множество пользователей может быть обслужено с использованием одного и того же ресурса.

Как альтернатива OMA, NOMA вводит новую размерность за счет мультиплексирования внутри одной из классических временной/частотной/кодовой областей. Другими словами NOMA может рассматриваться как расширение, которое потенциально может быть интегрировано с существующими технологиями множественного доступа. Для снижения влияния интерференции в случае NOMA применяются схемы подавления интерференции, такие как successive interference cancellation (SIC) [2].

Ранее было показано, что NOMA имеет потенциал поддержания массовых соединений при обеспечении более высокой суммарной пропускной способности и равноправия пользователей. Основанные на NOMA сотовые сети начали разрабатываться для обеспечения появляющихся разнообразных приложений, требующих больших объемов данных. Принцип NOMA примени-

тельно к 5G сотовым сетям был первоначально введен в [3], где были также продемонстрированы его новые возможности. Новые возможности NOMA повлекли за собой большое число исследований [4-7], поэтому понимание принципов NOMA и характера его использования в сотовых системах связи является очень важным.

В этой статье мы рассматриваем концепцию NOMA, особенности разных вариантов этой схемы доступа и их возможности по обеспечению выполнения некоторых требований систем сотовой связи поколений 5G и последующих, чтобы дать соответствующую информацию тем, кто собирается исследовать или использовать новые технологии радиодоступа.

## Основы NOMA

NOMA стал важным принципом, используемым при разработке технологий радиодоступа для систем связи пятого поколения (5G) [8-10]. Хотя несколько технологий множественного доступа и были предложены для систем связи 5G, включая power-domain NOMA [11-13], sparse code multiple access (SCMA) [14, 15], pattern division multiple access (PDMA) [16, 17], low density spreading (LDS) [18], lattice partition multiple access (LPMA) [19], interleaved division multiple access (IDMA) [20], эти технологии основаны на одной и той же концепции, согласно которой более одного пользователя обслуживается в каждом ортогональном ресурсном блоке, например, таком как временной слот, частотный канал, один расширяющий код или одна ортогональная пространственная степень свободы.

Применение NOMA в сотовых сетях является относительно новым, однако связанные с ним технологии изучались в теории информации долгое время. Например, ключевые компоненты NOMA, такие как суперпозиционное кодирование, successive interference cancellation (SIC), message passing algorithm (MPA) были предложены уже более двух десятилетий назад [21, 22, 23]. Тем не менее, принцип NOMA, то есть отмена ортогональности, не был использован в предыдущих поколениях сотовых сетей. Неортогональный множественный доступ NOMA может быть интегрирован в существующие и будущие беспроводные системы благодаря его совместимости с другими коммуникационными технологиями. Например, было показано, что NOMA совместим с обычными технологиями OMA, такими как TDMA и OFDMA [24]. Поэтому NOMA был также предложен для включения в 3rd Generation Partnership Project (3GPP) Long-Term Evolution Advanced (LTE-A) standard [25], где NOMA назван как Multi-User Superposition Transmission (MUST). В частности, без требования каких-либо изменений в LTE ресурсных блоках (то есть в OFDMA поднесущих) использование принципа NOMA обеспечивает двум пользователям одновременное обслуживание на одной и той же OFDMA поднесущей. Более того, NOMA не так давно был включен в новый американский цифровой TV стандарт (ATSC 3.0), где он назван как layered division multiplexing (LDM) [26]. В частности, спектральная эффективность TV вещания улучшается за счет использования принципа NOMA и наложения множественных потоков данных. Приведенные примеры ясно демонстри-

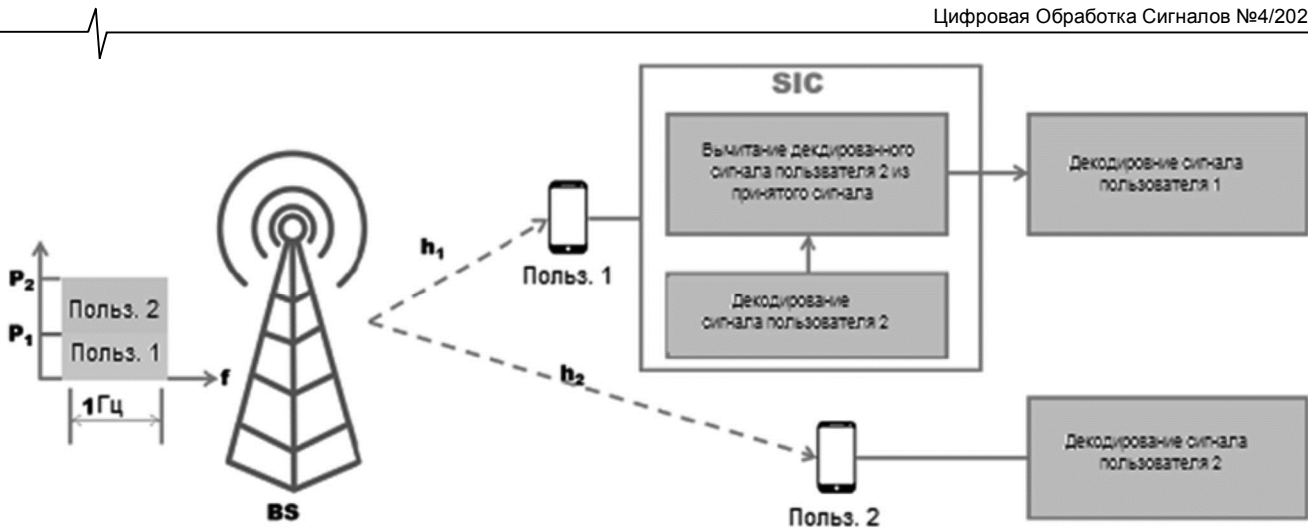


Рис. 1. Двухпользовательская линия вниз с NOMA в домене мощности [28]

руют большой потенциал NOMA не только для 5G сетей, но также для других систем, которые существуют и появятся.

Существующие схемы NOMA могут быть отнесены к двум основным категориям: power-domain NOMA (NOMA в домене мощности) и code-domain NOMA (NOMA в кодовом домене). Первая – power-domain NOMA – назначает уникальный уровень мощности пользователю, и множество пользователей передает свои сигналы, используя один и тот же частотно-временной-кодовый ресурс, с назначенной ему мощностью [4].

Уровень мощности для пользователя определяется на основе его канального коэффициента передачи: пользователю с более высоким канальным усилением часто назначается более низкий уровень мощности. На приемных сторонах сигналы разных пользователей могут быть разделены путем использования разницы пользовательских мощностей на основе SIC.

NOMA в кодовом домене основывается на кодовых книгах, расширяющих последовательностях, шаблонах чередования – interleaving patterns или скремблирующих последовательностях для неортогонального назначения ресурсов пользователям [27].

В классических CDMA системах несколько пользователей используют одни и те же частотно-временные ресурсы за счет использования уникальных пользовательских расширяющих последовательностей. По сравнению с классическим CDMA отличительной чертой code-domain NOMA является то, что расширяющие последовательности ограничены разреженными последовательностями, называемыми также низкоплотными последовательностями или неортогональными последовательностями с низкой взаимной корреляцией.

В этой статье вначале будут рассмотрены основные принципы технологии NOMA в домене мощности, а затем кратко будут рассмотрены основные принципы технологии NOMA в кодовом домене, а также некоторых других технологий неортогонального множественного доступа.

#### NOMA в домене мощности для линии вниз

На рис. 1 представлена система NOMA, состоящая из одной базовой станции BS и двух пользователей, оборудованных одной антенной каждый.

Предположим, что  $x_1$  и  $x_2$  представляют собой сигналы, которые должны быть переданы от BS пользователям 1 и 2 соответственно. BS передает сигнал, сформированный в результате суперпозиционного кодирования [29] в виде

$$s = \sqrt{P_1}x_1 + \sqrt{P_2}x_2, \quad (1)$$

где  $P_i, i = 1, 2$  – передаваемая мощность пользователя  $i$ , а передаваемые сигналы пользователей  $x_i, i = 1, 2$ ,

имеют единичную мощность, то есть  $E\{x_i^2\} = 1$ , где  $E\{\cdot\}$  – оператор усреднения. Полная передаваемая мощность пользователей 1 и 2 может быть записана в этом случае как  $P = P_1 + P_2$ . Практически для конкретной системы мощность  $P$  задана и поделена на  $P_1$  и  $P_2$  согласно принятой схеме размещения мощностей – схеме power allocation (PA). Принятый сигнал пользователем  $i$  может быть выражен как

$$y_i = h_i s + n_i, \quad (2)$$

где  $h_i$  – комплексный канальный коэффициент передачи между BS и пользователем  $i$ , а  $n_i$  представляет собой гауссовский шум плюс интерференция со спектральной плотностью мощности  $N_{f,i}$ . Для многосотового сценария межсотовая интерференция также включена в  $n_i$ . Для разделения сигналов разных пользователей в приемниках используется SIC. Оптимальный порядок декодирования при SIC в линии вниз отличается от порядка декодирования для линии вверх и обычно задается в порядке возрастания канального усиления, нормализованного к мощности шума плюс мощность межсотовой интерференции, определяемого как  $|h_i|^2 / N_{f,i}$  [12, 13, 15-18]. При таком порядке каждый пользователь может в основном удалить интерференцию от сигналов других пользователей, чья очередь декодирования наступает перед этим пользователем [7]. Это возможно потому, что скорость передачи пользователя  $j$  контролируется так, что его сигнал может быть корректно декодирован в приемнике пользователя  $j$ , таким образом, он также может быть декодирован любым другим пользователем  $i$  с  $|h_i|^2 / N_{f,i} > |h_j|^2 / N_{f,j}$ . Более конкретно, для случая двухпользовательского NOMA с  $|h_1|^2 / N_{f,1} > |h_2|^2 / N_{f,2}$ , пользователь 2 не выполняет подавление интерферен-

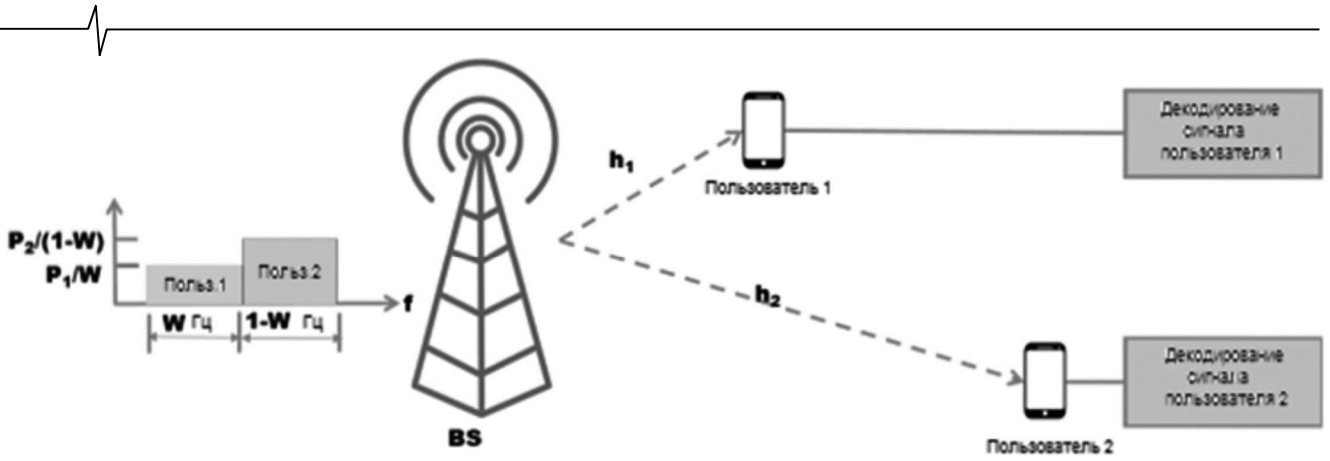
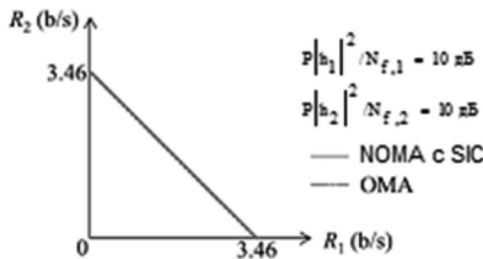


Рис. 2. Двухпользовательская линия вниз с FDMA

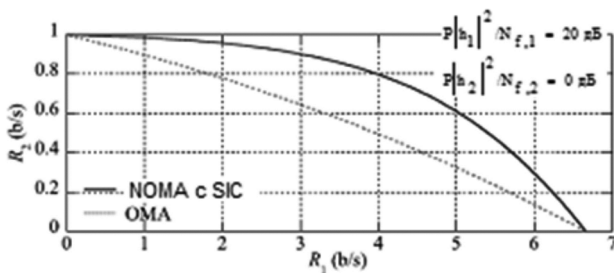
ции, так как он становится первым в порядке декодирования; тогда как пользователь 1 первым декодирует сигнал пользователя 2 и вычитает его из принятого сигнала перед декодированием своего собственного сигнала. Поэтому пропускная способность пользователя  $i$ ,  $R_i$ , представляется как

$$\begin{aligned} R_1 &= \log_2(1 + P_1 |h_1|^2 / N_{f,1}), \\ R_2 &= \log_2(1 + P_2 |h_2|^2 / (P_1 |h_2|^2 + N_{f,2})) \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 2 представлена система OMA с FDMA, состоящая из одной базовой станции BS и двух пользователей, оборудованных одной антенной каждый для передачи сигналов от базовой станции пользователям, то есть линии вниз.



а) симметричные каналы



б) несимметричные каналы

Рис. 3. Области пропускной способности для линии вниз [7]

В линии вниз OMA с полосой of  $W$  ( $0 \leq W \leq 1$ ) Гц, назначенной пользователю 1, и остающейся полосой  $1-W$  Гц, назначенной пользователю 2, скорость  $R_i$  может быть выражена соотношениями

$$\begin{aligned} R_1 &= W \log_2(1 + P_1 |h_1|^2 / N_{f,1}), \\ R_2 &= (1-W) \log_2(1 + P_2 |h_2|^2 / (1-W)N_{f,2}) \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 3(а) и 3(б) приведены области пропускной способности для случаев симметричного и асимметричного

каналов соответственно. В симметричном канале отношения сигнал/шум – signal-to-noise ratios (SNRs),  $P |h_i|^2 / N_{f,i}$  двух пользователей одинаковы, тогда как в асимметричном канале они различны.

На рис 3(а),  $P |h_1|^2 / N_{f,1}$  и  $P |h_2|^2 / N_{f,2}$  приняты равными 10 дБ. На рис. 3(б),  $P |h_1|^2 / N_{f,1}$  и  $P |h_2|^2 / N_{f,2}$  установлены равными 20 and 0 дБ, соответственно. В случае симметричного канала области пропускной способности для OMA и NOMA с SIC являются идентичными. В случае асимметричного канала максимум полной пропускной способности канала достигается, когда вся передаваемая мощность и полоса размещаются только пользователю 1. Этот максимум достигается обеими схемами множественного доступа, однако, область пропускной способности NOMA с SIC гораздо шире, чем для OMA в случае асимметричного канала. Например, если мы хотим задать  $R_2$  равной 0,8 b/s, то достижимая  $R_1$  для NOMA с SIC примерно в два раза больше, чем для OMA. Это связано с тем, что пропускная способность пользователя 1 с высоким  $P |h_1|^2 / N_{f,1}$  ограничена полосой, а не мощностью, и суперпозиционное кодирование с пользователем 2 позволяет пользователю 1 использовать полный диапазон частот при размещении ему только небольшого количества передаваемой мощности из-за совместного использования мощности с пользователем 2. Таким образом, пользователь 1 создает только небольшое количество интерференции,  $P_1 |h_2|^2 / N_{f,2}$ , пользователю 2. Напротив, OMA должен разместить значительную часть полосы пользователю 2, чтобы увеличить его пропускную способность, а это вызывает существенное снижение пропускной способности пользователя 1, которая ограничена полосой. Поэтому в сотовой линии вниз, где каналные условия для пользователей различны из-за эффекта близкий-далекий, NOMA может улучшить обмен между эффективностью системы и равноправием между пользователями по сравнению с OMA.

Отметим, что мы рассматриваем симметричные и асимметричные каналные условия (разные каналные условия для пользователей 1 и 2) для сравнения областей скорости данных. Из сравнения областей скорости данных можно видеть, что OMA и NOMA в симметричных каналных условиях обеспечивают одинаковые об-



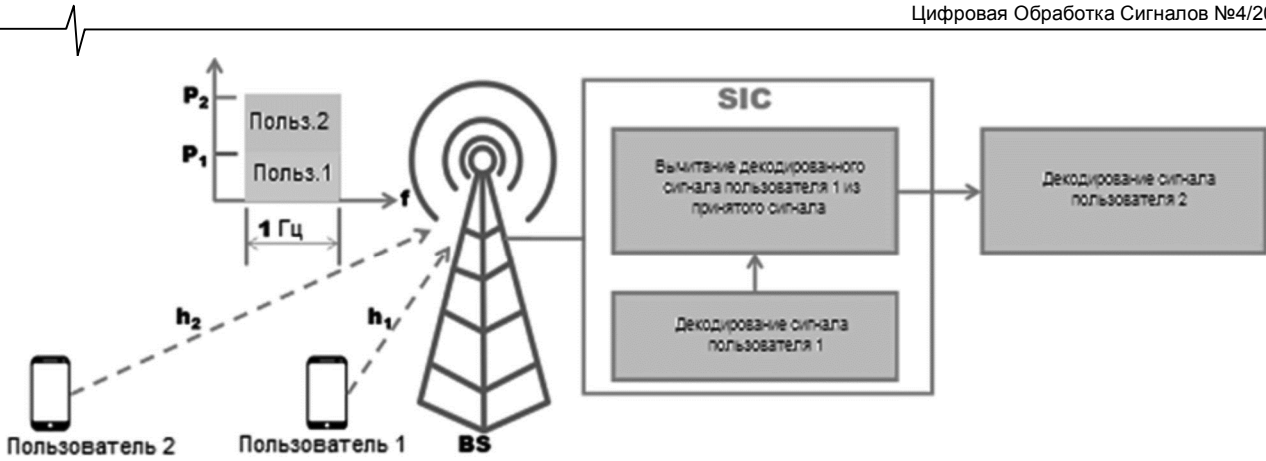


Рис. 4. Двухпользовательская линия вверх с NOMA в домене мощности

ласти скорости данных, то есть мультиплексирование в энергетической области становится невыгодным, если сигналы обоих пользователей подвергаются действию одинаковых интерференции и шума [7]. Поэтому по сравнению с OMA, NOMA в сотовых линиях вниз обеспечивает более высокую суммарную пропускную способность и дает лучший обмен между системной эффективностью и справедливостью между пользователями, когда каналные условия для пользователей различны. В работе [30] показано, что NOMA значительно превосходит и другие формы технологий OMA, включая TDMA и OFDMA, по пропускной способности в различных условиях. Как обобщение двухпользовательского сценария на  $K$ -пользовательский для NOMA в линии вниз с параметрами

$$|h_1|^2 / N_{f,1} > |h_2|^2 / N_{f,2} > \dots > |h_k|^2 / N_{f,k} \dots > |h_1|^2 / N_{f,k}$$

(и следовательно,  $P_1 < P_2 < \dots < P_k \dots < P_K$ ) и 1 Гц BW, скорость данных пользователя 1 остается такой же, как согласно (3), тогда как скорость данных любого другого пользователя  $k$  определяется соотношением

$$R_k^{NOMA} = \log_2 \left( 1 + \frac{P_k |h_k|^2}{\sum_{j=1}^{k-1} P_j |h_k|^2 + N_{f,k}} \right). \quad (7)$$

Хотя теоретически ограничений на количество NOMA пользователей нет, с практической точки зрения NOMA в линии вниз применяется к небольшому числу пользователей (обычно к двум или трем) в кластере; для большого числа пользователей имеет место увеличение скорости ошибок из-за их распространения, преимущественно возникающего из-за несовершенного SIC. Также с ростом числа пользователей в кластере последнее пользовательское устройство требует большей вычислительной мощности и больших затрат энергии, что может быть невыполнимым на практике, особенно для устройств с ограниченными ресурсами. Необходимо отметить, что NOMA в домене мощности в линии вниз был стандартизован в 3rd Generation Partnership Project (3GPP) LTE Release 13, где он назван как multiuser superposition transmission (MUST) [25].

#### NOMA в домене мощности для линии вверх

На рис. 4 представлены линии вверх при NOMA, где пользователи 1 и 2 одновременно передают свои сигналы  $x_1$  и  $x_2$  на BS.

Принятый сигнал на BS определяется соотношением

$$y = \sum_{i=1}^2 \sqrt{P_i} h_i x_i + n, \quad (8)$$

где  $P_i$  – передаваемая мощность для пользователя  $i$  с  $E\{|x_i|^2\} = 1$ ,  $n$  представляет собой гауссовский шум плюс интерференцию со спектральной плотностью мощности  $N_f$ . BS передает по линии вниз опорный сигнал, на основе которого пользователь выполняет оценку канала. Таким образом, пользователи могут регулировать свою передаваемую мощность  $P_1$  или  $P_2$  в зависимости от их канальных усиления. Пользователь 1 снова отмечается как сильный, имеющий более высокое канальное усиление по сравнению с более слабым пользователем 2. Над принятым суперпозиционным сигналом BS выполняет SIC для разделения пользовательских сигналов. BS первым декодирует сигнал пользователя 1, рассматривая сигнал пользователя 2 как шум [31], а затем вычитает декодированный сигнал пользователя 1  $\hat{x}_1$  из принятого сигнала  $y$ . Далее из того, что осталось, декодируется сигнал пользователя 2  $\hat{x}_2$ . Таким образом, в линии вверх NOMA пользователь 1 испытывает интерференцию от пользователя 2, тогда как пользователь 2 не получает интерференции от пользователя 1, так как сигнал пользователя 1 предварительно удален перед декодированием сигнала пользователя 2. В противоположность этому пользователь 2 в линии вниз NOMA испытывает интерференцию от пользователя 1, тогда как пользователь 1 не испытывает интерференции от пользователя 2, так как сигнал пользователя 2 предварительно удален перед декодированием сигнала пользователя 1. Если SIC выполнено без ошибок, то достижимая скорость данных пользователя  $i$  NOMA  $R_i^{NOMA}$  для используемой полосы в 1 Гц выражается как

$$R_1^{NOMA} = \log_2 \left( 1 + \frac{P_1 |h_1|^2}{P_2 |h_2|^2 + N_f} \right), \quad (9)$$

$$R_2^{NOMA} = \log_2 \left( 1 + \frac{P_2 |h_2|^2}{N_f} \right). \quad (10)$$

Достижимая суммарная пропускная способность равна  $R^{NOMA} = R_1^{NOMA} + R_2^{NOMA}$ . Можно видеть, что такие же уравнения, как (4), могут также быть использованы для

вычисления достижимых скоростей данных линии вверх OMA пользователей 1 и 2 после замены  $N_{f,i}$  на  $N_f$ . Также как для линии вниз NOMA, может быть показано, что линия вверх NOMA превосходит аналог с OMA с точки зрения достижимой скорости данных и суммарной пропускной способности на основе сравнения соотношений (9) и (10) с их аналогами для OMA [7].

Как обобщение 2-х-пользовательского случая, для  $K$ -пользовательской линии вверх NOMA с  $|h_1|^2 / N_f > |h_2|^2 / N_f > \dots > |h_k|^2 / N_f > \dots > |h_1|^2 / N_f$  (и следовательно,  $P_1 < P_2 < \dots < P_k < \dots < P_K$ ) и 1 Гц BW, скорости данных пользователей  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K-1$ ,  $K$  могут быть записаны как

$$R_k^{NOMA} = \log_2 \left( 1 + \frac{P_k |h_k|^2}{\sum_{j=k+1}^K P_j |h_j|^2 + N_f} \right), \quad (11)$$

$$R_K^{NOMA} = \log_2 \left( 1 + \frac{P_K |h_K|^2}{N_f} \right). \quad (12)$$

В отличие от линии вниз NOMA линия вверх NOMA может обеспечить обслуживание относительно большего числа пользователей, так как BS может быть оборудована требуемыми вычислительными мощностями и энергией. Кроме того, BS может применить более эффективные схемы декодирования для снижения влияния интерференции. Поэтому линии вверх NOMA являются более предпочтительными по сравнению с линиями вниз NOMA для коммуникаций машинного типа [32].

Вместе с тем необходимо отметить, что при применении NOMA для ослабления интерференции требуются более сложный передатчик и приемник. Более того, NOMA в домене мощности обычно работает хорошо, когда только два или несколько пользователей делят один и тот же ресурсный блок, так как с увеличением числа пользователей, мультиплексированных в домене мощности, интерференция множественного доступа (multiple access interference (MAI)) возрастает, и характеристики NOMA ухудшаются.

### Размещение мощности при NOMA

NOMA способен поддерживать неравные скорости передачи для пользователей, имеющих разные каналные условия, путем назначения им разных излучаемых мощностей. Поэтому механизм распределения мощностей для разных пользователей является критическим для NOMA в домене мощности. Как упоминалось ранее, SIC приемник работает в порядке понижения мощности сигнала. Конкретно, большая мощность назначается пользователям с плохими каналными условиями. В этом случае, интерференция от пользователей с хорошими каналами значительно снижается, поскольку им назначаются меньшие мощности. Между тем, точность детектирования для пользователей с плохими каналами может также быть улучшена. Так как распределение мощности в NOMA базируется на распределении каналных условий, случаи с хорошими и плохими каналами имеют отличия и должны быть исследованы отдельно, как в [33].

Когда доступна точная CSI, проблема оптимизации может быть сформулирована так, чтобы максимизировать индивидуальную/суммарную скорость при учете справедливости между разными пользователями. При средних каналных условиях проблема оптимизации может быть сформулирована для минимизации максимальной вероятности отказа. Достаточно подробная информация по достигнутому уровню работ по распределению мощности в NOMA с разными стратегиями относительно уровня справедливости приведена в работе [34]. В ней оцениваются разные стратегии размещения мощности и соответствующие им уровни сложности и справедливости между пользователями. Так, размещение большей мощности слабым пользователям дает средний уровень справедливости при низкой сложности [11, 12, 13, 35], обеспечение приоритета высокого уровня справедливости требует высокой сложности [33, 36, 37], максимизация средней геометрической скорости данных пользователей дает средний уровень справедливости при сравнительно низкой сложности [38-41], вопросы обмена пропускной способностью и справедливостью между пользователями рассматривались в работах [42-44].

Необходимо отметить, что наиболее критический вопрос распределения мощности при NOMA возникает из-за невыпуклого свойства упорядоченных ограничений мощности, которые делают проблему оптимизации неотслеживаемой. Поэтому, видимо, следует ожидать дальнейших исследований в направлении оптимального распределения мощности между пользователями.

### NOMA с использованием многоантенных технологий

Многоантенные технологии могут дать дополнительную степень свободы в пространственной области и обеспечить дальнейшее улучшение характеристик NOMA. В последнее время многоантенный NOMA привлек значительное внимание исследователей [45, 36, 46, 7, 47-59]. В отличие от NOMA, основанного на SISO – single-input-single-output, где каналы обычно представляются как скаляры, один из исследовательских вызовов в многоантенном NOMA обусловлен проблемой упорядочивания пользователей, так как каналы обычно представляются в форме векторов и матриц. В настоящее время возможные варианты многоантенной NOMA можно разделить на две категории, в которых один или много пользователей обслуживаются одним вектором формирования луча. Путем расположения разных пользователей в разных лучах в одном и том же ресурсном блоке качество обслуживания – quality of service (QoS) – каждого пользователя может быть гарантировано в многоантенных системах NOMA путем принуждения лучей поддерживать predetermined порядок декодирования. Этот тип многоантенной схемы NOMA был впервые предложен в работе [54], чтобы исследовать оптимизацию мощности для максимизации эргодической пропускной способности. Предложенная многоантенная схема NOMA может позволить достичь значительного улучшения характеристик по сравнению с обычными схемами OMA.

Кластер пользователей может использовать один и тот же луч. Пространственные каналы разных пользова-

телей внутри одного кластера рассматриваются как сильно коррелированные. Поэтому лучи для разных кластеров должны быть построены так, чтобы гарантировать ортогональность каналов для разных кластеров друг другу, чтобы подавить межкластерную интерференцию. Для NOMA на основе multiple-input-single-output (MISO), многоадресная схема формирования лучей была предложена в [46], где сначала ZF формирование лучей было применено для ослабления интерференции от соседних кластеров, а затем построены оптимальные векторы формирования лучей, чтобы минимизировать полную передаваемую мощность внутри каждого кластера. Схема NOMA, основанная на MIMO для одновременного применения разомкнутого случайного формирования лучей и внутрилучевой SIC была предложена в работе [45]. Однако, здесь характеристики системы значительно ухудшены, так как случайное формирование лучей может внести неопределенность на сторону пользователя. Позже направление предварительного кодирования и детектирования с фиксированным распределением мощности было предложено в [48], чтобы решить проблемы, вызванные случайным формированием лучей, и продемонстрировать, что NOMA на основе MIMO может достичь лучших характеристик, чем OMA на основе MIMO даже для пользователей, которые испытывают сильную соканальную интерференцию. Кроме того, в работах [55, 56] доказано превосходство MIMO-NOMA над MIMO-OMA с точки зрения суммарной пропускной способности канала и эргодической суммарной пропускной способности. Более того, двухкоординатные подходы к формированию лучей были предложены в [49] для борьбы с межсотовой интерференцией в двухсотовых MIMO-NOMA сетях, в которых две BS совместно оптимизируют свои векторы формирования лучей для улучшения скоростей данных пользователей на краю сот. Этот подход расширен на произвольное количество сот в [50], где охарактеризовано максимальное количество пользователей, поддерживаемых предложенной схемой в многосотовых MIMO сетях. Больше подробностей о многосотовых MIMO-NOMA подходах можно найти в работе [51].

Информацию по достигнутому уровню работ по многоантенным NOMA можно найти в работах [34, 4, 36, 46, 7, 47-57] для разных сценариев использования, разных MIMO технологий, разных метрик качества, разных характеристик режимов использования.

### Кооперативный NOMA

В сотовых сетях пользователь на границе соты обычно принимает сигнал с низкой мощностью и меньшей скоростью данных по сравнению с пользователями, находящимися вблизи BS. Ретрансляционная и координатная технология многоточечной – multipoint relaying and coordinated (CoMP) – передачи и приема широко применяется для повышения скоростей передачи для пользователей на краях соты [60]. Сценарий с пользователями, передающими на разных скоростях естественно согласуется со сценариями приложений, типичных для NOMA.

Основная идея NOMA с ретрансляцией состоит в

использовании абонентов с лучшей CSI как ретрансляторов – decode-and-forward (DF) – или – amplify-and-forward (AF) – для повышения скорости передачи пользователей с плохой CSI. Модель совместного NOMA, поддерживающая  $M$  пользователей с  $M$  временными слотами, была предложена в [61]. В первом временном слоте выполняется традиционная некооперативная схема NOMA. Во втором временном слоте пользователь с лучшей CSI действует как DF ретранслятор для пользователя со второй лучшей CSI. В следующие временные слоты пользователь с  $m$ -й лучшей CSI работает как ретранслятор для пользователя с последующей худшей CSI для повышения скоростей передачи.

CoMP передача, где несколько BS вместе поддерживают пользователей на краях сот, способна улучшить характеристики этих пользователей. NOMA был первым примененным совместно с CoMP [62], где две скоординированные BS использовали код Alamouti, чтобы поддержать пользователя на краю соты в канале NOMA. В результате эффективность NOMA в CoMP системах была также продемонстрирована в работе [63] в сравнении с обычной NOMA с совместной передачей. Скоординированная схема с прямой передачей и схема с ретрансляцией – coordinated direct and relay transmission (CDRT) – также была рассмотрена в [64], где BS связывается с близким пользователем и ретранслирует, одновременно используя NOMA в первом временном слоте, связываясь с далеким пользователем с помощью ретрансляции в последующие временные слоты. Эта основанная на NOMA CDRT решает основной вызов путем использования свойства NOMA, которое позволяет приемнику получать дополнительную информацию, такую как сигналы других пользователей для подавления интерференции.

Подробная сводка существующих работ по NOMA в кооперативных коммуникациях приведена в работе [34], а также в работах [35, 61, 62, 64-67] для разных технологий, метрик и разных характеристик используемых схем.

### NOMA на основе когнитивного радио

Чтобы решить вопрос дефицита спектра в беспроводных коммуникациях, было предложено когнитивное радио (CR) [68, 69], которое позволяет нелицензированным пользователям использовать лицензированные полосы частот, пока они не создают недопустимых помех лицензированным пользователям. Технологией, дающей возможности для CR, является зондирование спектра [70-72], а вопрос поиска баланса между нагрузкой от мониторинга и CR пропускной способностью был исследован в работах [73, 74].

Если нелицензированный пользователь находится на достаточной дистанции от лицензированного, с которым он делит один и тот же лицензированный спектр, то интерференция между ними будет в общем небольшой. Поэтому CR в этом случае может рассматриваться как специальный случай NOMA в локальной области, тогда как NOMA, введенный в предыдущих разделах, относится к области мощности, кода или нескольким областям. Коммуникации device-to-device (D2D) [75, 76], являющиеся популярной областью исследований, становятся спе-

циальным случаем CR, если два пользователя в D2D коммуникациях рассматриваются как простая CR сеть. В дополнение к локальному домену CR может также использовать пространственный домен [77], [78] и частотно-пространственный домен [79].

Модель сети, лежащая в основе CR, подобна NOMA, которая распределяет мощность разных пользователей под некоторыми SINR ограничениями. Схема когнитивного радио в стиле NOMA (CR-NOMA) была предложена в [80], и она отличается от традиционной схемы с фиксированным распределением мощности. В [81] изучались, основанные на NOMA CR сети, и была выведена замкнутая форма выражений для вероятности отказа. В дополнение, в [82-85] схемы распределения мощности для CR-NOMA, и основанные на NOMA CR сети были развиты для улучшения характеристик систем с точки зрения суммарной скорости, энергетической эффективности (EE) и других метрик.

### Спектральная (SE) и энергетическая (EE) эффективность NOMA

Напомним, что когда планируют разработку сетей 5G, то SE и EE являются двумя важными метриками качества. NOMA может обеспечить повышенные SE и EE благодаря высокой степени свободы в энергетическом домене, особенно для сетей IoT, которые требуют массовой подключаемости, но при низкой расходуемой мощности в сенсорных узлах. Более конкретно, NOMA рассматривается как возможность повысить SE сетей 5G [86-89]. NOMA с учетом EE также была исследована в [90], где был предложен алгоритм квазиоптимального распределения ресурсов с целью максимизации EE систем. Более того, EE сетей NOMA при условии минимальной требуемой скорости данных для каждого пользователя может быть максимизирована, используя подход, предложенный в [91]. Так же как и в большинстве беспроводных сетей [92], в сетях NOMA повышенные SE и EE не могут быть достигнуты одновременно. Поэтому в будущем ожидается увеличение числа работ по обмену между SE и EE в NOMA. Более полный обзор power-domain NOMA может быть найден в [4].

### NOMA в кодовом домене

NOMA в кодовом домене может поддерживать множество передач внутри одного и того же частотно-временного ресурсного блока путем назначения разных кодов разным пользователям. Он дает некоторый выигрыш ценой расширения полосы сигнала по сравнению с NOMA в области мощности. Концепция NOMA в кодовом домене заимствована из классических CDMA систем, в которых множество пользователей используют одни и те же частотно-временные ресурсы, но применяют уникальные пользовательские расширяющие последовательности. Ключевая разница при этом по сравнению с CDMA, однако, состоит в том, что расширяющие последовательности ограничены разреженными последовательностями или неортогональными последовательностями с низкой взаимной корреляцией. Существующие решения в code-domain (CD) NOMA в основном включают low-density spreading CDMA (LDS-

CDMA) [93], low-density spreading OFDM (LDS-OFDM) [42], sparse code multiple access (SCMA) [14], которые будут охарактеризованы ниже.

**LDS-CDMA:** LDS-CDMA [93] (low-density spreading) является новым типом CDMA. Его ключевая черта состоит в том, что low-density signature, которая имеет форму, подобную low-density parity-check (LDPC) matrix, применяется для конструирования кодовой книги. Когда число пользователей больше, чем число отсчетов на период символов в обычном CDMA, MAI присутствует неизбежно, и оптимальное многопользовательское детектирование выполнить очень сложно. Однако, из-за разреженной структуры сигнатуры в LDS-CDMA, при детектировании LDS-CDMA может быть применена квазиоптимальная многопользовательская схема детектирования с низкой сложностью, основанная на message passing algorithm (MPA), что существенно улучшает характеристики.

**LDS-OFDM:** LDS-OFDM [42] имеет свойства, подобные LDS-CDMA, за исключением того, что выход сигнатуры отображается на поднесущие OFDM, а не на временные отсчеты в CDMA. Поэтому может быть использован MPA детектор с низкой сложностью. По сравнению с LDS-CDMA LDS-OFDM использует передачу со многими несущими, что делает его более подходящим для широкополосных каналов. Кроме того, совместимость с OFDM делает LDS-OFDM более гибким при распределении ресурсов [42].

**SCMA:** В SCMA (sparse code multiple access – множественный доступ с разреженным кодовым разделением) [14] путем применения разреженной кодовой книги, подобной матрице сигнатур в LDS (low-density signature), некоторое число ресурсных блоков может поддерживать больше пользователей через рассеяние. Рис. 5 демонстрирует принцип SCMA, где шесть пользователей делят четыре ресурсных блока.

Например, для рис. 5 сигнатурная матрица может быть выражена как

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Хотя часть пользователей делят один и тот же блок, другой блок может быть использован для различения разных пользователей, когда случаются противоречия.

Кроме разреженного рассеяния, SCMA использует многомерные созвездия для снижения сложности приемника и дальнейшего улучшения SE. Благодаря многомерности, созвездия в одном ресурсном блоке могут быть спроецированы в их подпространства [15].

Например, 4-х точечное QAM созвездие может быть спроецировано в 3-х точечное созвездие. Даже когда две точки сталкиваются в одном ресурсном блоке или когда, скажем, имеется одно измерение, то они могут быть различены в других используемых блоках. Благодаря меньшему числу точек созвездия сложность приемника может быть понижена. Более того, построение созвездия может фокусироваться на улучшении качества детектирования. Например, дизайн, основанный на

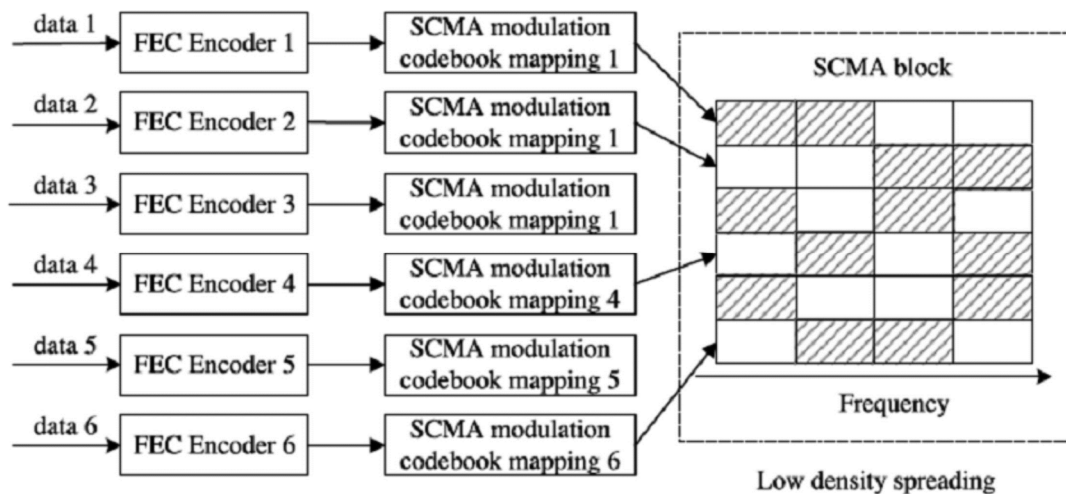


Рис. 5. Множественный доступ с разреженным кодированием – sparse code multiple access (SCMA) [94]

повороте созвездия и интерливинге (перемешивании), был предложен в [95]. Он позволяет достигать лучших характеристик по вероятности ошибки BER по сравнению с простым LDS-OFDM.

Из-за разреженной структуры расширяющей матрицы и большого минимального расстояния многомерного созвездия качество детектирования SCMA становится высоким, даже когда ресурсные блоки перегружены. В приемнике алгоритм MPA, который обычно используется при декодировании LDPC, используется при детектировании [96, 97]. Из-за разреженности MPA может достичь близкого к оптимальному качества при значительно меньшей сложности по сравнению с оптимальными максимально правдоподобным (ML) и BCJR алгоритмами. Однако сложность остается относительно высокой для пользовательских устройств. SCMA также рассматривает кластеризацию пользователей на основе CSI и распределение разных мощностей по разным кластерам. Когда передаваемые мощности между разными кластерами меняются, то сигналы разных кластеров могут быть продетектированы с использованием SIC, подобно NOMA в домене мощности. Внутри каждого кластера разные пользователи могут быть различены с использованием MPA. Как результат, комбинация SIC и MPA может существенно уменьшить сложность приемника.

### NOMA в нескольких доменах

Чтобы поддержать массовую подключаемость для сетей 5G, кроме мультиплексирования сигналов в доменах мощности или кода были предложены некоторые решения для NOMA в нескольких доменах, таких как домены мощности, кодов и пространственном. Выше обсуждался NOMA, основанный на множестве антенн, где NOMA обеспечивается в доменах мощности и пространственном. Ниже будут названы еще три типовых схемы NOMA, работающих в нескольких доменах: pattern division multiple access (PDMA) – множественный доступ с разделением с помощью шаблонов [98], building block sparse-constellation based orthogonal multiple access (BOMA) – ортогональный множественный доступ на основе блоков разреженных созвездий [99] и lattice partition multiple access (LPMA) – множе-

ственный доступ на основе деления решеток [100].

**PDMA:** В PDMA [98], неортогональные шаблоны распределяются разным пользователям для выполнения мультиплексирования. Эти шаблоны построены в множестве доменов – кодов, мощности, пространства для усиления возможностей SIC. В присутствии этого свойства основанный на SIC MPA метод многопользовательского детектирования с низкой сложностью и надежным качеством может быть использован для работы на приемной стороне.

В передатчике PDMA, подобно методу SCMA, сигналы пользователей также рассеяны с помощью разреженных сигнатурных матриц. [98]. Основная разница состоит в том, что число ресурсных блоков, занятых каждым пользователем в PDMA, может изменяться. Например, семь пользователей могут быть мультиплексированы внутри трех ресурсных блоков через следующую сигнатурную матрицу

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

При использовании разреженных сигнатурных матриц PDMA может увеличить системную пропускную способность за счет перегрузки. Более того, пользователь может также быть мультиплексирован в другие домены, такие как домены мощности и пространства. В одном и том же ресурсном блоке пользователи могут быть различены через разные мощности, как для NOMA в домене мощности, или через разные прекодеры, если применено MIMO [101].

На приемной стороне, подобно SCMA, MPA может быть использован при детектировании благодаря разреженности сигнатурной матрицы. Когда разные кластеры пользователей мультиплексированы в доменах мощности и пространству, может быть применено MPA-SIC. Детектирование пользователей, которые мультиплексированы в одну и ту же сигнатурную матрицу, основано на MPA, который может обеспечить превосход-

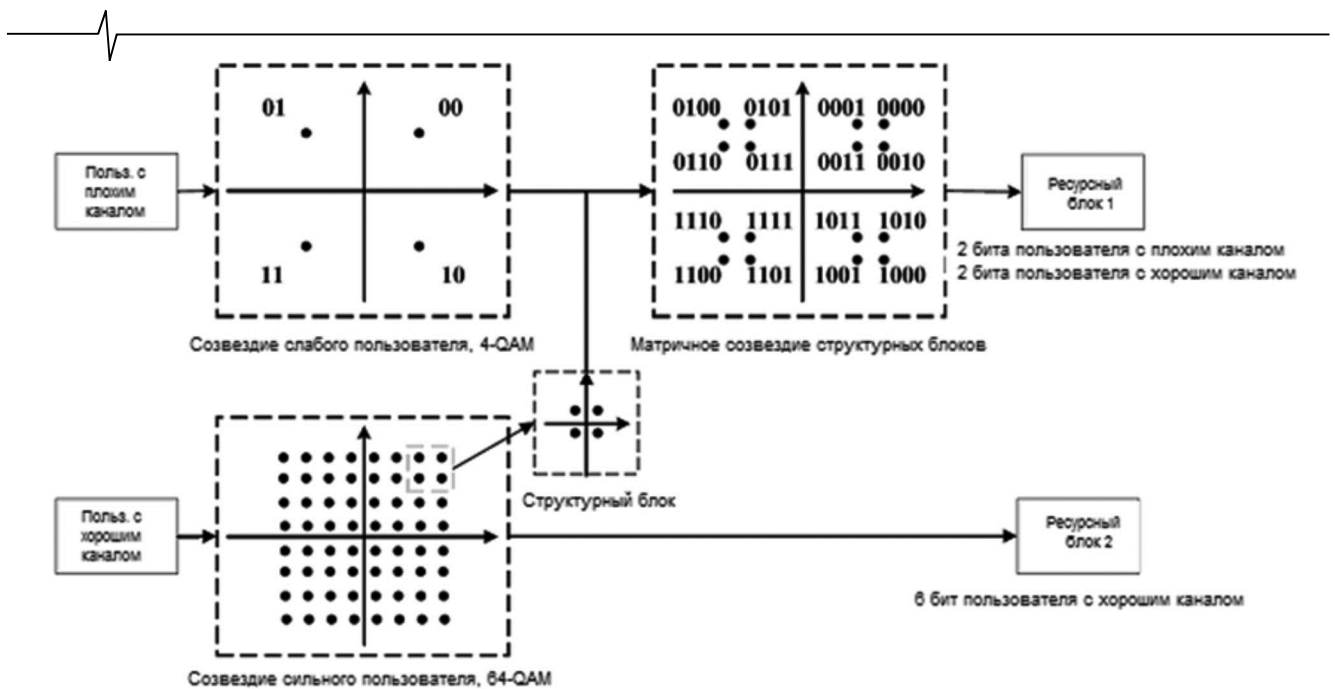


Рис. 6. Ортогональный множественный доступ на основе разреженных созвездий (BOMA) [94]

ное качество. Между разными кластерами в доменах мощности и пространства SIC может быть использовано для снижения сложности. Кроме того, турбоструктура может быть применена, чтобы скомбинировать детектор с декодером для дальнейшего улучшения характеристик. [102].

**BOMA:** Эта техника (building block sparse-constellation based orthogonal multiple access) – ортогональный множественный доступ на основе разреженных созвездий – привлекает информацию от пользователя с хорошей CSI к символам пользователя с плохой CSI. Таким образом, пропускная способность многопользовательской системы может быть значительно увеличена.

Как показано на рис. 6, чтобы достичь такого же качества BER, как для пользователя с хорошей CSI, пользователь с плохой CSI должен применить грубое созвездие с большим минимальным расстоянием.

Следовательно, небольшой структурный блок, который содержит данные пользователя с хорошей CSI может быть вставлен в созвездие пользователя с плохой CSI [103, 104]. Для пользователя с плохой CSI центр составного элемента может рассматриваться как точка созвездия, и вставленный элемент может рассматриваться как интерференция. Когда размер составного элемента много меньше, чем минимальное расстояние грубого созвездия, то деградация качества детектирования становится минимальной. Так как пользователь с хорошей CSI может детектировать точки в своем собственном созвездии, то он может также детектировать все точки в созвездии вставленного структурного элемента и декодировать биты из него.

Структура BOMA относительно проста и подобна структуре, используемой в текущих системах 4G. Требуются только незначительные изменения в программах, так что схема BOMA может быть легко реализована при совместимости с massive MIMO, высокочастотными диапазонами и другими требованиями систем 5G. Кроме того, BOMA не требует сложного распределения мощности и SIC приемника, которые необходимы для

других схем NOMA.

**LPMA:** В LPMA (lattice partition multiple access – множественный доступ с разделением решеток) [100] объединены для мультиплексирования пользователей домены мощности и кодовый. Подобно мультиплексированию по мощности в NOMA код в LPMA реализует многоуровневую решетку, которая назначает разные кодовые уровни пользователям с разными CSI. Могут быть применены несколько типов кодов, такие как Construction  $\pi_A$  [105] и Construction D [106]. Для пользователей с плохой CSI назначенные коды имеют большее минимальное расстояние, что может улучшить качество детектирования. Для пользователей с лучшей CSI назначаются коды с меньшим минимальным расстоянием без ухудшения качества детектирования. В приемнике применен SIC декодер подобно тому, как делается при NOMA в домене мощности.

Кроме мультиплексирования в кодовой области LPMA также применяет мультиплексирование по мощности, чтобы усилить пользователей с плохой CSI. С помощью двух степеней свободы в мультиплексировании схема LPMA становится более гибкой по сравнению с NOMA в домене мощности. Даже если пара пользователей имеет сходную CSI, они могут быть мультиплексированы корректировкой кодовых уровней и уровней мощностей, поэтому сложные механизмы кластеризации пользователей, используемые в схемах NOMA в области мощности, в LPMA не требуются.

### Сопоставление схем NOMA

Выше рассмотрено несколько типовых схем NOMA, основанных на разных технологиях мультиплексирования. При разных технологиях мультиплексирования эти схемы NOMA имеют разные свойства. NOMA в домене мощности имеет простую структуру и может быть легко объединен с разными технологиями, такими как MIMO и кооперативные сети. Однако для получения порядка пользователей с точки зрения CSI требуются кластеризация пользователей и разбиение на пары, что повыша-

Схема	Характеристики	Преимущества	Недостатки
Power-domain NOMA	Мультиплексирование в домене мощности	Высокая SE Совместимость с другими технологиями	Необходимость спаривания пользователей Распространение ошибок при SIC
LDS-CDMA	Разреженное рассеяние CDMA	Не требуется CSI Квазиоптимальный MPA детектор	Избыточность из-за кодирования
LDS-OFDM	Разреженное рассеяние OFDM	Не требуется CSI Квазиоптимальный MPA детектор Более соответствует широкой полосе, чем LDS-CDMA	Избыточность из-за кодирования
SCMA	Разреженное рассеяние Многомерное созвездие	Не требуется CSI Квазиоптимальный MPA детектор Большой уровень разнесения, чем у простого LDS	Избыточность из-за кодирования Сложность построения оптимальной кодовой книги
PDMA	Разреженное рассеяние Мультиплексирование в доменах мощности кодовом, пространственном	Большой уровень разнесения Квазиоптимальный MPA детектор Приемник с низкой сложностью	Избыточность из-за кодирования Сложность построения оптимальной кодовой книги
BOMA	Tiled building block – плиточные строительные блоки	Простая структура Совместимость с действующими системами Низкая сложность приемника	Необходимость спаривания пользователей Не слишком гибкий
LPMA	Многоуровневый решетчатый код Мультиплексирование в доменах мощности и кодовом	Нет необходимости в кластеризации пользователей	Специфическое каналное кодирование

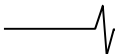
ет сложность системы. NOMA в кодовой области и NOMA в нескольких доменах, такие как SCMA и PDMA, могут дать выигрыш за счет рассеяния без требования знания точной CSI. Кроме того, квазиоптимальные MPA детекторы с низкой сложностью могут обеспечить лучшее качество, чем SIC детекторы. Однако кодирование также вносит избыточность, которая ухудшает системную SE. Другие схемы NOMA также имеют свои специфические черты. Например, BOMA имеет простую структуру и может быть легко совместима с текущими LTE системами, тогда как разбиение пользователей на пары все равно требуется, что снижает гибкость. LPMA может достичь многоуровневости в обоих доменах мощности и кодовом, что снижает стоимость кластеризации пользователей. Однако многоуровневый код требует соответствующего двоичного или вложенного двоичного каналного кодирования. Ключевые технологии и свойства рассмотренных схем NOMA приведены в табл. [94]. По результатам анализа можно отметить, что каждая схема NOMA имеет свои преимущества и ограничения, которые соответствуют разным условиям использования. Для реализации обмена между качеством и сложностью необходима адаптивная конфигурация. Например, если имеется большая разница между условиями каналов пользователей из-за эффекта близкий-далекий или в подвижных сетях, NOMA в области мощности с SIC приемником может быть использован при сравнительно небольшой сложности. С другой стороны, если сценарии использования требуют высокой надеж-

ности, особенно, когда каналные условия плохие или локальное распределение пользователей концентрировано, то SCMA является возможным решением благодаря квазиоптимальному MPA детектированию.

#### Возможные направления будущих работ

В этой статье были рассмотрены несколько схем NOMA. Несмотря на использование разных технологий, общим для них является использование неортогональности для увеличения системной пропускной способности и поддержки большего числа пользователей в ограниченных ресурсных блоках. Кроме существующих работ, необходимо большее число исследований для улучшения характеристик этих схем NOMA в следующих, на наш взгляд, направлениях.

1. Метод детектирования MPA-SIC обычно применяется SCMA и PDMA, в которых механизм кластеризации существенно влияет на качество метода. Когда пользователи асинхронны, то пользователи с одинаковым временем задержки должны быть распределены в один и тот же кластер для лучшего качества. Если задержки сильно меняются между пользователями внутри одного и того же кластера, то интерференция между разными пользователями становится большой и может нарушить разреженную структуру. Техника со многими ветвями (multi-branch) [107] может быть применена, чтобы улучшить характеристики путем рассмотрения каждого кластера как ветви. Рассчитывая каждую ветвь параллельно и выбирая лучший результат как финальный, можно



улучшить качество по сравнению с подходом с одним кластером.

2. Совместный синтез возможных новых видов модуляции и схем NOMA может быть важным направлением для исследования в сетях 5G. Некоторые из схем NOMA, особенно LDS в кодовом домене, основаны на OFDM, где выход разреженной расширяющей матрицы отображен на ортогональные поднесущие. В общем, необходимо исследовать, как правильно комбинировать модуляцию и схему NOMA.

3. Несмотря на обширные усилия по NOMA большинство существующих исследований фокусируются на анализе качества и дизайне алгоритмов разных технологий NOMA по отдельности, – NOMA в домене мощности или NOMA в кодовом домене. Однако, разные сценарии имеют свои предпочтительные технологии NOMA, например, если пользователи испытывают очень разные каналные условия из-за эффекта близкий-далекий, то NOMA в домене мощности может быть лучшим кандидатом. Если пользователи испытывают плохие каналные условия, но требуют высокой надежности, то SCMA является предпочтительным из-за его выигрыша от формирования нужного сигнала и близкого к оптимальному МРА детектирования. В работе [108] предложен единый подход, включающий оба – NOMA в доменах мощности и кодовом для поддержки разных сценариев с помощью одной и той же инфраструктуры в разнородных сверхплотных сетях. Однако, необходимо больше исследовательских усилий для реализации такого единого подхода к NOMA.

4. Разработка схем модуляции и схем MA для высокочастотных диапазонов (свыше 40 GHz) начинает получать возрастающее внимание. Millimeter-wave (mmWave) и Terahertz (THz) диапазоны оказываются хорошими кандидатами для снижения спектральных ограничений [109, 110]. Однако свойства распространения миллиметровых и терагерцевых волн оказались весьма слабыми, что принесло новые проблемы разработчикам систем. Например, шум является основным ограничением миллиметрового и терагерцевого диапазонов, что делает уровни передаваемой мощности очень важными и, в конечном счете, влияющими на категории приложений, которые могут использовать эти диапазоны, например, IoT. Более того, высокий уровень искажений, включая расстройку несущей частоты и фазовый шум, также должны быть учтены, так как шум имеет на них большое влияние. Тем не менее, уже есть исследования по NOMA на миллиметровых волнах [111], и можно надеяться на появление анализа таких систем, основанного на практических сценариях.

## Заключение

В этой статье мы постарались дать подробный обзор важнейших направлений неортогонального множественного доступа в сетях пятого 5G и возможных будущих поколений. Из приведенного обсуждения можно сделать вывод, что неортогональный множественный доступ представляет собой перспективный подход, который означает отклонение от предыдущих поколений беспроводных сетей. По-видимому, можно утверждать,

что за счет использования неортогональности множественного доступа сети 5G будут способны обеспечить более высокую пропускную способность и массовую подключаемость при улучшенной спектральной эффективности [112-118], однако это может потребовать дополнительных исследований.

## Литература

1. Boccuzzi J. (2019) Introduction to Cellular Mobile Communications. In: Vaezi M., Ding Z., Poor H. (eds) Multiple Access Techniques for 5G Wireless Networks and Beyond. Springer, Cham.
2. D. Tse and P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2005.
3. A. Benjebbovu, A. Li, Y. Saito, Y. Kishiyama, A. Harada, and T. Nakamura, «System-level Performance of Downlink NOMA for Future LTE Enhancements», in Proc. IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), Atlanta, USA, 2013, pp. 66-70.
4. S.M.R. Islam, N. Avazov, O.A. Dobre and K. Kwak, «Power-Domain Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) in 5G Systems: Potentials and Challenges», IEEE Communications Surveys and Tutorials, vol. 19, no. 2, pp. 721-742, Second quarter 2017.
5. Z. Ding, X. Lei, G. K. Karagiannidis, R. Schober, J. Yuan and V. K. Bhargava, «A Survey on Non-Orthogonal Multiple Access for 5G Networks: Research Challenges and Future Trends», IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 35, no. 10, pp. 2181-2195, Oct. 2017.
6. Y. Liu, Z. Qin, M. Elkaslan, Z. Ding, A. Nallanathan and L. Hanzo, «Nonorthogonal Multiple Access for 5G and Beyond», Proceedings of the IEEE, vol. 105, no. 12, pp. 2347-2381, Dec. 2017.
7. K. Higuchi and A. Benjebbour, «Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) with Successive Interference Cancellation», IEICE Transactions on Communications, vol. E98-B, no. 3, pp. 403-414, Mar. 2015.
8. Z. Ding et al., «Application of non-orthogonal multiple access in LTE and 5G networks», IEEE Commun. Mag., vol. 55, no. 2, pp. 185-191, Feb. 2017.
9. L. Dai, B. Wang, Y. Yuan, S. Han, C.-L. I, and Z. Wang, «Non-orthogonal multiple access for 5G: Solutions, challenges, opportunities, and future research trends», IEEE Commun. Mag., vol. 53, no. 9, pp. 74-81, Sep. 2015.
10. Z. Wei, J. Yuan, D. W. K. Ng, M. Elkaslan, and Z. Ding, «A survey of downlink non-orthogonal multiple access for 5G wireless communication networks», ZTE Commun., vol. 14, no. 4, pp. 17-26, Oct. 2016.
11. Y. Saito, Y. Kishiyama, A. Benjebbour, T. Nakamura, A. Li, and K. Higuchi, «Non-orthogonal multiple access (NOMA) for cellular future radio access», in Proc. IEEE Veh. Technol. Conf., Dresden, Germany, Jun. 2013, pp. 1-5.
12. Y. Saito, A. Benjebbour, Y. Kishiyama, and T. Nakamura, «Systemlevel performance evaluation of downlink non-orthogonal multiple access (NOMA)», in Proc. IEEE Int. Symp. Pers., Indoor Mobile RadioCommun., London, U.K., Sep. 2013, pp. 611-615.
13. Z. Ding, Z. Yang, P. Fan, and H.V. Poor, «On the performance of non-orthogonal multiple access in 5G systems with randomly deployed users», IEEE Signal Process. Lett., vol. 21, no. 12, pp. 1501-1505, Dec. 2014.
14. H. Nikopour and H. Baligh, «Sparse code multiple access», in Proc. IEEE Int. Symp. Pers. Indoor Mobile Radio Commun., London, U.K., Sep. 2013, pp. 332-336.
15. M. Taherzadeh, H. Nikopour, A. Bayesteh, and H. Baligh,



«SCMA codebook design», in Proc. IEEE Veh. Technol. Conf., Las Vegas, NV, USA, Sep. 2014, pp. 1-5.

16. X. Dai et al., «Successive interference cancelation amenable multipleaccess (SAMA) for future wireless communications», in Proc. IEEE Int. Conf. Commun. Syst., Coimbatore, India, Nov. 2014, pp. 222-226.

17. S. Chen, B. Ren, Q. Gao, S. Kang, S. Sun, and K. Niu, «Pattern division multiple access. A novel nonorthogonal multiple access for fifth-generation radio networks», IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 66, no. 4, pp. 3185-3196, Apr. 2017.

18. M. Al-Imari, M. A. Imran, R. Tafazolli, and D. Chen, «Performance evaluation of low density spreading multiple access», in Proc. 8th Int. Wireless Commun. Mobile Comput. Conf., Limassol, Cyprus, Aug. 2012, pp. 383-388.

19. D. Fang, Y.-C. Huang, Z. Ding, G. Geraci, S.-L. Shieh, and H. Claussen, «Lattice partition multiple access: A new method of downlink non-orthogonal multiuser transmissions», in Proc. IEEE Global Commun. Conf., Washington, DC, USA, Dec. 2016, pp. 1-6.

20. L. Ping, L. Liu, K. Wu, and W. K. Leung, «Interleave division multipleaccess», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 5, no. 4, pp. 938-947, Apr. 2006.

21. X. Wang and H.V. Poor, *Wireless Communication Systems: Advanced Techniques for Signal Reception*. New York, NY, USA: Prentice-Hall, 2004.

22. S. Verdú, *Multiuser Detection*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1998.

23. P. Wang, J. Xiao, and L. Ping, «Comparison of orthogonal and nonorthogonal approaches to future wireless cellular systems», IEEE Veh. Technol. Mag., vol. 1, no. 3, pp. 4-11, Sep. 2006.

24. T.S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. New York, NY, USA: Prentice-Hall, 1998.

25. Study on Downlink Multiuser Superposition Transmission for LTE, document, 3rd Generation Partnership Project (3GPP), Mar. 2015.

26. L. Zhang et al., «Layered-division-multiplexing: Theory and practice», IEEE Trans. Broadcast., vol. 62, no. 1, pp. 216-232, Mar. 2016.

27. M. Mohammadkarimi, M. A. Raza and O. A. Dobre, «Signature-Based Non-orthogonal Massive Multiple Access for Future Wireless Networks: Uplink Massive Connectivity for Machine-Type Communications», IEEE Vehicular Technology Magazine, vol. 13, no. 4, pp. 40-50, Dec. 2018.

28. S.M.R. Islam, M. Zeng, O.A. Dobre, and K. Kwak, «Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA): How It Meets 5G and Beyond». New Jersey, USA: Wiley 5G Ref Article, 2019.

29. T. Cover, «Broadcast channels», IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 18, no. 1, pp. 2-14, Jan 1972.

30. L. Dai, B. Wang, Z. Ding, Z. Wang, S. Chen and L. Hanzo, «A Survey of Non-Orthogonal Multiple Access for 5G», IEEE Communications Surveys & Tutorials, vol. 20, no. 3, pp. 2294-2323, third quarter 2018.

31. H. Tabassum, M.S. Ali, E. Hossain, M.J. Hossain and D.I. Kim, «Uplink Vs. Downlink NOMA in Cellular Networks: Challenges and Research Directions», in Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC Spring), Sydney, Australia, 2017, pp. 1-7.

32. S.M.R. Islam, M. Zeng, and Octavia A. Dobre, «NOMA in 5G Systems: Exciting Possibilities for Enhancing Spectral Efficiency», IEEE 5G Tech Focus, vol. 1, no. 2, Jun. 2017.

33. S. Timotheou and I. Krikidis, «Fairness for non-orthogonal multiple access in 5G systems», IEEE Signal Process. Lett., vol. 22,

no. 10, pp. 1647-1651, Oct. 2015.

34. Yunlong Cai, Zhijin Qin, Fangyu Cui, Geoffrey Ye Li, and Julie A. McCann: Modulation and Multiple Access for 5G Networks. IEEE COMMUNICATIONS SURVEYS & TUTORIALS, vol. 20, no. 1, FIRST QUARTER 2018 629-646.

35. Y. Liu, Z. Ding, M. ElKashlan, and H. V. Poor, «Cooperative nonorthogonal multiple access with simultaneous wireless information and power transfer!», IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 34, no. 4, pp. 938-953, Apr. 2016.

36. Y. Liu, M. ElKashlan, Z. Ding, and G. K. Karagiannis, «Fairness of user clustering in MIMO non-orthogonal multiple access systems», IEEE Commun. Lett., vol. 20, no. 7, pp. 1465-1468, Jul. 2016.

37. J. Cui, Z. Ding, and P. Fan, «A novel power allocation scheme under outage constraints in NOMA systems», IEEE Signal Process. Lett., vol. 23, no. 9, pp. 1226-1230, Sep. 2016.

38. F. Liu, P. Mähönen, and M. Petrova, «Proportional fairness-based user pairing and power allocation for non-orthogonal multiple access», in Proc. IEEE Int. Symp. Pers. Indoor Mobile Radio Commun. (PIMRC), Hong Kong, Aug. 2015, pp. 1127-1131.

39. F. Liu, P. Mähönen, and M. Petrova, «Proportional fairness-based power allocation and user set selection for downlink NOMA systems», in Proc. Conf. Commun. (ICC), Kuala Lumpur, Malaysia, May 2016, pp. 1-6.

40. J. Mei, L. Yao, H. Long, and K. Zheng, «Joint user pairing and power allocation for downlink non-orthogonal multiple access systems», in Proc. Conf. Commun. (ICC), Kuala Lumpur, Malaysia, May 2016, pp. 1-6.

41. N. Otao, Y. Kishiyama, and K. Higuchi, «Performance of non-orthogonal access with SIC in cellular downlink using proportional fairness-based resource allocation», in Proc. Int. Symp. Wireless Commun. Syst. (ISWCS), Paris, France, Aug. 2012, pp. 476-480.

42. M. Al-Imari, P. Xiao, M. A. Imran, and R. Tafazolli, «Uplink nonorthogonal multiple access for 5G wireless networks», in Proc. Int. Symp. Wireless Commun. Syst. (ISWCS), Barcelona, Spain, Aug. 2014, pp. 781-785.

43. L. Lei, D. Yuan, C. K. Ho, and S. Sun, «Power and channel allocation for non-orthogonal multiple access in 5G systems: Tractability and computation», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 15, no. 12, pp. 8580-8594, Dec. 2016.

44. P.D. Diamantoulakis, K.N. Pappi, Z. Ding, and G.K. Karagiannis, «Wireless-powered communications with non-orthogonal multiple access», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 15, no. 12, pp. 8422-8436, Dec. 2016.

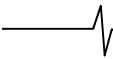
45. K. Higuchi and Y. Kishiyama, «Non-orthogonal access with random beamforming and intra-beam SIC for cellular MIMO downlink», in Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC Fall), Las Vegas, NV, USA, Sep. 2013, pp. 1-5.

46. J. Choi, «Minimum power multicast beamforming with superposition coding for multiresolution broadcast and application to NOMA systems», IEEE Trans. Commun., vol. 63, no. 3, pp. 791-800, Mar. 2015.

47. Z. Chen, Z. Ding, X. Dai, and G. K. Karagiannis, «On the application of quasi-degradation to MISO-NOMA downlink», IEEE Trans. Signal Process., vol. 64, no. 23, pp. 6174-6189, Dec. 2016.

48. Z. Ding, F. Adachi, and H. V. Poor, «The application of MIMO to nonorthogonal multiple access», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 15, no. 1, pp. 537-552, Jan. 2016.

49. W. Shin et al. «Coordinated beamforming for multicell MIMO-NOMA», IEEE Commun. Lett., vol. 21, no. 1, pp. 84-87, Jan. 2017.



50. W. Shin, M. Vaezi, J. Lee, and H.V. Poor, «On the number of users served in MIMO-NOMA cellular networks», in Proc. Int.Symp. Wireless Commun. Syst. (ISWCS), Poznan, Poland, Sep. 2016, pp. 638-642.
51. W. Shin et al. «Non-orthogonal multiple access in multi-cell networks: Theory, performance, and practical challenges», IEEE Commun. Mag., vol. 55, no. 10, pp. 176-183, Oct. 2017.
52. Z. Ding, R. Schober, and H. V. Poor. «A general MIMO framework for NOMA downlink and uplink transmission based on signal alignment», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 15, no. 6, pp. 4438-4454, Jun. 2016.
53. Z. Ding, L. Dai, and H. V. Poor, «MIMO-NOMA design for small packet transmission in the Internet of Things», IEEE Access, vol. 4, pp. 1393-1405, 2016.
54. Q. Sun, S. Han, C.-L. I, and Z. Pan, «On the ergodic capacity of MIMO NOMA systems», IEEE Wireless Commun. Lett., vol. 4, no. 4, pp. 405-408, Aug. 2015.
55. M. Zeng, A. Yadav, O. A. Dobre, G. I. Tsiropoulos, and H. V. Poor, «On the sum rate of MIMO-NOMA and MIMO-OMA systems», IEEE Wireless Commun. Lett., vol. 6, no. 4, pp. 534-537, Aug. 2017.
56. M. Zeng, A. Yadav, O.A. Dobre, G. I. Tsiropoulos, and H.V. Poor, «Capacity comparison between MIMO-NOMA and MIMO-OMA with multiple users in a cluster», IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 35, no. 10, pp. 2413-2424, Oct. 2017.
57. Z. Ding and H. V. Poor, «Design of massive-MIMO-NOMA with limited feedback», IEEE Signal Process. Lett., vol. 23, no. 5, pp. 629-633, May 2016.
58. Z. Qin, Y. Liu, Z. Ding, Y. Gao, and M. ElKashlan, «Physical layer security for 5G non-orthogonal multiple access in large-scale networks», in Proc. Conf. Commun. (ICC), Kuala Lumpur, Malaysia, May 2016, pp. 1-6.
59. Y. Liu, Z. Qin, M. ElKashlan, Y. Gao, and L. Hanzo, «Enhancing the physical layer security of non-orthogonal multiple access in largescale networks», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 16, no. 3, pp. 1656-1672, Mar. 2017.
60. D. Lee et al. «Coordinated multipoint transmission and reception in LTE-advanced: Deployment scenarios and operational challenges», IEEE Commun. Mag., vol. 50, no. 2, pp. 148-155, Feb. 2012.
61. Z. Ding, M. Peng, and H.V. Poor, «Cooperative non-orthogonal multiple access in 5G systems», IEEE Commun. Lett., vol. 19, no. 8, pp. 1462-1465, Aug. 2015.
62. J. Choi, «Non-orthogonal multiple access in downlink coordinated twopoint systems», IEEE Commun. Lett., vol. 18, no. 2, pp. 313-316, Feb. 2014.
63. Y. Tian, A. R. Nix, and M. Beach, «On the performance of opportunistic NOMA in downlink CoMP networks», IEEE Commun. Lett., vol. 20, no. 5, pp. 998-1001, May 2016.
64. J.-B. Kim and I.-H. Lee, «Non-orthogonal multiple access in coordinated direct and relay transmission», IEEE Commun. Lett., vol. 19, no. 11, pp. 2037-2040, Nov. 2015.
65. J. Men and J. Ge, «Non-orthogonal multiple access for multiple antenna relaying networks», IEEE Commun. Lett., vol. 19, no. 10, pp. 1686-1689, Oct. 2015.
66. Z. Ding, H. Dai, and H. V. Poor, «Relay selection for cooperative NOMA», IEEE Wireless Commun. Lett., vol. 5, no. 4, pp. 416-419, Aug. 2016.
67. W. Duan, M. Wen, Y. Yan, Z. Xiong, and M. H. Lee, «Use of non-orthogonal multiple access in dual-hop relaying», arXiv preprint, Apr. 2016. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1604.01151>
68. J. Mitola and G. Q. Maguire, «Cognitive radio: Making software radios more personal», IEEE Pers. Commun., vol. 6, no. 4, pp. 13-18, Aug. 1999.
69. Y.-C. Liang, K.-C. Chen, G. Y. Li, and P. Mahonen, «Cognitive radio networking and communications: An overview», IEEE Trans. Veh.Technol., vol. 60, no. 7, pp. 3386-3407, Sep. 2011.
70. J. Ma, G.Y. Li, and B.-H. Juang, «Signal processing in cognitive radio», Proc. IEEE, vol. 97, no. 5, pp. 805-823, May 2009.
71. Z. Qin, Y. Gao, and C. G. Parini, «Data-assisted low complexity compressive spectrum sensing on real-time signals under sub-Nyquist rate», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 15, no. 2, pp. 1174-1185, Feb. 2016.
72. Z. Qin, Y. Gao, M. D. Plumbley, and C. G. Parini, «Wideband spectrum sensing on real-time signals at sub-Nyquist sampling rates in single and cooperative multiple nodes», IEEE Trans. Signal Process., vol. 64, no. 12, pp. 3106-3117, Jun. 2016.
73. Y.-C. Liang, Y.-H. Zeng, E.C.Y. Peh, and A.T. Hoang, «Sensing-throughput tradeoff for cognitive radio networks», IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 7, no. 4, pp. 1326-1337, Apr. 2008.
74. Z. Qin, Y. Liu, Y. Gao, M. ElKashlan, and A. Nallanathan, «Wireless powered cognitive radio networks with compressive sensing and matrix completion», IEEE Trans. Commun., vol. 65, no. 4, pp. 1464-1476, Apr. 2017.
75. D.-Q. Feng et al., «Device-to-device communications in underlying cellular networks», IEEE Trans. Commun., vol. 61, no. 8, pp. 3541-3551, Aug. 2013.
76. D. Feng et al. «Device-to-device communications in cellular networks», IEEE Commun. Mag., vol. 52, no. 4, pp. 49-55, Apr. 2014.
77. S.M. Perlaza, N. Fawaz, S. Lasaulce, and M. Debbah, «From spectrum pooling to space pooling: Opportunistic interference alignment in MIMO cognitive networks», IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 7, pp. 3728-3741, Jul. 2010.
78. R. Sun and Z.-Q. Luo, «Interference alignment using finite and dependent channel extensions: The single beam case», IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 61, no. 1, pp. 239-255, Jan. 2015.
79. L. Lu, G.Y. Li, A. Maaref, and R. Yao, «Opportunistic transmission exploiting frequency-and spatial-domain degrees of freedom», IEEE Wireless Commun., vol. 21, no. 2, pp. 91-97, Apr. 2014.
80. Z. Ding, P. Fan, and H. V. Poor, «Impact of user pairing on 5G nonorthogonal multiple access downlink transmissions», IEEE Trans Veh. Technol., vol. 65, no. 8, pp. 6010-6023, Aug. 2016.
81. Y. Liu, Z. Ding, M. ElKashlan, and J. Yuan, «Nonorthogonal multiple access in large-scale underlay cognitive radio networks», IEEE Trans.Veh. Technol., vol. 65, no. 12, pp. 10152-10157, Dec. 2016.
82. L. Lv, J. Chen, and Q. Ni, «Cooperative non-orthogonal multiple access in cognitive radio», IEEE Commun. Lett., vol. 20, no. 10, pp. 2059-2062, Oct. 2016.
83. M. Zeng, G. I. Tsiropoulos, O. A. Dobre, and M. H. Ahmed, «Power allocation for cognitive radio networks employing non-orthogonal multiple access», in Proc. IEEE Glob. Commun. Conf. (GLOBECOM), Washington, DC, USA, Dec. 2016, pp. 1-5.
84. N. Zabetian, M. Baghani, and A. Mohammadi, «Rate optimization in NOMA cognitive radio networks», in Proc. Int. Telecommun. Symp. (ITS), Tehran, Iran, Sep. 2016, pp. 62-65.
85. Y. Zhang et al., «Energy efficiency optimization in cognitive radio inspired non-orthogonal multiple access», in Proc. IEEE Int. Symp. Pers. Indoor Mobile Radio Commun. (PIMRC), Valencia, Spain, Sep. 2016, pp. 1-6.
86. J.-B. Kim and I.-H. Lee, «Non-orthogonal multiple access in

coordinated direct and relay transmission», *IEEE Commun. Lett.*, vol. 19, no. 11, pp. 2037-2040, Nov. 2015.

87. Y. Liu, Z. Ding, M. ElKashlan, and J. Yuan, «Nonorthogonal multiple access in large-scale underlay cognitive radio networks», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, no. 12, pp. 10152-10157, Dec. 2016.

88. Y. Liu, Z. Qin, M. ElKashlan, Y. Gao, and N. Arumugam, «Nonorthogonal multiple access in massive MIMO aided heterogeneous networks», in *Proc. Glob. Commun. Conf. (GLOBECOM)*, Washington, DC, USA, Dec. 2016, pp. 1-6.

89. Y. Liu, Z. Qin, M. ElKashlan, A. Nallanathan, and J. A. McCann, «Nonorthogonal multiple access in large-scale heterogeneous networks», *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, to be published.

90. F. Fang, H. Zhang, J. Cheng, and V. C. M. Leung, «Energy efficient resource allocation for downlink non-orthogonal multiple access network», *IEEE Trans. Commun.*, vol. 64, no. 9, pp. 3722-3732, Sep. 2016.

91. Y. Zhang, H.-M. Wang, T.-X. Zheng, and Q. Yang, «Energy-efficient transmission design in non-orthogonal multiple access», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 66, no. 3, pp. 2852-2857, Mar. 2017.

92. Y. Chen, S. Zhang, S. Xu, and G. Y. Li, «Fundamental tradeoffs on green wireless networks», *IEEE Commun. Mag.*, vol. 49, no. 6, pp. 30-37, Jun. 2011.

93. R. Hoshyar, F.P. Wathan, and R. Tafazolli, «Novel low-density signature for synchronous CDMA systems over AWGN channel», *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 4, pp. 1616-1626, Apr. 2008.

94. Cai et al.: Modulation and MA for 5G networks *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 20, no. 1, First quarter 2018, pp. 629-646 .

95. D. Cai, P. Fan, X. Lei, Y. Liu, and D. Chen, «Multi-dimensional SCMA codebook design based on constellation rotation and interleaving», in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC Spring)*, Nanjing, China, May 2016, pp. 1-5.

96. Y. Wu, S. Zhang, and Y. Chen, «Iterative multiuser receiver in sparse code multiple access systems», in *Proc. Int. Conf. Commun. (ICC)*, London, U.K., Jun. 2015, pp. 2918-2923.

97. L. Yang, Y. Liu, and Y. Siu, «Low complexity message passing algorithm for SCMA system», *IEEE Commun. Lett.*, vol. 20, no. 12, pp. 2466-2469, Dec. 2016.

98. S. Chen et al., «Pattern division multiple access. A novel nonorthogonal multiple access for fifth-generation radio networks», *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 66, no. 4, pp. 3185-3196, Apr. 2017.

99. M. A. Naim and J. P. Fonseka, «Selective mapping of coded multi-channel transmission», U.S. Patent 9 667 459, May 30, 2017.

100. D. Fang et al., «Lattice partition multiple access: A new method of downlink non-orthogonal multiuser transmissions», in *Proc. Glob. Commun. Conf. (GLOBECOM)*, Washington, DC, USA, Dec. 2016, pp. 1-6.

101. J. Zeng, B. Li, X. Su, L. Rong, and R. Xing, «Pattern division multiple access (PDMA) for cellular future radio access», in *Proc. Int. Conf. Wireless Commun. Signal Process. (WCSP)*, Nanjing, China, Oct. 2015, pp. 1-5.

102. B. Ren et al., «Advanced IDD receiver for PDMA uplink system», in *Proc. IEEE/CIC Int. Conf. Commun. China (ICCC)*, Chengdu, China, Jul. 2016, pp. 1-6.

103. M.A. Naim, J.P. Fonseka, and E.M. Dowling, «A building block approach for designing multilevel coding schemes», *IEEE Commun. Lett.*, vol. 19, no. 1, pp. 2-5, Jan. 2015.

104. E.M. Dowling and J.P. Fonseka, «Tiled-building-block trellis encoders», U.S. Patent 8 077 790, Dec. 13, 2011.

105. Y.-C. Huang and K. R. Narayanan, «Construction  $\pi A$  and  $\pi D$  lattices: Construction, goodness, and decoding algorithms», *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 63, no. 9, pp. 5718-5733, Sep. 2017

106. P.R.B. da Silva and D. Silva, «Design of lattice network codes based on construction D», in *Proc. Int. Telecommun. Symp. (ITS)*, San Paulo, Brazil, Aug. 2014, pp. 1-5.

107. Y. Cai and R. C. de Lamare, «Multistage MIMO receivers based on multi-branch interference cancellation for MIMO-CDMA systems», in *Proc. Int. Symp. Wireless Commun. Syst. (ISWCS)*, Tuscany, Italy, Sep. 2009, pp. 614-618.

108. Z. Qin, X. Yue, Y. Liu, Z. Ding, and A. Nallanathan, «A unified nonorthogonal multiple access framework for heterogeneous ultra dense networks», *IEEE Commun. Mag.*, to be published.

109. C. Lin and G. Y. Li, «Energy-efficient design of indoor mmWave and sub-THz systems with antenna arrays», *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 15, no. 7, pp. 4660-4672, Jul. 2016.

110. C. Lin and G. Y. Li, «Terahertz communications: An array-of-subarrays solution», *IEEE Commun. Mag.*, vol. 54, no. 12, pp. 124-131, Dec. 2016.

111. Z. Ding, P. Fan, and H. V. Poor, «Random beamforming in millimeterwave NOMA networks», *IEEE Access*, vol. 5, pp. 7667-7681, 2017.

112. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П. Технология OFDM. Москва, Горячая линия – Телеком, 2016 г., 352 с.

113. Шлома А.М., Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Новые технологии в системах мобильной радиосвязи. Москва, МТУСИ, 2005 г., 455 с.

114. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Повышение скорости передачи информации и спектральной эффективности беспроводных систем связи. // *Цифровая обработка сигналов*, 2006, № 1, с. 2-12.

115. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Методы пространственно-временного блочного кодирования. // *Цифровая обработка сигналов*, 2005, № 2, с. 2-10.

116. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Вопросы повышения спектральной эффективности связи: Неортогональная передача. // *Цифровая обработка сигналов*, 2013, № 4, с. 55-64.

117. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Вопросы повышения спектральной эффективности связи: Ортогональная передача. // *Цифровая обработка сигналов*, 2014, № 2, с. 22-33.

118. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б. Проблема повышения спектральной эффективности и емкости в перспективных системах 6G. // *Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2020, Т. 14, № 2, с. 25-31.

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМНИК ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Пахотин В.А., д.ф.-м.н., профессор, Института физико-технических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета им. И. Канта (БФУ им. И. Канта), e-mail: VPakhotin@kantiana.ru;*

*Симонов Р.В., аспирант Института физико-технических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета им. И. Канта (БФУ им. И. Канта);*

*Власова К.В., к.ф.-м.н., доцент Балтийской государственной академии РФ, e-mail: p\_ksenia@mail.ru;*

*Петров С.В., аспирант Института физико-технических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета им. И. Канта (БФУ им. И. Канта)*

## OPTIMAL RECEIVER FOR DETECTING SET OF SIGNALS WITH UNKNOWN PARAMETERS

*Pakhotin V.A., Simonov R.V., Vlasova K.V., Petrov S.V.*

*The problem of detecting a set of signals with unknown parameters is considered. A new structure of an optimal receiver is proposed, the basis of which is the transformed functionality of the likelihood ratio. Together with likelihood equations, it allows minimizing the loss function, both in the orthogonality region and in the non-orthogonality region of the pairs of signals contained in the received implementation.. Unlike the prior art, the optimal receiver in question determines the probability of detecting each of the signals individually contained in the received implementation. The results of model calculations confirming theoretical positions are given. Potential capabilities of detecting a set of signals are analyzed. The possibility of setting the reception probability scale on the indicator radar is shown.*

**Key words:** radar, optimal reception, maximum likelihood method, optimal receiver, signal detection, probability of detection, signal resolution.

**Ключевые слова:** радиолокация, оптимальный прием, метод максимального правдоподобия, оптимальный приемник, обнаружение сигналов, вероятность обнаружения, разрешение сигналов.

### Введение

Решение задачи обнаружения сигнала хорошо известно [1÷9]. Она решается, как правило, на основе двух альтернативных гипотез: в принятой реализации сигнал присутствует, в принятой реализации сигнала нет [1, 2, 4, 7]. Записывая отношение функций правдоподобия и преобразовывая его, можно получить выражение, определяющее оптимальный приемник – обнаружитель сигнала. Он по существу является корреляционным приемником [1, 2]. При известных параметрах сигнала (неизвестен лишь факт нахождения сигнала в принятой реализации) нет необходимости в процедуре минимизации функции потерь (функции риска). В этом случае оптимальный приемник позволяет решить задачу обнаружения, как одного, так и совокупности сигналов. В случае совокупности сигналов, его выходная функция имеет интерференционный характер. Математическое ожидание от выходной функции оптимального приемника будет зависеть от совокупной энергии сигналов, которая меняется в широких пределах в зависимости от разности фаз между сигналами и соотношения их амплитуд. На практике параметры сигналов, как правило, неизвестны. Неизвестно и значение

*Рассмотрена проблема обнаружения совокупности сигналов с неизвестными параметрами. Предложена новая структура оптимального приемника, основой которого является преобразованный функционал отношения правдоподобия. Совместно с уравнениями правдоподобия он позволяет проводить минимизацию функции потерь, как в области ортогональности, так и в области неортогональности пар сигналов, содержащихся в принятой реализации. В отличие от известного, рассматриваемый оптимальный приемник определяет вероятность обнаружения каждого из сигналов по отдельности, содержащихся в принятой реализации. Приводятся результаты модельных расчетов, подтверждающих теоретические положения. Анализируются потенциальные возможности обнаружения совокупностей сигналов. Показана возможность установки на индикаторе радиолокатора шкалы вероятности приема.*

дисперсии шума в принятой реализации. В этих условиях выход оптимального приемника будет зависеть от неизвестных параметров сигналов, и для получения решения задачи требуется процедура минимизации функции потерь. Потери будут минимальны, если параметры сигнала в принятой реализации будут полностью соответствовать параметрам копии сигнала в оптимальном приемнике. Минимизация функции потерь эквивалентна максимизации выходной функции оптимального приемника по неизвестным параметрам [6, 7, 8]. Неэнергетические параметры позволяют максимизировать выходную функцию. Однако неизвестная амплитуда сигнала при своем изменении монотонно увеличивает выходную функцию, не обеспечивая ее необходимого максимума.

Следовательно, известный [1, 2] оптимальный приемник-обнаружитель не может решить задачу обнаружения сигнала с неизвестной амплитудой. Возникают вопросы, как с пороговым уровнем, так и с оценкой дисперсии шума в принятой реализации.

В настоящей работе предлагается оптимальный приемник с измененной структурой. Он лишен вышеприведенных недостатков, может использоваться при решении задачи обнаружения совокупности неортогональных сигналов. Пороговый уровень определяется по дисперсии шума в принятой реализации, которая оценивается по значению минимума функционала правдоподобия. Основной целью настоящей работы является представление возможностей предлагаемого оптимального приемника.

**Основы теории оптимального приема**

Запишем функционал отношения функций правдоподобия в следующем виде.

$$\Delta(\vec{\lambda}, \hat{U}_1, \dots, \hat{U}_N, \tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} |\hat{y}(t)|^2 dt - \int_{\tau}^{T+\tau} \left| \hat{y}(t) - \sum_1^N \hat{U}_n \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \right|^2 dt, \tag{1}$$

где  $\vec{\lambda}$  – вектор неэнергетических неизвестных параметров  $N$  сигналов;  $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_N$  – комплексные неизвестные амплитуды  $N$  – сигналов;  $\hat{y}(t)$  – принятая реализация, содержащая  $N$  сигналов и аддитивный нормальный шум со средним нулевым значением, дисперсией  $\tau^2$  и интервалом корреляции  $\tau_k$ ;  $\hat{f}_n(\vec{\lambda}, t)$  –

функция, определяющая форму  $n$  – сигнала;  $\tau$  – текущее время при скользящем методе обработки на интервале длительности сигнала  $T$ .

Первое слагаемое функционала (1) определяет аргумент функции правдоподобия, когда предполагается, что сигналов в реализации нет. Второе слагаемое функционала (1) определяет аргумент функции правдоподобия, когда предполагается, что сигналы присутствуют в принятой реализации с амплитудами  $\hat{U}_N$ .

Преобразуем выражения (1). Исключим в этом выражении зависимость от комплексных амплитуд сигналов. Для этого, дифференцируя (1) по комплексным амплитудам и приравнявая дифференциалы нулю, получим векторное уравнение правдоподобия [3].

$$\vec{\beta} = \hat{R} \hat{U}, \tag{2}$$

где  $\vec{\beta}$  – вектор столбец, содержащий элементы

$$\beta_n(\vec{\lambda}, \tau) = \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{y}(t) \hat{f}_n^*(\vec{\lambda}, t) dt; \hat{U} – вектор столбец амплитуд, содержащий элементы  $\hat{U}_N$ ;  $\hat{R}$  – корреляционная функция, элементы которой определены выражением$$

$$\hat{R}_{n,m}(\vec{\lambda}, \tau) = \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \hat{f}_m^*(\vec{\lambda}, t) dt.$$

Решая векторное уравнение, получим вектор оценок амплитуд, зависящий от вектора неэнергетических параметров сигналов  $\vec{\lambda}$  и времени  $\tau$ .

$$\hat{U}(\vec{\lambda}, \tau) = \hat{R}^{-1} \vec{\beta}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) получим функционал отношения функций правдоподобия, зависящий лишь от вектора неэнергетических параметров сигналов.

$$\Delta(\vec{\lambda}, \tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} |\hat{y}(t)|^2 dt - \int_{\tau}^{T+\tau} \left| \hat{y}(t) - \sum_1^N \hat{U}_n(\vec{\lambda}, \tau) \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \right|^2 dt. \tag{4}$$

Полученное выражение позволяет, например методом перебора неэнергетических параметров  $\vec{\lambda}$ , минимизировать функцию потерь на текущем интервале  $\tau \div \tau + T$ .

Это выражение можно упростить, исключив интеграл от квадрата принятой реализации  $\hat{y}(t)$ ,

$$\Delta(\vec{\lambda}, \tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} \hat{y}(t) \left( \sum_1^N \hat{U}_n(\vec{\lambda}, \tau) \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \right)^* dt + \int_{\tau}^{T+\tau} \hat{y}^*(t) \sum_1^N \hat{U}_n(\vec{\lambda}, \tau) \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) dt - \int_{\tau}^{T+\tau} \left| \sum_1^N \hat{U}_n(\vec{\lambda}, \tau) \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \right|^2 dt. \tag{5}$$

Полученное выражение (4) (а также (5)) показывает, что процесс минимизации функции потерь необходимо проводить одновременно в двух выражениях (4) и (3) (или (5) и (3)) за счет перебора значений вектора параметров  $\vec{\lambda}$ . Математическое ожидание от (4), в случае отсутствия сигналов в принятой реализации, равно нулю. Математическое ожидание от  $\vec{\beta}$  (выражение (3)) равно нулю, следовательно, и амплитуды сигналов во втором слагаемом стремятся к нулю. Математическое ожидание от (4) в случае наличия  $N$  сигналов в принятой реализации и выполнении условия  $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}$  (условие экстремума) равно энергии совокупности  $N$  сигналов  $E_{сов}$ .

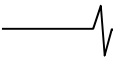
$$M \left( \Delta(\vec{\lambda}, \tau) \right) = \int_{\tau}^{\tau+T} \left| \sum_1^N \hat{U}_n(\vec{\lambda}, \tau) \hat{f}_n(\vec{\lambda}, t) \right|^2 dt = E_{сов}. \tag{6}$$

В этом случае математическое ожидание от (3) определяет вектор истинных (не штрихованных) комплексных амплитуд, содержащихся в принятой реализации. Это означает несмещенность решения. Определим выражение (4) (эквивалент (5)) в качестве выходной функции оптимального приемника-обнаружителя сигналов

$$q(\vec{\lambda}, \tau) = \Delta(\vec{\lambda}, \tau).$$

Структура приемника определяется выражениями (4) и (3) или (5) и (3).

В литературе, например [9], в постановке задачи обнаружения совокупности сигналов используют сложные



гипотезы. Рассматриваются случаи, когда в принятой реализации содержится один, два, три и т.д. сигналов. Согласно выражениям (4) и (3) этого делать не следует, поскольку при проведении процедуры минимизации функции потерь автоматически определяются амплитуды сигналов. Часть значений амплитуд может быть на уровне шумовых максимумов. Они не превышают пороговый уровень и исключаются из рассмотрения. Из этого следует и второе: нет необходимости в знании количества сигналов, содержащихся в реализации. Достаточным условием является следующее. Количество сигналов в копии  $N$  должно быть больше действительного количества сигналов в принятой реализации. Амплитуды «лишних» сигналов будут после операции минимизации функции потерь на уровне шумовых максимумов и исключаются за счет порогового уровня.

Математическое ожидание от выходной функции (4) на интервале, где нет сигналов, равно нулю. Математическое ожидание от выходной функции на интервале, где сигналы присутствуют, равно энергии этого сигнала, а при наличии совокупности неортогональных сигналов, равно совокупной энергии. Дисперсия шума в принятой реализации оценивается нормированным функционалом правдоподобия.

$$\Delta = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} \left| \hat{y}(t) - \sum_{n=1}^N \hat{U}_n \left( \hat{\lambda} \right) \hat{f}_n \left( \hat{\lambda}, t \right) \right|^2 dt. \quad (7)$$

Математическое ожидание от (7) в точке  $\hat{\lambda} = \bar{\lambda}$  определяет дисперсию шума на входе оптимального приемника  $M(\Delta) = \sigma^2$ . Оценка дисперсии шума в принятой реализации по выражению (7) и оценка совокупной энергии позволяют определить пороговый уровень и решить задачу обнаружения совокупности сигналов. Однако это решение будет иметь интерференционный характер. При взаимном усилении сигналов вероятность обнаружения может быть высокой. Однако при взаимном подавлении сигналов вероятность обнаружения будет низкой. Покажем, что на основании выражения (3) можно получить более устойчивое решение. В точке максимума функционала (4) выражение (3) определяет оценки амплитуд совокупности сигналов, содержащихся в принятой реализации. Дисперсия амплитуд сигналов находится на уровне дисперсии Рао-Крамера  $D_{U_n} = \sigma^2 / N1$  ( $N1$  – количество некоррелированных отсчетов на интервале обработки). Это позволяет решить задачу обнаружения для каждого сигнала по отдельности.

Таким образом, выражения (4) и (3) позволяют проводить операцию минимизации функции потерь при решении задачи обнаружения сигналов с неизвестными параметрами. Выражения (4), (3), совместно с (7), полностью решают задачу обнаружения совокупности сигналов с неизвестными параметрами. Используя (3) в точке максимума функционала (4), можно решить задачу обнаружения сигналов в принятой реализации по отдельности для каждого сигнала. Эти решения оказываются более устойчивыми.

### Результаты модельных расчетов

Приведем результаты модельных расчетов. При мо-

делировании принято следующее. Принятая реализация содержит, в начале, один радиоимпульс с параметрами: амплитуда  $U_1 = 1$ , начальная фаза  $\varphi_1 = 60$  градусов, время приема  $t_1 = 15$  мс, длительность радиоимпульса  $T = 3$  мс, интервал дискретизации  $\Delta t = 3$  мкс. В этом случае можно показать особенности максимизации выходной функции оптимального приемника (минимизации функции потерь). На рис. 1 показаны две зависимости от времени

$$f1 = \int_{\tau}^{T+\tau} |\hat{y}(t)|^2 dt \text{ и } f2 = \int_{\tau}^{T+\tau} \left| \hat{y}(t) - U_1 \hat{f}_1 \left( \hat{\lambda}, t \right) \right|^2 dt$$

выходной функции оптимального приемника (4). Значение максимума первой функции определяет псевдоэнергию сигнала и шума ( $\approx 1,6$ ). Для получения энергии в джоулях необходимо умножение указанной величины на интервал дискретизации  $\Delta t$ .

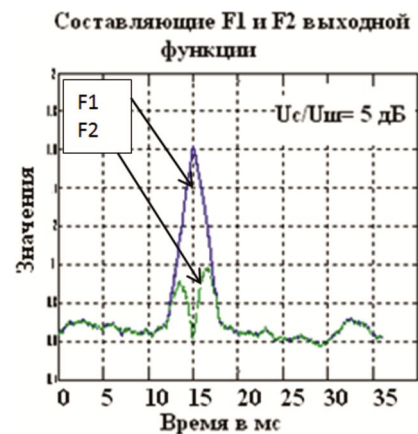


Рис. 1. Зависимость от времени составляющих  $F_1$  и  $F_2$  выходной функции оптимального приемника при отношении сигнал/шум 5 дБ

Вторая функция отображает процесс минимизации функции потерь. В области, где нет сигнала, обе функции тождественны. В переходной области, когда интервал обработки лишь частично совпадает с сигналом, отмечается возрастание как первой, так и второй функции. Вторая функция имеет глубокий минимум в точке минимума функции потерь, когда параметры сигнала и оцениваемые параметры практически совпадают. Кроме того, значение минимума второй функции ( $\approx 0,6$ ) определяет псевдоэнергию шума. Следовательно, разность этих функций максимальна в указанной точке и равна псевдоэнергии сигнала. Таким образом, модельные расчеты подтверждают, что выходная функция оптимального приемника (4) в максимуме определяет энергию сигнала. Зависимость выходной функции от времени приема показана на рис.2 при отношении сигнал/шум на входе приемника 5 дБ. При уменьшении отношения сигнал/шум до значения – 10 дБ шумовая составляющая увеличивается, и лишь на небольшом интервале времени проявляется различие между двумя функциями (рис. 3).

Обнаружение сигнала на основе первой и второй функций оказывается невозможным. Однако выходная функция оптимального приемника при указанном значении отношении сигнал/шум позволяет решить задачу обнаружения сигнала (рис. 4).

Это подтверждает утверждение о том, что функцио-

нал отношения функций правдоподобия позволяет получить более эффективное решение, чем решение на основе функции правдоподобия.

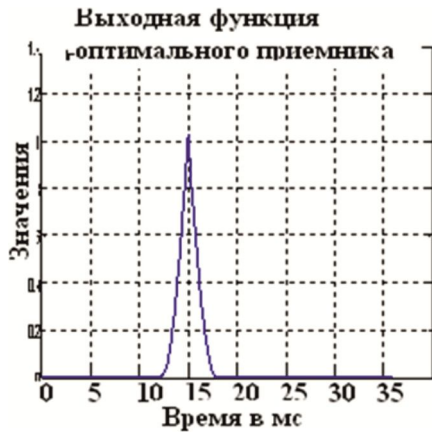


Рис. 2. Зависимость выходной функции оптимального приемника от времени при отношении сигнал/шум 5 дБ. Значение максимума определяет псевдоэнергию сигнала. А его положение – время приема

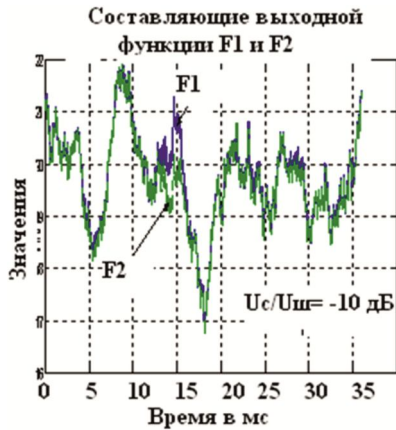


Рис. 3. Зависимость от времени составляющих  $f_1$  и  $f_2$  выходной функции оптимального приемника при отношении сигнал/шум -10 дБ

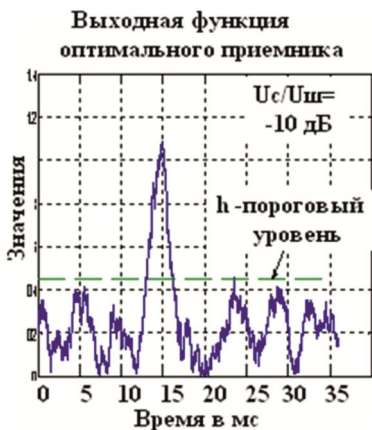


Рис. 4. Зависимость выходной функции оптимального приемника от времени при отношении сигнал/шум -10 дБ

На рис. 5 представлена статистика оценок амплитуды и времени приема сигнала, полученная на основе оптимального приемника (4). Отмечен пороговый уровень (пунктир) и, большой точкой, модельное значение амплитуды и времени приема сигнала. Точность оценок времени приема составляет  $\pm 150$  мкс, точность оценок

амплитуд составляет  $\pm 20$  %. Вероятность обнаружения по 30 независимым реализациям равна 100 %.

Статистика амплитуд и времени приема

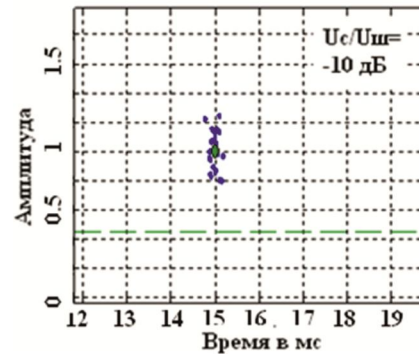


Рис. 5. Статистика оценок амплитуды и времени приема сигнала, полученная с помощью оптимального приемника (4) при модельном значении амплитуды 1

На рис. 6. показана подобная статистика при уменьшении амплитуды сигнала в 2 раза. Вероятность обнаружения равна  $\approx 87$  %. Четыре точки, амплитуды которых меньше порогового уровня (пунктир), определяются шумовыми максимумами. Они исключаются пороговым уровнем из дальнейшего рассмотрения.

Рассмотрим случай, когда в принятой реализации содержатся два радиоимпульса. Модельные значения параметров следующие: амплитуды 2 и 1,9; время приема 3,5 и 4 мс, длительность радиоимпульсов 3 мс, интервал дискретизации 3 мкс. В области неортогональности, когда сигналы частично перекрываются во времени, в зависимости от разности фаз и соотношения амплитуд (явление интерференции), сигналы или усиливают друг друга или ослабляют.

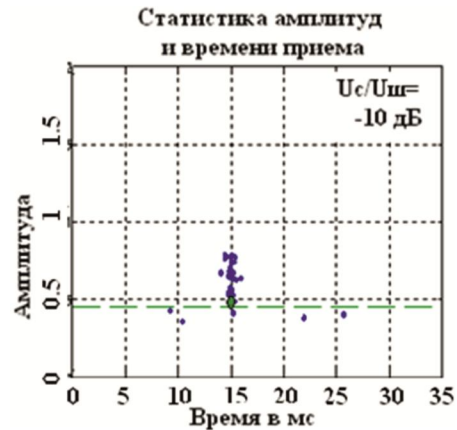


Рис. 6. Статистика времени приема и амплитуды сигнала, полученная с помощью оптимального приемника (4) при модельном значении амплитуды 0,5

В результате вероятность обнаружения меняется. На рис. 7 показан случай взаимного подавления сигналов в принятой реализации (верхняя реализация). Отмечается лишь наличие в реализации части первого и части второго сигнала. Совместная часть двух сигналов исчезает. В этом случае, оценивая амплитуды сигналов и времена их приема в точке минимума функционала правдоподобия, можно получить отдельные реализации  $\hat{y}_1(t)$  (средняя реализация, рис. 7) и  $\hat{y}_2(t)$  (нижняя реализация,

рис.7 и сравнить их.

$$\hat{y}_1(t) = \hat{y}(t) - \hat{U}_2 \left( \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \right) \hat{S} \left( \vec{\lambda}_2, t \right);$$

$$\hat{y}_2(t) = \hat{y}(t) - \hat{U}_1 \left( \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \right) \hat{S} \left( \vec{\lambda}_1, t \right) \hat{y}_2(t) =$$

$$= \hat{y}(t) - \hat{U}_1 \left( \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2 \right) \hat{S} \left( \vec{\lambda}_1, t \right).$$

Рис. 7 иллюстрирует преимущество предлагаемого метода обработки. В результате решения задачи оценки параметров двух неортогональных сигналов, энергия сигналов в реализациях  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$  оказывается больше, чем энергия сигналов в реализации  $\hat{y}(t)$

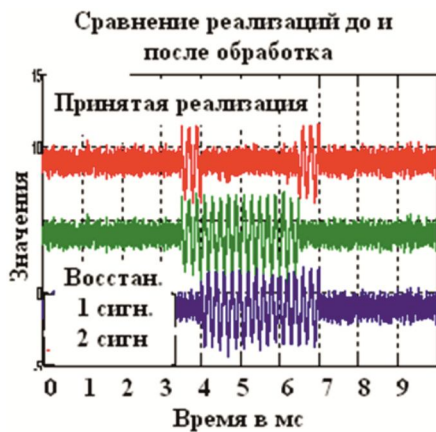


Рис. 7. Сравнение принятой реализации, содержащей совокупность двух сигналов, и двух реализаций после обработки с подавлением одного из сигналов

Следовательно, задача обнаружения будет решена более эффективно. При проведении корреляционной обработки трех реализаций  $\hat{y}(t)$  и  $\hat{y}_1(t)$ ,  $\hat{y}_2(t)$  преимущество предлагаемого метода обработки становится очевидным (рис. 8).

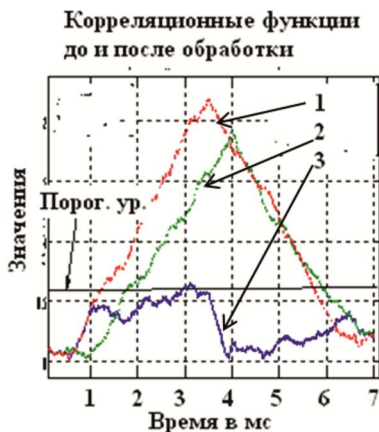


Рис. 8. Корреляционные функции трех реализаций  $\hat{y}(t)$  и  $\hat{y}_1(t)$ ,  $\hat{y}_2(t)$  при решении задачи обнаружения совокупности двух сигналов

Максимум корреляционной функции  $\hat{y}(t)$ , содержащей два неортогональных сигнала, оказывается много ниже, чем максимумы корреляционных функций реализаций  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$ , содержащие эти сигналы по отдельности. На рис. 8 корреляционные функции трех реализаций показаны при отношении сигнал/шум –

20 дБ. На этом же рисунке отмечен пороговый уровень  $h = 3\sigma$ , определенный по уровню шума (СКО шума  $\sigma$ ). Максимум корреляционной функции принятой реализации  $\hat{y}(t)$  практически не дает возможности обнаружить наличие сигналов. Максимумы корреляционных функций реализаций  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$  существенно превышают пороговый уровень. Задача раздельного обнаружения первого и второго сигналов решается вполне успешно.

На рис. 9 представлена статистика времени приема сигналов и статистика амплитуд сигналов, оцененных по реализациям  $\hat{y}(t)$  и  $\hat{y}_1(t)$ ,  $\hat{y}_2(t)$ . Статистика лучше отображает возможность решения задачи раздельного обнаружения сигналов.

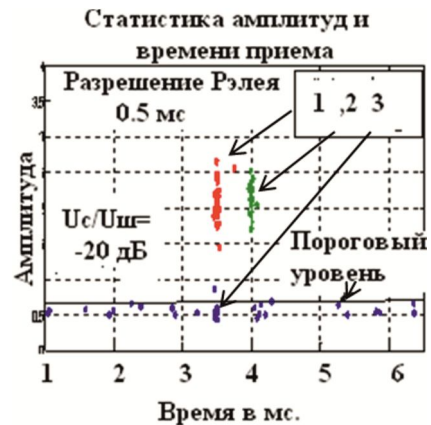


Рис. 9. Статистика времени приема и статистика амплитуд, полученная по трем реализациям  $\hat{y}(t)$  и  $\hat{y}_1(t)$ ,  $\hat{y}_2(t)$

Как следует из рисунка вероятность обнаружения сигналов в реализациях  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$  практически 100 %. Вероятность обнаружения совокупности сигналов по реализации  $\hat{y}(t)$  не превышает 10 %. На рис. 10 показан случай, когда в принятой реализации  $\hat{y}(t)$  находится лишь один сигнал, а в копии содержится два сигнала. В этом случае оценки амплитуд второго сигнала имеют значения близкие к шумовым максимумам и их можно исключить за счет порогового уровня.

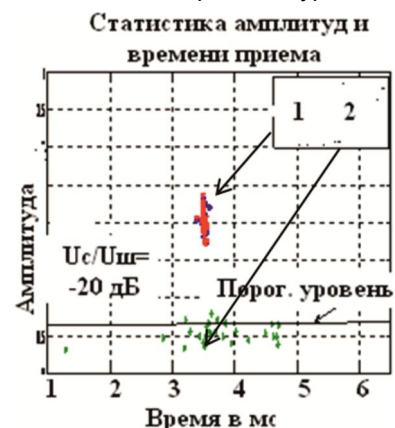


Рис. 10. Статистика времен приема и амплитуд сигналов при условии, что в принятой реализации  $\hat{y}(t)$  находится лишь один сигнал.

Следовательно, вероятность обнаружения совокупности сигналов, определенная на основании реализации  $\hat{y}(t)$ , является функцией разности фаз и соотношения



амплитуд сигналов. Вероятность обнаружения сигналов на основании реализаций  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$  не зависит от разности фаз и соотношения амплитуд. Это решение оказывается более устойчивым. Ложные (лишние) решения исключаются из рассмотрения с помощью порогового уровня. Приведем блок – схему оптимального приемника (рис. 11). По входной принятой реализации

$\hat{y}(t)$  определяются параметры:  $\sigma$ ,  $\hat{U}_1$ ,  $\hat{U}_2$ ,  $\hat{\lambda}_1$ ,  $\hat{\lambda}_2$  – дисперсия шума на входе приемника, комплексные амплитуды первого и второго сигналов, времена приема первого и второго сигналов. Эти данные оцениваются в области реализации, где нет сигнала, в переходной области, в области, где есть сигнал. Они позволяют получить реализации  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$  в соответствии с выражениями (8), которые содержат информацию о первом и, соответственно, втором сигнале.

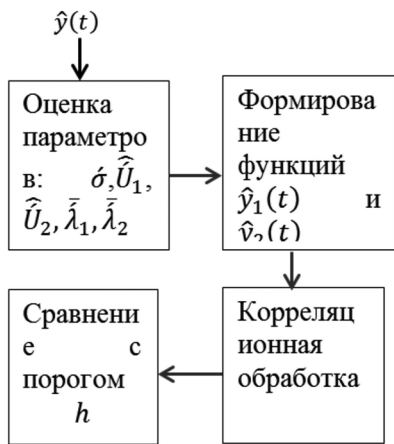


Рис. 11. Блок-схема приемника-обнаружителя двух сигналов



Рис. 12. Зависимость оценок амплитуд первого и второго сигналов в зависимости от линейно меняющейся амплитуды второго сигнала

В следующем блоке реализуется корреляционная обработка реализаций  $\hat{y}_1(t)$  и  $\hat{y}_2(t)$ . Максимумы корреляционных функций сравниваются с пороговым значением и, если они превышают пороговое значение, то принимается решение о наличии одного или двух сигналов в принятой реализации  $\hat{y}(t)$ . Отличительной особенностью решения задачи обнаружения двух или нескольких сигналов является оценка параметров по принятой реализации вне зависимости от наличия сигналов в этой реализации. Информация об амплитуде

сигналов и оценка среднеквадратичного отклонения шума позволяют оценить вероятность обнаружения сигналов. Приведем результаты модельного эксперимента.

Приняты следующие параметры: амплитуды  $U_1 = 2$  и длительность сигналов 3 мс, время приема 3,5 мс и 4 мс. (неортогональные сигналы). Амплитуда второго сигнала меняется в эксперименте в заданных пределах. В результате можно получить последовательность оценок амплитуд первого и второго сигналов. Эти оценки показаны на рис. 12.

При отношении сигнал/ шум на входе приемника - 15 дБ (15 дБ на выходе приемника) СКО оценок амплитуд небольшое, на уровне 0,18. Это позволяет подставить оценки амплитуд в выражение для вероятности обнаружения сигналов при пороговом значении

$h = 3\sigma / \sqrt{N}$ . В результате на экране индикатора информация о решении задачи обнаружения двух сигналов представляется в виде вероятности обнаружения сигналов (рис. 13). Линия на уровне 0,5 определяет значение вероятности обнаружения, равную 50 %. Точки выше этой линии указывают на обнаружение сигналов с соответствующей вероятностью. Разброс значений вероятности обнаружения можно считать незначительным. Первый сигнал имеет модельное значение амплитуды  $U_1 = 2$  и вероятность его обнаружения не ниже 0,85. Второй сигнал меняет свою амплитуду от 0,1 до 3. В результате сигнал обнаруживается при амплитуде  $U_2 = 0,75$  с вероятностью 0,6.



Рис. 13. Вероятности раздельного обнаружения двух сигналов в принятой реализации

Следует отметить, что сигналы в данной реализации неортогональны по времени приема. Рэлеевское разрешение определяется временем 300 мкс. Сигналы в реализации имеют различие во времени приема 50 мкс. Разрешение увеличено в 6 раз по сравнению с Рэлеевским разрешением.

Таким образом, задача обнаружения двух сигналов, содержащихся в принятой реализации, успешно решена. Решение основано на основе анализа поверхности преобразованного функционала правдоподобия. Вероятность обнаружения является случайной величиной. Однако при допустимых вариациях ее значение можно определять на индикаторе в режиме мониторинга (скользящей обработки).

1. Предложена новая структура оптимального приемника-обнаружителя сигналов. Она позволяет проводить минимизацию функции потерь, при решении задачи обнаружения совокупности сигналов с неизвестными параметрами и обеспечивает отдельную оценку вероятности обнаружения сигналов.

2. Сделан вывод: структура предложенного оптимального приемника расширяет возможности решения задачи обнаружения совокупности сигналов, содержащихся в принятой реализации. Она обеспечивает решение указанной задачи в области неортогональности сигналов.

3. Приведены доказательства того, что нет необходимости в постановке многоальтернативной задачи обнаружения сигналов. Решение о наличии сигналов в реализации принимается на основе совокупной энергии сигналов и дисперсии шума. Нет необходимости в оценке количества сигналов в принятой реализации. Достаточным является условие, что в копии содержится больше сигналов, чем в принятой реализации. Амплитуды «лишних» сигналов не превышают амплитуды шумовых максимумов в реализации.

4. Показано, что структура оптимального приемника позволяет установить на индикаторе шкалу, определяющую вероятность отдельного обнаружения сигналов, содержащихся в принятой реализации.

1. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.
2. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983.-320 с.
3. Пахотин В. А., Власова К.В., Бессонов В.А., Строков В.И., Бабинович А.И., Шустов Э.И. Технология цифровой обработки простых и широкополосных сигналов на основе функционала правдоподобия. (Пленарное заседание) Доклады 18-й Международной конференции DSPA-2016, серия: Цифровая обработка сигналов и ее применение. Т. 1, Москва, Россия, с.13-25.
4. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. К.; Изд-во: М.: Иностранной литературы, 1963.
5. Сосулин Ю.Г. Обнаружение сигналов на фоне произвольных помех и обесвечивающие фильтры. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, №1. С.188-195.
6. Трифонов А.П., Корчагин Ю. Э., Литвинов Е.В. Алгоритмы обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью на фоне белого шума. Сборник докладов XIII международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». – Воронеж, 2007. – Т. 1. – С.51-60.
7. Трифонов А.П. Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума. Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. № 1. С.435-438
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
9. Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов. М.: Сов. радио, 1974. – 360 с.

**НОВЫЕ КНИГИ**

**Умняшкин С.В.**

*Основы теории цифровой обработки сигналов: Учебное пособие. Издание пятое, исправленное и дополненное.*

**Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2019. – 550 с.: ил.**

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров «Прикладная математика», «Информатика и вычислительная техника», и направлено на изучение теоретических основ цифровой обработки сигналов (ЦОС). Помимо базовых разделов ЦОС, связанных с цифровым представлением сигналов, анализом и синтезом цифровых фильтров, в пособии рассматриваются вопросы многоскоростной обработки сигналов, адаптивной фильтрации, дискретного спектрального анализа. Значительное внимание уделено таким специальным разделам ЦОС, как эффективное представление сигналов (сжатие данных), теория и приложения дискретных вейвлет-преобразований.

Пособие также может быть рекомендовано в качестве дополнительного учебного материала для других инженерных направлений подготовки, связанных с ЦОС (радиотехника, электроника, телекоммуникации и связь, автоматическое управление и др.). При этом базовая часть материала первых глав представляет собой основу для вводного курса (уровень бакалавриата), а в полном объеме учебное пособие ориентировано на более углубленное изучение теории ЦОС в магистратуре.

**Соловьев В.В.**

*Проектирование функциональных блоков встраиваемых систем на FPGA*

**М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2020 г. – 348 м.: ил.**

Рассмотрены основы проектирования функциональных блоков, которые наиболее часто встречаются во встраиваемых системах, на программируемых пользователем вентильных матрицах FPGA (field programmable gate array – FPGA). Рассмотрено проектирование на FPGA путем описания на языке Verilog и с помощью IP-ядер блоков памяти различного типа: одно-портовой, двух-портовой RAM, ROM, FIFO, LIFO, а также сдвиговых регистров в блоках встроенной памяти. Представлено несколько методик проектирования устройств управления: в виде микропрограммного автомата (МПА) по граф-схеме алгоритма (ГСА), на основе блок-схем автоматов (ASM), а также на основе блок-схем автоматов с трактом обработки данных (ASMD) и конечных автоматов с трактом обработки данных (FSMD). Приведена методика проектирования на FPGA одно-такты процессора, а также три методики проектирования много тактовых процессоров.

Особое внимание уделено отладке процессора PIC и оценке его производительности, приводятся рекомендации по увеличению производительности процессоров. Представлена общая методология проектирования цифровых фильтров, рассмотрен пример разработки цифрового фильтра в системе MATLAB, моделирования фильтра в системе ModelSim и реализации фильтра на FPGA в системе Quartus. Рассмотрены вопросы проектирования подсистем синхронизации встраиваемых систем на FPGA. Описаны принципы функционирования блоков фазовой автоподстройки частоты PLL, особенности архитектуры и функционирования блоков PLL в FPGA, а также способы конфигурирования блоков PLL в проектах на FPGA.

Для специалистов в области разработки встраиваемых систем, научных работников, аспирантов.



фильтра в системе ModelSim и реализация фильтра на FPGA в системе Quartus. Рассмотрены вопросы проектирования подсистем синхронизации встраиваемых систем на FPGA. Описаны принципы функционирования блоков фазовой автоподстройки частоты PLL, особенности архитектуры и функционирования блоков PLL в FPGA, а также способы конфигурирования блоков PLL в проектах на FPGA.

УДК 621.396.93.037.372

## РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ВХОЖДЕНИЯ В СИНХРОНИЗМ НА ЭТАПЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ПО ЦИКЛИЧЕСКОМУ ПРЕФИКСУ СИМВОЛОВ В ТЕХНОЛОГИИ LTE OFDMA

*Киселева Т.П., аспирантка кафедры радиотехнических систем Московского технического университета связи и информатики (МТУСИ), e-mail; golzev2011@yandex.ru*

### CALCULATING THE TIME OF ENTERING SYNCHRONISM AT THE SYNCHRONIZATION STAGE USING A CYCLIC CHARACTER PREFIX IN LTE OFDMA TECHNOLOGY

*Kiseleva T.P.*

*In this paper, a comparative analysis of the time of entering synchronism at the synchronization stage by the correlation function of the cyclic prefix (CP) OFDM symbols of LTE technology in the case of building a CP on binary pseudorandom sequences (PSP) transferred to the interval of the cyclic prefix from the end of characters, or building a CP based on short sequences of Zadoff-Chu (ZC). The calculation formulas for calculating the time of entering into synchronism when they are used in relation to the correlation functions of the CP are given. The results of calculations for the cases of false alarm probabilities  $F = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  for an ideal (no interference) and Rayleigh channel with the addition of additive white Gaussian noise (BGS) at SNR = 10 dB, 0 dB are shown in tables and graphs. Mathematical modeling of CP correlation functions was performed in the MATLAB operating environment for sequences with the number of elements  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$ .*

**Key words:** LTE OFDM, Zadoff-Chu sequence (ZC), synchronization, timing, correlation function, OFDM symbol, cyclic prefix, Rayleigh channel, signal – to-noise ratio (SNR).

**Ключевые слова:** LTE OFDM, последовательность Задова-Чу (ZC), синхронизация, время вхождения в синхронизм, корреляционная функция, OFDM – символ, циклический префикс, Рэлеевский канал, отношение сигнал/шум (SNR).

#### Введение. Постановка задачи

В работе [1] проведено исследование применения коротких комплексных последовательностей Задова-Чу для заполнения ЦП на этапе синхронизации по корреляционной кривой ЦП. Представлены результаты моделирования в операционной среде MATLAB корреляционных функций циклического префикса, сформированного цифровыми битовыми данными из ПСП и комплексными последовательностями ZC(u,n). Сравнение величин отношения модуля корреляционной функции к среднеквадратической величине боковых лепестков  $MF_s$  для комплексных последовательностей Задова-Чу и битовых последовательностей ЦП с одинаковым числом элементов  $n$  позволяет судить о преимуществах использования коротких последовательностей ZC(u,n) для заполнения ЦП.

В данной работе ставится задача разработки методики расчета времени вхождения в синхронизм на этапе синхронизации по корреляционной кривой ЦП для случаев использования последовательностей ZC, либо ПСП. Представлены результаты расчетов математического ожидания времени поиска и вхождения в синхронизм  $T_{CP}$  для обоих вариантов построения ЦП как в идеальном случае – без искажений помехами канала связи, так и для варианта прохождения через Рэлеевский канал с добавлением БГШ при  $SNR = 0 \text{ dB}, 10 \text{ dB}$ . В исследовании применялись варианты последовательностей

*Проведен сравнительный анализ времени вхождения в синхронизм на этапе синхронизации по корреляционной функции циклического префикса (ЦП) OFDM – символов технологии LTE в случае построения ЦП на двоичных псевдослучайных последовательностях (ПСП), переносимых в интервал циклического префикса с конца символов, либо построения ЦП на основе коротких последовательностей Задова-Чу (ZC). Приведены расчетные формулы вычисления времени вхождения в синхронизм при их использовании применительно к корреляционным функциям ЦП. Результаты вычислений для случаев вероятностей ложной тревоги  $F = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  для идеального (без помех) и Рэлеевского канала с добавлением аддитивного белого Гауссовского шума (БГШ) при  $SNR = 10 \text{ dB}, 0 \text{ dB}$  отражены в таблицах и графиках. Математическое моделирование корреляционных функций ЦП проведено в операционной среде MATLAB для последовательностей с числом элементов  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$ .*

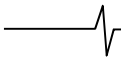
ZC и ПСП с числом элементов  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$  для расчетов  $T_{CP}$  в идеальном варианте и при  $N = 9, 17$  для случая прохождения Рэлеевского канала с добавлением БГШ при  $SNR = 0 \text{ dB}, 10 \text{ dB}$ .

#### Методика расчета среднего времени вхождения в синхронизм на этапе синхронизации по ЦП.

##### Результаты моделирования

Расчет среднего времени вхождения в синхронизм  $T_{CP}$  на этапе синхронизации по циклическому префиксу (ЦП) для ЦП, построенных на псевдослучайных двоичных последовательностях (ПСП) и последовательностях Задова-Чу (ZC) с числом элементов  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$  произведен по формуле [2]

$$m\{T\} \approx \frac{(2-D)(n-1)T_a}{2D},$$



где  $mI\{T\}$  – математическое ожидание времени поиска и вхождения в синхронизм, равного  $T_{CP}$  для случая ЦП, построенного на ПСП и коротких последовательностях ZC;  $D$  – вероятность правильного обнаружения;  $T_a = 66,67$  мкс – длительность OFDM-символа,  $n$  – число OFDM – символов, используемое для операции усреднения величин, входящих в формулу. В данной методике исследования  $n$  принимается равным числу OFDM – символов на длине половины кадра технологии LTE [3]. Вероятность правильного обнаружения [4]:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \Phi \left( \frac{r-H}{N_0} \right) \right],$$

где  $H$  – пороговый уровень;  $N_0$  – энергетический спектр АБГШ в центральном частотном диапазоне OFDM – символа;  $r$  – величина полезного сигнала – в данном случае – пика корреляционной функции ЦП [5]:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - \text{функция Лапласа.}$$

Для чистоты исследования оценки среднего времени вхождения в синхронизм в случаях ЦП, построенных на ПСП и ZC, рассматривается модель идеального канала

без шумов; в расчетной формуле для вероятности правильного обнаружения энергетические величины отношений С/Ш для корреляционных функций ЦП и пороговых величин  $H_r$  предлагается заменить отношениями мерит-фактора – отношением энергии главного лепестка корреляционной функций ЦП к суммарной энергии всех боковых лепестков [6]:

$$MF = \frac{R_0}{\sum_i R_i}.$$

В данной работе эта формула соответствует величине

$$MF_s = \frac{ACF\_CP_{max}}{\left[ \sum_n ACF\_CP(n) \right] / n},$$

где  $ACF\_CP_{max}$  – модуль максимального значения корреляционной функции (ACF) ЦП;  $ACF\_CP(n)$  – модуль  $n$ -го элемента ACF ЦП;  $n$  – число элементов ACF ЦП.

Тогда формула расчета  $D$  примет вид:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \Phi \left( \sqrt{MF_s} - H_r \right) \right].$$

Таблица 1 а ( $F = 10^{-3}$ )

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	5,1185	10,5526(u=5)	2,19	0,5394	0,7379	6228	3934
11	5,8239	10,4771(u=10)	-«-	0,6222	0,861	5094	3044
13	6,9075	13,5849(u=12)	-«-	0,7331	0,9259	3974	2668
17	7,3123	15,7297(u=13)	-«-	0,76465	0,9332	3716	2629
19	8,9341	17,0529(u=18)	-«-	0,87105	0,9682	2981	2451
31	9,5162	26,1628(u=30)	-«-	0,89595	0,9762	2834	2412
37	10,4457	32,4036(u=36)	-«-	0,9293	0,9838	2650	2376

Таблица 1 б ( $F = 10^{-4}$ )

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	5,1185	10,5526(u=5)	2,63	0,3016	0,6932	12953	4336
11	5,8239	10,4771(u=10)	-«-	0,37965	0,7065	9817	4211
13	6,9075	13,5849(u=12)	-«-	0,499	0,8326	6919	3225
17	7,3123	15,7297(u=16)	-«-	0,53705	0,86279	6266	3032
19	8,9341	17,0529(u=18)	-«-	0,69465	0,91713	4322	2716
31	8,5162	26,1628(u=30)	-«-	0,7275	0,9375	4023	2607
37	10,4457	32,4036(u=36)	-«-	0,8019	0,9547	3437	2518

Таблица 1 в ( $F = 10^{-5}$ )

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	5,1185	10,5526(u=5)	3,02	0,142	0,5165	30096	6606
11	5,8239	10,4771(u=10)	-«-	0,19565	0,5205	21212	6538
13	6,9075	13,5849(u=12)	-«-	0,28975	0,7024	13576	4249
17	7,3123	15,7297(u=13)	-«-	0,32755	0,766	11744	3705
19	8,9341	17,0529(u=18)	-«-	0,4825	0,8368	7234	3197
31	8,5162	26,1628(u=30)	-«-	0,53945	0,8935	6228	2848
37	10,4457	32,4036(u=36)	-«-	0,61675	0,9123	5159	2742

Таблица 1 г ( $F = 10^{-6}$ )

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	5,1185	10,5526(u=5)	3,45	0,04655	0,3098	96523	12549
11	5,8239	10,4771(u=10)	-«-	0,0713	0,311	59707	12492
13	6,9075	13,5849(u=12)	-«-	0,1226	0,5047	35222	6815
17	7,3123	15,7297(u=13)	-«-	0,14575	0,6123	29262	5213
19	8,9341	17,0529(u=18)	-«-	0,2572	0,70054	15586	4267
31	8,5162	26,1628(u=30)	-«-	0,30285	0,8334	12890	3220
37	10,4457	32,4036(u=36)	-«-	0,37895	0,8575	9839	3065

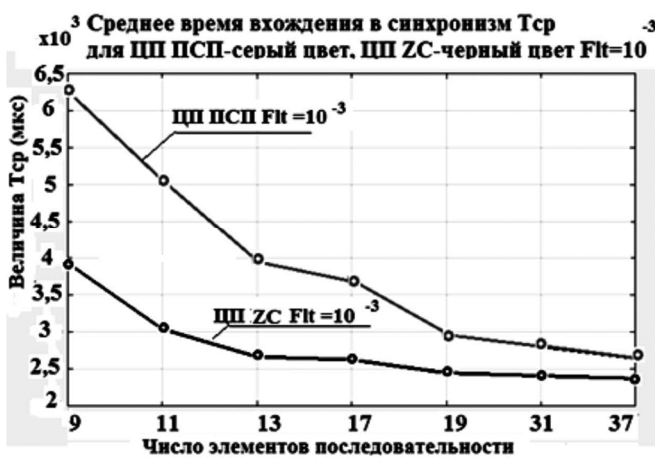


Рис. 1 а. График зависимости  $T_{cp}$  на этапе синхронизации по ЦП от числа элементов последовательности  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$  для ЦП на ПСП – серый цвет(вверху) и коротких последовательностей ZC – черный цвет(внизу) при вероятностях ЛТ  $F = 10^{-3}$  (слева),  $F = 10^{-4}$  (справа)

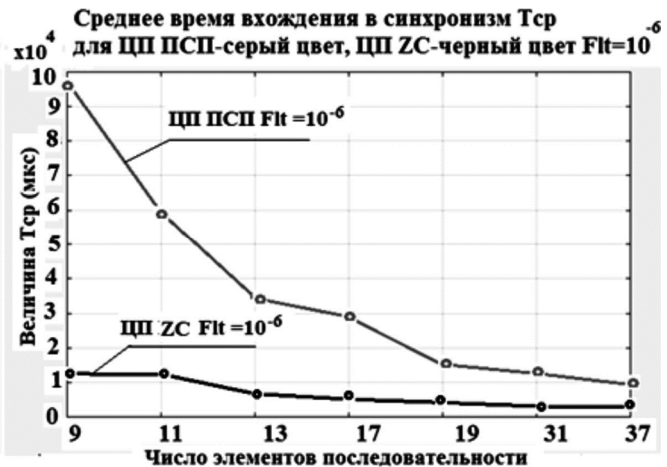
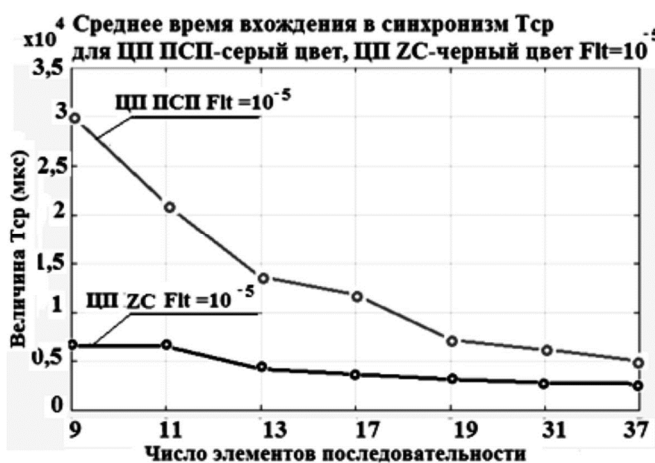


Рис. 1 б. График зависимости  $T_{cp}$  на этапе синхронизации по ЦП от числа элементов последовательности  $N = 9, 11, 13, 17, 19, 31, 37$  для ЦП на ПСП – серый цвет (вверху) и коротких последовательностей ZC – черный цвет (внизу) при вероятностях ЛТ  $F = 10^{-5}$  (слева),  $F = 10^{-6}$  (справа)

Порог  $H_r$  вычисляется из выражения для величины ложной тревоги (ЛТ)  $F$ . Величины ЛТ в данном исследовании задается равной  $F=10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  и из расчетной формулы [4],  $F = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \Phi \left( \frac{H}{N_0} \right) \right] = \frac{1}{2} \times [1 - \Phi(H_r)]$  вычисляется порог для разных значений ЛТ. Результаты вычислений  $T_{cp}$  – в табл. 1 а-1 г для  $F = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  соответственно.

Поскольку для различных величин корней  $u$  последовательностей ZC( $u, n$ ) отношения  $MF_s$  различаются, в процессе моделирования были выбраны последовательности с корнями (индексами)  $u$ , позволяющими получить максимальную величину  $MF_s$ .

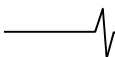
По результатам исследований построены графики зависимости времени входа в синхронизм для этапа синхронизации по ЦП от числа элементов последовательности, на которой построен ЦП (рис. 1 а, 1 б), для случая усреднения по числу OFDM – символов ( $n = 70$ ) на длительности половины кадра LTE нисходящего (DL) направления передачи в полосе центральных 72 поднесущих. Вероятность ложной тревоги  $F = 10^{-3}, F = 10^{-4}, F = 10^{-5}, F = 10^{-6}$  соответственно.

Результаты сравнительного анализа времени входа в синхронизм в случае использования коротких последовательностей ZC и стандартных ПСП ЦП в зависимости от величины вероятности ложной тревоги  $F$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

$F$	$K = [(T_{cp\_ПСП} - T_{cp\_ZC}) / T_{cp\_ПСП}] * 100\%$
$10^{-3}$	40,2 %...10,3 %
$10^{-4}$	66,5 %...26,7 %
$10^{-5}$	78,1 %...46,9 %
$10^{-6}$	87 %...68,8 %

В расчетах  $D$  для ЦП на основе последовательностей ZC проведена операция усреднения по величинам  $D$  для ЦП OFDM символов полукадра (70 символов). Для данных исследований процесса синхронизации использовались OFDM символы только центральной части частотного диапазона базовой станции сотовой (БС). В кадр на этапе синхронизации входят только 72 центральные поднесущие (рис. 2 [3, 7]). В составе каждого нечетного слота полукадра, кроме двух первых слотов, (в кадре 10 подкадров (subframe), в каждом – 2 слота (slot) – см. рис. 3) в двух первых символах – информация служебного характера, не допускающая замены двоичного ЦП на



последовательности ZC. В первом подкадре от служебной информации свободны только 6 OFDM символов. Четные слоты центральных поднесущих кадра предполагаются свободными от информации пользователей до заполнения всего частотно-временного диапазона ресурсной сетки кадра БС. То есть для замены ЦП OFDM-символов на короткие последовательности ZC на этапе синхронизации могут быть использованы  $6 + 12 * 4 = 54$  символа кадра на 72 центральных поднесущих. Для двоичных ЦП символов OFDM используются  $8 + 2 * 4 = 16$  символов OFDM (рис.3). Следует отметить, что до завершения синхронизации по ЦП ресурсные элементы референсных сигналов (RS – красные и черные ячейки кадра – рис. 2, 3) не могут использоваться для оценки помеховой ситуации канала связи и считаются свободными. Следовательно, среднее значение вероятности правильного обнаружения для ЦП на основе последовательности ZC  $D_{cpZC}$  на длительности подкадра вычисляется из соотношения:

$$D_{cpZC} = \frac{16 * D_{CP\_PSP} + 54 * D_{CP\_ZC}}{70},$$

где  $D_{CP\_PSP}, D_{CP\_ZC}$  – вероятности правильного обнаружения для пиков корреляционных функций символов OFDM с ЦП двоичных последовательностей и коротких последовательностей ZC соответственно. Здесь под вероятностью правильного обнаружения понимается вероятность точного определения начала символа OFDM.

Поскольку при установлении синхронизации используется только нормальный ЦП OFDM-символов (не расширенный), интересуют результаты для наиболее коротких последовательностей ZC, т.е. 9...17 элементов. Следует отметить, что наибольшую практическую ценность для случая технологии LTE OFDM представляют последовательности с числом элементов  $N = 9$  (коэффициент децимации выборок  $K_D = 16$  во временной области) и 18 или 17 с добавлением одного нуля с  $K_D = 8$ . Децимация выборок сигнала позволяет существенно сократить объем вычислений и повысить скорость обработки. Точность определения границ OFDM символов  $\Delta t$  на первом этапе синхронизации вполне достаточна для допустимой точности грубой временной синхронизации по корреляционной функции ЦП. На последующих этапах точность синхронизации повышается с учетом поправок на характеристики канала связи.

$$\Delta t(K_D 16) = \frac{T_{SYM}}{(k_{max} / K_D)} = \frac{66,67 mks}{2048 / 16} = 0,52 mks$$

при  $K_D = 16$  и

$$\Delta t(K_D 8) = \frac{T_{SYM}}{(k_{max} / K_D)} = \frac{66,67 mks}{2048 / 8} = 0,26 mks$$

при  $K_D = 8; k_{max} = 2048$  – максимальное число выборок дискретизации OFDM символов технологии LTE [3].

В продолжении исследований для получения результатов, применимых на практике в условиях плотной городской застройки, предлагаются результаты моделирования для коротких последовательностей Задова-Чу и двоичных ПСП ( $N = 9, 17$ ), прошедших канал связи с Рэлеевскими замираниями при добавлении БГШ в случаях

$SNR = 10 dB, 0 dB$ . Результаты исследований с усреднением по длине полукадра ( $n = 70 - 1 = 69$ ) – в табл. 3 а-3 б при  $SNR = 10 dB, 0 dB$  соответственно для вероятностей ЛТ  $F = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ :

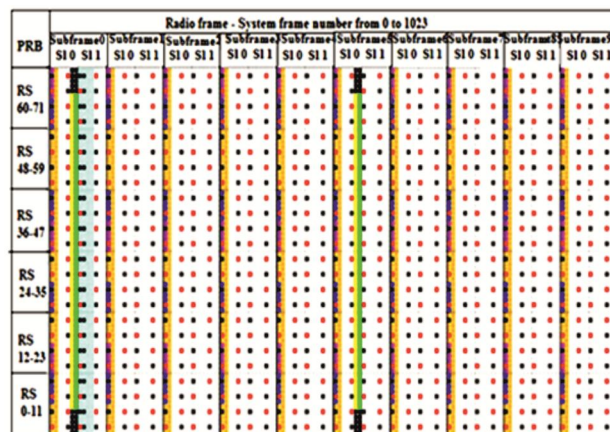


Рис. 2. Структура кадра FDD LTE OFDMA технологии, передаваемого от БС мобильному пользователю на этапе синхронизации. Каждая ячейка – ресурсный элемент (RE),  $12 * 7 = 84$  RE – ресурсный блок (RB). Шесть центральных ресурсных блоков содержат 72 центральных поднесущих для передачи первичного синхросигнала (PSS) – зеленый цвет и вторичного синхросигнала (SSS) – желтый цвет RE

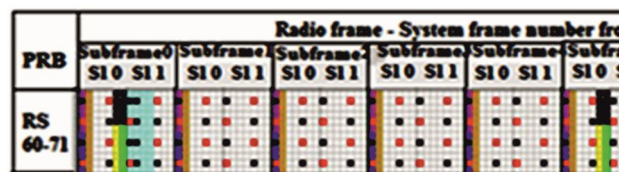


Рис. 3. Фрагмент полукадра технологии LTE OFDMA в увеличенном масштабе – первые 10 слотов со структурой служебной информации для пользователей (PSS, SSS, широковещательный канал, референтные сигналы (RS) – цветные ячейки) и RE – свободные ресурсные элементы – ячейки белого цвета

Параметры Рэлеевского канала связи, приведенные ниже, выбраны автором из предложенного диапазона ресурсов моделей каналов связи операционной системы MATLAB:

- частота дискретизации OFDM символа во временной области –  $(1/1920000) c = 0,52$  мкс;
- максимальная частота Допплеровского сдвига несущей частоты передаваемого сигнала – 80 Гц;
- 8 путей распространения сигнала;
- значения задержек по путям распространения (с): 0; 1,7e-7; 5,2e-7; 1,6e-6; 5,1e-6; 8,1e-6; 1,1e-5; 1,5e-5;
- значения коэффициентов затухания по путям распространения (dB): -0,5; -1,7; -2,2; -2,6; -3,1; -4,1; -5,6; -6,6;

При моделировании приняты возможные вариации параметров испытаний в пределах 30 %. Усреднение результатов проводилось по половине кадра LTE – технологии, т.е. по 70 OFDM символам или в течение 5 мс.

По результатам вычислений  $T_{cp}$  построены графики зависимости среднего времени вхождения в синхронизм для различных значений вероятности ЛТ в зависимости от SNR (рис. 5, 6). Графики серого цвета соответствуют  $T_{cp}$  для ЦП на ПСП ( $N = 9, 17$ ), графики черного цвета –  $T_{cp}$  для ЦП на последовательностях ZC ( $u, n = 9, 17$ ).

Таблица 3 а (SNR = 10 dB, F = 10<sup>-3</sup>, 10<sup>-4</sup>, 10<sup>-5</sup>, 10<sup>-6</sup>)

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	F, H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	5,177	6,5871	10 <sup>-3</sup> ; 2,19	0,54504	0,668	6140	4586
17	6,588	7,9744	-«-	0,7045	0,7886	4230	3533
9	5,177	6,5871	10 <sup>-4</sup> ; 2,63	0,3078	0,4287	12657	8431
17	6,588	7,9744	-«-	0,4645	0,5761	7603	5685
9	5,177	6,5871	10 <sup>-5</sup> ; 3,02	0,14605	0,2346	29197	17309
17	6,588	7,9744	-«-	0,2609	0,30107	15332	10440
9	5,177	6,5871	10 <sup>-6</sup> ; 3,45	0,0483	0,0927	92942	47324
17	6,588	7,9744	-«-	0,1059	0,1692	41139	24888

Таблица 3 б (SNR = 0 dB, F = 10<sup>-3</sup>, 10<sup>-4</sup>, 10<sup>-5</sup>, 10<sup>-6</sup>)

n	MF <sub>s</sub> ЦП В	MF <sub>s</sub> ЦП ZC	F, H <sub>r</sub>	D ПСП	D ZC	T <sub>CP</sub> ПСПмкс	T <sub>CP</sub> ZCмкс
9	4,4950	5,6996	10 <sup>-3</sup> ; 2,19	0,46001	0,5669	7700	5815
17	6,2322	7,0007	-«-	0,6694	0,7257	4572	4039
9	4,4950	5,6996	10 <sup>-4</sup> ; 2,63	0,23535	0,3359	17246	11395
17	6,2322	7,0007	-«-	0,42505	0,4916	8523	7058
9	4,4950	5,6996	10 <sup>-5</sup> ; 3,02	0,1013	0,16854	43112	24994
17	6,2322	7,0007	-«-	0,2295	0,2827	17744	13972
9	4,4950	5,6996	10 <sup>-6</sup> ; 3,45	0,0299	0,0581	151533	76878
17	6,2322	7,0007	-«-	0,08875	0,1188	49533	36422



Рис. 5. Графики зависимости T<sub>cp</sub> от SNR(10 dB, 0 dB) для значений вероятности ЛТ F = 10<sup>-3</sup>, 10<sup>-4</sup> на этапе синхронизации по ЦП. Число элементов последовательностей N = 9 (слева), N = 17(справа) Серый цвет – графики T<sub>cp</sub> для ЦП, построенных на ПСП, черный цвет – для ЦП, построенных на последовательностях ZC



Рис. 6. Графики зависимости T<sub>cp</sub> от SNR(10dB, 0dB) для значений вероятности ЛТ F = 10<sup>-5</sup>, 10<sup>-6</sup> на этапе синхронизации по ЦП. Число элементов последовательностей N = 9 (слева), N = 17(справа) Серый цвет – графики T<sub>cp</sub> для ЦП, построенных на ПСП, черный цвет – для ЦП, построенных на последовательностях ZC

	SNR = 10 dB, $K = [(T_{CP\_ПСП} - T_{CP\_ЗС}) / T_{CP\_ПСП}] * 100 \%$	F	SNR = 0 dB, $K = [(T_{CP\_ПСП} - T_{CP\_ЗС}) / T_{CP\_ПСП}] * 100 \%$
$10^{-3}$	25,3%...16,5%	$10^{-3}$	24,5%...11,7%
$10^{-4}$	33,4%...25,2%	$10^{-4}$	33,9%...17,2%
$10^{-5}$	40,7%...31,9%	$10^{-5}$	42,1%...21,3%
$10^{-6}$	49,1%...39,5%	$10^{-6}$	49,3%...26,5%

Результаты сравнительного анализа времени вхождения в синхронизм после прохождения канала с Рэлеевскими замираниями в случае использования коротких последовательностей ЗС и стандартных ПСП ЦП в зависимости от величины вероятности ложной тревоги  $F$  приведены в таблице 4 в 2-х вариантах – при добавлении БГШ с SNR = 10 dB и 0 dB.

### Заключение

По результатам исследования время вхождения в синхронизм  $T_{cp}$  на этапе синхронизации по корреляционной функции ЦП, как для идеального канала связи, так и для Рэлеевского канала, при вероятностях ЛТ  $F = 10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$  значительно превышает предполагаемое время усреднения 5 мс как для ЦП, построенного на ПСП. Так и для ЦП на последовательностях ЗС, причем для последовательностей с  $N = 9, 11, 13, 17$   $T_{cp}$  наиболее превышает изначально предполагаемое. Но наблюдается существенная разница для ЦП на ПСП и ЗС.

В случае идеального канала (см. табл. 1 а-1 в) превышение предполагаемого времени вхождения в синхронизм (5 мс) для коротких последовательностей ЗС проявляется только при  $F = 10^{-5}$  ( $N = 9, 11$ ),  $F = 10^{-6}$  ( $N = 9, 11, 13, 17$ ); для ПСП это превышение – при  $F = 10^{-3}$  ( $N = 9$ ),  $F = 10^{-4}$  ( $N = 9, 11, 13, 17$ ),  $F = 10^{-5}$  ( $N = 9, 11, 13, 17, 31, 37$ ),  $F = 10^{-6}$  ( $N = 9, 11, 13, 17, 31, 37$ ). Значения  $T_{cp}$  для ЦП на ПСП в 2...8 раз больше, чем для ЦП на коротких последовательностях ЗС. В случае Рэлеевского канала (см. табл. 3 а-3 б) значения  $T_{cp}$  несколько сближаются по величине для ЦП на ПСП и для ЦП на коротких последовательностях ЗС, но тенденции остаются:  $T_{cp}$  для ЦП на ПСП в 1,2...2 раза больше, чем для ЦП на коротких последовательностях ЗС. Прохождение последовательностей ПСП/ЗС через Рэлеевский канал увеличивает среднее время вхождения в синхронизм для коротких последовательностей примерно в 1,2...1,6 раз по сравнению с моделью идеального канала. Наиболее ощутима эта разница для случая вероятности ЛТ  $F = 10^{-6}$ : при прохождении Рэлеевского канала с добавлением БГШ с SNR = 0 dB (см. табл. 3 б) для ЦП,

построенного на ПСП с числом элементов  $N = 9$   $T_{cp} = 151533$  мкс (151,533 ms), т.е. более 15 длительностей кадра технологии LTE ( $T_{frame} = 10$  ms [3]). Для ЦП на последовательностях ЗС с тем же числом элементов  $T_{cp} = 76878$  мкс, т.е. в 2 раза меньше. Из табл. 2, 4 сравнительного анализа  $T_{cp}$  для идеального и Рэлеевского канала следует вывод о значительном преимуществе в скорости вхождения в синхронизм на этапе синхронизации по ЦП для использования коротких последовательностей ЗС в составе ЦП технологии LTE OFDM.

### Литература

1. Киселева Т.П. Использование последовательностей Задова-Чу для синхронизации по корреляционной кривой циклического префикса OFDM – символов LTE технологии. Цифровая обработка сигналов, № 1, 2020, 13-17 с.
2. Журавлев В.И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах – М.: Радио и связь, 1986. – 240 с.
3. ETSI TS 136 211 V10.0.0 (2011-01). Technical Specification. – European Telecommunications Standards Institute, 2011. – 104 с. – LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation (3GPP TS 36.211 version 10.0.0 Release 10)
4. Теоретические основы радиолокации. Под ред. Ширмана Я.Д. Учеб. пособие для вузов, М., Сов. Радио, 1970, 560 с.
5. Функция ошибок. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://abakbot.ru/online-16/451-erf> (дата обращения: 10.02.2020).
6. Хасанов М.С., Курганов В.В. Методы определения коэффициентов квазиоптимального КИХ-фильтра свертки псевдослучайной бинарной последовательности. // Общероссийский информационный ресурс. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D145.pdf> (дата обращения: 31.10.2018).
7. Primary Synchronization Signal (PSS). [Электронный ресурс] – Режим доступа: [http://anisimoff.org/lte/lte\\_synch.html](http://anisimoff.org/lte/lte_synch.html) (дата обращения: 10.02.2019).



УДК 621.391

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ВИТЕРБИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СИГНАЛАМИ

Вершинин В.А., к.т.н., г. Рыбинск, e-mail: [vershinin-vladimir@yandex.ru](mailto:vershinin-vladimir@yandex.ru)

### THE USE OF THE VITERBI ALGORITHM IN THE TRANSMISSION OVERLAPPING THE ELEMENTARY SIGNALS

*Vershinin V.A.*

Frequency efficiency, noise immunity, and implementation complexity are the most important parameters of binary message transmission. One of the ways to increase frequency efficiency is the deliberate or controlled introduction of intersymbol interference into the transmitted signal with an acceptable reduction in noise immunity. The purpose of this paper is to consider one of the ways to implement this direction using the Viterbi algorithm. Options for generating the transmitted signal and receiving are considered. The noise immunity of the transmission under the influence of interference in the form of white noise is estimated. The considered method of transmitting binary messages provides a fairly good frequency efficiency without using a spectrum shaper with an acceptable reduction in noise immunity.

**Key words:** overlapping signals, intersymbol interference, frequency efficiency, complex envelope, Viterbi algorithm, noise immunity.

**Ключевые слова:** перекрывающиеся сигналы, межсимвольная интерференция, частотная эффективность, комплексная огибающая, алгоритм Витерби, помехоустойчивость.

#### Введение

Сознательное или контролируемое введение в передаваемый сигнал межсимвольной интерференции является одним из направлений повышения спектральной эффективности передачи двоичных сообщений [1]. Межсимвольная интерференция приводит к ухудшению помехоустойчивости передачи и усложнению алгоритма приема.

Определим на интервале  $-T/2 \leq t < T/2$  ортогональные сигналы:

$$\begin{aligned} c(t) &= \cos(2\pi Kt/T) + \cos[2\pi(K+1)t/T]; \\ s(t) &= \sin(2\pi Kt/T) + \sin[2\pi(K+1)t/T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Вне указанного интервала сигналы равны нулю. Здесь  $K$  – целое положительное число. На рис. 1 показан в нормированном виде сигнал  $c(t)$ , а на рис. 2 – сигнал  $s(t)$  при  $K = 2$ .

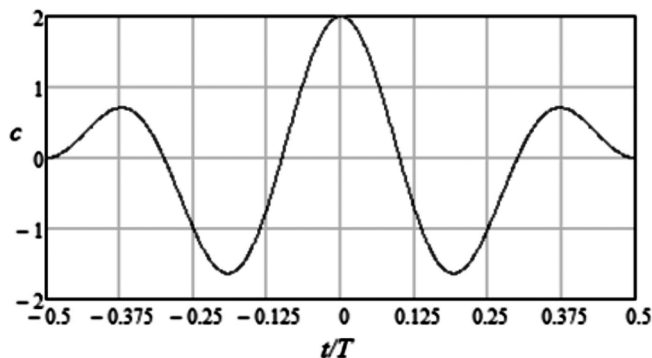


Рис. 1. Нормированный сигнал  $c(t)$

Частотная эффективность, помехоустойчивость и сложность реализации являются важнейшими параметрами передачи двоичных сообщений. Одним из направлений повышения спектральной эффективности является сознательное или контролируемое введение в передаваемый сигнал межсимвольной интерференции при приемлемом снижении помехоустойчивости. Целью работы является рассмотрение одного из способов реализации этого направления с использованием при приеме алгоритма Витерби. Рассмотрены варианты формирования передаваемого сигнала и приема. Произведена оценка помехоустойчивости передачи при воздействии помехи в виде белого шума. Рассматриваемый способ передачи двоичных сообщений обеспечивает достаточно хорошую частотную эффективность без использования формирователя спектра при допустимом снижении помехоустойчивости.

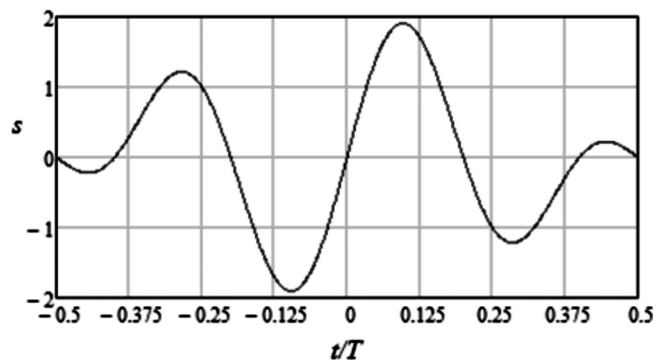
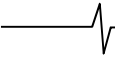


Рис. 2. Нормированный сигнал  $s(t)$

Под двоичным сообщением будем понимать последовательность элементов. Элемент сообщения может принимать два значения 0 или 1. Элементы двоичного сообщения считаются независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 или 1 с равной вероятностью. Одновременно передаются два элемента сообщения (пара элементов) с помощью ортогональных сигналов (1) длительностью  $T$ . Пары элементов сооб-



щения поступают для передачи с интервалом  $T/2$ . Таким образом, сигналы, соответствующие последовательно передаваемым парам элементов частично перекрываются во времени на величину  $T/2$ . В результате при приеме имеется межсимвольная интерференция.

Пусть передаваемый сигнал на интервале  $0 \leq t < (M+1)T/2$  формируется в виде:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M [a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2)], \quad (2)$$

где  $a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2)$  – сигнал, соответствующий одновременной передаче пары элементов сообщения;  $M$  – число пар элементов в сообщении;  $a_m$  и  $b_m$  принимают значения 1 или  $-1$  в зависимости от значений 1 или 0 элемента сообщения;  $A$  – постоянный коэффициент.

Применение сигнала вида (2) для передачи двоичных сообщений рассматривалось в [2] с использованием поэлементного приема и приема в целом. Из [2] следует, что средняя мощность сигнала (2) равна  $P = 4A^2$ ,

его амплитуда  $4A$ , а пик-фактор  $\frac{4A}{\sqrt{P}} = 2$ . Пик-фактор

определяется как отношение пиковой амплитуды сигнала к его среднеквадратичному значению (корень квадратный из средней мощности). Полоса частот, в которой сосредоточено 99% мощности сигнала  $y(t)$ ,  $F \approx 2,36/T$ . Удельные затраты полосы  $F/R \approx 0,59$ , где  $R = 1/T_0 = 4/T$  – скорость передачи элементов двоичного сообщения (бит/с). Спектральная эффективность  $R/F \approx 1,69$ . Существуют различные критерии определения полосы частот [3], здесь используется один из них.

Таким образом, использование сигнала (2) обеспечивает достаточно высокую спектральную эффективность без использования формирователя спектра. При приеме таких сигналов может использоваться алгоритм Витерби, который реализует правило максимального правдоподобия и минимизирует вероятность ошибки при межсимвольной интерференции [4]. Целью данной работы является рассмотрение формирования сигнала (2) и его приема с использованием алгоритма Витерби.

### Формирование сигнала на основе комплексной огибающей

Формирование передаваемого сигнала можно осуществить непосредственно по формуле (2). Однако при больших значениях  $K$  целесообразно исходить из комплексной огибающей этого сигнала.

Комплексную огибающую сигнала (2) определим следующим образом:

$$\dot{y}(t) = y_a(t)r(t), \quad (3)$$

$$\text{где } r(t) = \begin{cases} e^{-j2\pi Kt/T} & \text{для четных } K; \\ e^{-j2\pi(K+1)t/T} & \text{для нечетных } K; \end{cases} \quad y_a(t) \text{ – аналитический сигнал, соответствующий сигналу } y(t). \text{ Здесь и далее } j \text{ – мнимая единица.}$$

Здесь и далее  $j$  – мнимая единица.

Как известно,  $y_a(t) = y(t) + jy_H(t)$ , где  $y_H(t)$  – преобразование Гильберта сигнала  $y(t)$ . С учетом (1) и (2):

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \sum_{m=1}^M \{a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2) + \\ &+ j[a_m As(t - mT/2) - b_m Ac(t - mT/2)]\} = \\ &= \sum_{m=1}^M [(b_m + ja_m) As(t - mT/2) + \\ &+ (a_m - jb_m) Ac(t - mT/2)] = \\ &= \sum_{m=1}^M (b_m + ja_m) A(-j)[c(t - mT/2) + js(t - mT/2)] = \\ &= \sum_{m=1}^M (b_m + ja_m) A(-j)[e^{j2\pi K(t/T - m/2)} + e^{j2\pi(K+1)(t/T - m/2)}]. \end{aligned}$$

Тогда (3) можно записать в виде:

$$\dot{y}(t) = y_a(t)r(t) = \sum_{m=1}^M \{(b_m + ja_m) Ag(t - mT/2)\}, \quad (4)$$

где

$$g(t) = \begin{cases} -j(e^{j2\pi t/T} + 1) = \sin(2\pi t/T) - \\ -j[1 + \cos(2\pi t/T)] & \text{для четных } K; \\ -j(e^{-j2\pi t/T} + 1) = -\sin(2\pi t/T) - \\ -j[1 + \cos(2\pi t/T)] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

Сигнал  $g(t)$  определен на интервале  $-T/2 \leq t < T/2$ , вне этого интервала он равен нулю.

Имея в виду (3), можно получить, что

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Re}[\dot{y}(t)r^*(t)] = \\ &= \begin{cases} \text{Re}[\dot{y}(t)]\cos(2\pi Kt/T) - \\ -\text{Im}[\dot{y}(t)]\sin(2\pi Kt/T) & \text{для четных } K; \\ \text{Re}[\dot{y}(t)]\cos[2\pi(K+1)t/T] - \\ -\text{Im}[\dot{y}(t)]\sin[2\pi(K+1)t/T] & \text{для нечетных } K, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $r^*(t)$  – величина, комплексно сопряженная по отношению к  $r(t)$ . Из последнего выражения следует, что передаваемый сигнал может быть сформирован с помощью квадратурного модулятора, на входы которого поступают действительная и мнимая составляющая комплексной огибающей (4).

### Прием с использованием алгоритма Витерби

Пусть на входе приемника на интервале  $0 \leq t < (M+1)T/2$  имеет место сигнал

$$z(t) = y(t) + n(t), \quad (5)$$

где  $n(t)$  – аддитивная помеха в виде шума с одночастотной спектральной плотностью мощности  $N$  в диапазоне частот  $0 \leq f < f_1$ . При других частотах спектральная плотность мощности помехи равна нулю. Помеха имеет нормальное распределение значений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 = Nf_1$ .

Рассмотрим обработку сигнала  $z(t)$  путем перехода к комплексной огибающей этого сигнала:

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t) + \dot{n}(t), \quad (6)$$

где  $\dot{n}(t)$  – комплексная огибающая, соответствующая помехе  $n(t)$ .

Для реализации алгоритма Витерби вычисляются комплексные значения (отсчеты) сигнала  $\dot{z}(t)$  на интервале  $(m-1)T/2 \leq t < (m+1)T/2$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ :

$$z_m = \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{z}(t) dt, \quad (7)$$

где  $g^*(t)$  – величина, комплексно сопряженная по отношению к  $g(t)$ .

Кроме того, для алгоритма Витерби необходимы так называемые каналные коэффициенты, которые можно определить следующим образом. С использованием (4) и (6):

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{1}{2T} \times \\ &\times \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \left\{ (b_{m-1} + ja_{m-1}) Ag[t-(m-1)T/2] + \right. \\ &+ (b_{m+1} + ja_{m+1}) Ag[t-(m+1)T/2] \left. \right\} dt + \\ &+ \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{n}(t) dt = \\ &= (b_{m-1} + ja_{m-1}) q_3 + (b_m + ja_m) q_2 + \\ &+ (b_{m+1} + ja_{m+1}) q_1 + \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{n}(t) dt. \end{aligned}$$

В последнем выражении обозначено:

$$q_1 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t-T/2) dt - \text{каналный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_{m+1} \text{ и } b_{m+1};$$

определяющий вклад в  $m$ -й отсчет переданных элементов  $a_m$  и  $b_m$ ;

$$q_2 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t) dt - \text{каналный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_m \text{ и } b_m;$$

определяющий вклад в  $m$ -й отсчет переданных элементов  $a_m$  и  $b_m$ ;

$$q_3 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t+T/2) dt - \text{каналный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_{m-1} \text{ и } b_{m-1}.$$

Если ввести вектор каналных коэффициентов  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]$ , то

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3], \text{ то}$$

$$q = \begin{cases} [-A0,318i \ A \ A0,318i] & \text{для четных } K; \\ [A0,318i \ A \ -A0,318i] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

Для определения отсчетов по формуле (7) необходимо получить комплексную огибающую  $\dot{z}(t)$ . Комплексную огибающую можно определить с помощью преобразования Гилберта. На практике ее определяют несколько иначе с использованием квадратурного де-

модулятора. Для этого предварительно формируется сигнал

$$z_1(t) = z(t)r(t) = \begin{cases} z(t) \cos(2\pi Kt/T) - \\ -z(t)j \sin(2\pi Kt/T) & \text{для четных } K; \\ z(t) \cos[2\pi(K+1)t/T] - \\ -z(t)j \sin[2\pi(K+1)t/T] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

Действительная и мнимая части этого сигнала  $\text{Re}[z_1(t)]$  и  $\text{Im}[z_1(t)]$  поступают на входы фильтров нижних частот (ФНЧ). На выходах фильтров будем иметь  $\text{Re}[\dot{z}(t)]$  и  $\text{Im}[\dot{z}(t)]$  соответственно. О выборе ФНЧ будет сказано ниже.

Необходимо отметить, что обработку сигнала  $z(t)$  можно осуществить и без перехода к комплексной огибающей этого сигнала. Это целесообразно при небольших значениях  $K$ . При этом комплексные значения (отсчеты) сигнала  $z(t)$  для алгоритма Витерби определяются следующим образом:

$$z_m = \frac{1}{T} \times \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) z z(t) dt + j \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) z z(t) dt.$$

Имея в виду (2) и (5),

$$\begin{aligned} z_m &= a_{m-1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) c[t-(m-1)T/2] dt + \\ &+ b_m A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} [s(t-mT/2)]^2 dt + \\ &+ a_{m+1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) c[t-(m+1)T/2] dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) n(t) dt + \\ &+ j \left\{ b_{m-1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) s[t-(m-1)T/2] dt + \right. \\ &+ a_m A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} [c(t-mT/2)]^2 dt + \\ &+ b_{m+1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) s[t-(m+1)T/2] dt + \\ &+ \left. \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) n(t) dt \right\} = \\ &= (b_{m-1} + ja_{m-1}) q_3 + (b_m + ja_m) q_2 + (b_{m+1} + ja_{m+1}) q_1 + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) n(t) dt + \\ &+ j \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) n(t) dt, \text{ где} \end{aligned}$$

$$q_1 = -jA \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)c(t-T/2)dt; \quad q_2 = A \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t)]^2 dt;$$

$$q_3 = -jA \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t)c(t+T/2)]dt - \text{канальные коэффици-}$$

циенты, они имеют те же числовые значения, что были определены выше.

### Моделирование

Дальнейший анализ использования алгоритма Витерби будем проводить с использованием моделирования в среде Matlab. При этом сигналы на интервале  $0 \leq t < (M+1)T/2$ , рассматриваются в дискретные моменты времени  $t_d = (d-1)T_0$ , где  $d = 1, 2, \dots, (M+1)D/2$ ;  $T_0$  – период дискретизации;  $D = T/T_0$  – число дискретных моментов времени на этом интервале  $0 \leq t < T$ , это число должно быть четным. Необходимо отметить, что выбор  $D$  при моделировании будет определяться точностью воспроизведения процессов, описанных в двух предыдущих разделах, а не желанием перехода к цифровой обработке сигналов. Чем большее значение  $D$  выбирается, тем точнее моделирование, однако при этом увеличивается время выполнения программы моделирования.

Значения помехи в дискретные моменты времени при условии  $T_0 = \frac{1}{2f_1}$  являются независимыми случайными величинами, дисперсия этих величин  $\sigma^2 = Nf_1 = \frac{N}{2T_0}$ . Воздействие помехи на сигнал принято характеризовать величиной  $h^2 = W/N$ , где  $W$  – средняя энергия сигнала  $y(t)$  на  $m$ -ом интервале, приходящаяся на элемент передаваемого сообщения,  $W = PT/4 = A^2T$ . Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{N}{2T_0}} = \sqrt{\frac{W}{2T_0h^2}} = \sqrt{\frac{A^2T}{2T_0h^2}} = A \sqrt{\frac{T}{2T_0h^2}} = A \sqrt{\frac{D}{2h^2}}.$$

Ниже приведена программа моделирования.

```

1. function er=viter_ser(K,h2,U)
2. rng('default');
3. M=1000;
4. A=1;
5. T=1;
6. D=20*K;
7. T0=T/D;
8. [k1,k2]=butter(5,(K-1.5)*2/D);
9. p=round(grpdelay(k1,k2,1,D/T));
10. td=0:T0:(M+1)*T/2 -T0;
11. const=[-1+1i; -1-1i; 1+1i; 1-1i];
12. if rem(K,2)==0
13. rd= exp(-1i*2*pi*K*td/T);
14. gd=sin(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)) -1i(1+cos(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)));
15. q=[-A*0.318; A; A*0.318i];
16. else
17. rd= exp(-1i*2*pi*(K+1)*td/T);

```

```

18. gd=-sin(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)) -
19. 1i(1+cos(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)));
20. q=[A*0.318; A; -A*0.318i];
21. sigma=A*sqrt(L/(2*h2));
22. z=zeros(1,M+1);
23. er=0;
24. for u=1:U
25. a=2*round(rand(1,M))-1;
26. b=2*round(rand(1,M))-1;
27. ydc=upfirdn(b+1i*a,A*gd,D/2);
28. yd=real(ydc.*((rd(1:(M+1)*D/2))));
29. nd=normrnd(0,sigma,1,(M+1)*D/2);
30. zd=yd+nd;
31. zd1=rd.*zd;
32. ezd=filter(k1,k2,[zd1 zeros(1,p)]);
33. for m=1:M
34. ezd1=ezd(p+1+(m-1)*D/2:(m+1)*D/2+p);
35. z(m+1)=(ezd1*gd')kd/D;
36. end
37. viter=mlseeq(z,q,const,15,'rst');
38. b1=real(viter(1:M));
39. a1=imag(viter(1:M));
40. er1=sum(ne(a,a1))+sum(ne(b,b1));
41. er=er+er1;
42. end
43. end

```

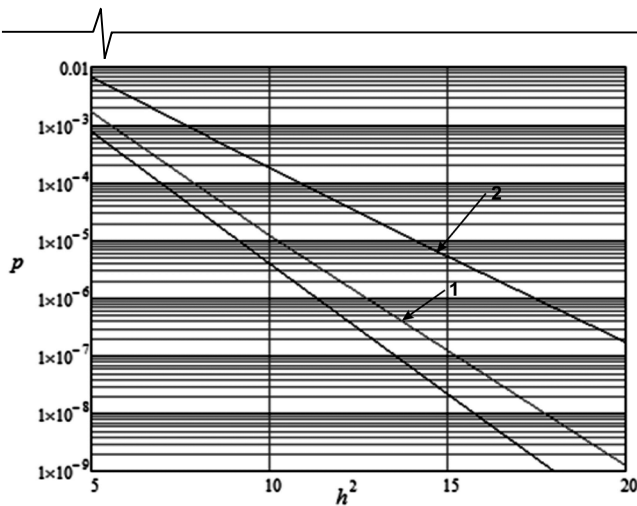
Результаты моделирования с помощью приведенной выше программы приведены в табл. 1. Моделирование производилось при  $M = 1000$ ,  $K = 5$  и различных значениях  $h^2$ . В результате получено значение числа ошибок при использовании алгоритма Витерби  $N_{ош}$  при передаче  $N_{пер} = 2MU$  элементов двоичного сообщения. Затем с помощью функции `berconfint` пакета Matlab определена оценка вероятности ошибки  $p = N_{ош}/N_{пер}$ , нижняя  $p_n$  граница, верхняя  $p_e$  граница оценки с доверительной вероятностью 0,95.

Таблица 1. Результаты моделирования

$h^2$	5	10	15	20
$U$	$10^3$	$10^5$	$10^6$	$10^7$
$N_{пер}$	$2 \times 10^6$	$2 \times 10^8$	$2 \times 10^9$	$2 \times 10^{10}$
$N_{ош}$	3296	2443	245	25
$p$	$1,648 \times 10^{-3}$	$1,221 \times 10^{-5}$	$1,225 \times 10^{-7}$	$1,25 \times 10^{-9}$
$p_n$	$1,592 \times 10^{-3}$	$1,173 \times 10^{-5}$	$1,076 \times 10^{-7}$	$0,8087 \times 10^{-9}$
$p_e$	$1,705 \times 10^{-3}$	$1,271 \times 10^{-5}$	$1,388 \times 10^{-7}$	$1,845 \times 10^{-9}$

На рис. 3 показана диаграмма зависимости  $p$  от  $h^2$  (линия 1). Линией 2 изображена зависимость при алгоритме приема в целом [2].

Сравним изложенный в статье способ передачи двоичного сообщения с известным способом передачи, который принято называть модуляцией с минимальным сдвигом (ММС, MSK). Из приведенного в [3] выражения для спектральной плотности мощности можно определить, что полоса частот, в которой сосредоточено 99 % мощности сигнала при ММС  $F_{ММС} \approx 1,18/T_0$ , удельные

Рис. 3. Зависимости  $p$  от  $h^2$ 

затраты полосы  $F_{MMC}/R \approx 1,18$ , спектральная эффективность  $R/F_{MMC} \approx 0,85$ , пик-фактор равен  $\sqrt{2}$ . Таким образом, рассматриваемый способ передачи имеет в два раза большую спектральную эффективность, но в  $\sqrt{2}$  раз больший пик-фактор. В [3] также отмечено, что вероятность ошибки при оптимальном приеме сигнала с MMC такая же как при использовании двоичной фазовой манипуляции (ФМ2, BPSK). На рис. 3 соответствующая зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум показана черной линией и можно заключить, что помехоустойчивость рассматриваемого способа передачи несколько хуже, чем при применении MMC. Таким образом, основным преимуществом рассматриваемого способа передачи по сравнению с MMC являются в два раза меньшие удельные затраты полосы и, соответ-

ственно, в два раза большая спектральная эффективность.

### Заключение

Рассматриваемый способ передачи двоичного сообщения обеспечивает достаточно высокую спектральную эффективность без использования формирователя спектра при допустимом снижении помехоустойчивости.

Полученные оценки для вероятности ошибки позволяют оценить потенциальную помехоустойчивость приема с использованием алгоритма Витерби.

Повышается помехоустойчивость приема с использованием алгоритма Витерби по сравнению с поэлементным приемом и приемом в целом.

### Литература

1. Нгуен Тан Хоанг Фьюк, Гельгор А.Л. Повышение спектральной эффективности DVB-S2 путём применения сигналов с управляемой интерференцией и конечными импульсами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2019. Т. 12. № 3.
2. В.А. Вершинин. Поэлементный прием и прием в целом при перекрывающихся элементарных сигналах // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2018. N10. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/oct18/5/text.pdf>
3. Скляр Бернанд. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая связь: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.– 164 с.

### Уважаемые коллеги!

*Приглашаем Вас принять участие в формировании тематических выпусков журнала «Цифровая обработка сигналов» и размещению рекламы продукции (услуг) Вашей организации на его страницах. В случае положительного решения просим представить в редакцию журнала Ваши предложения по плановому размещению информационных материалов и макет рекламы продукции (услуг) с указанием желаемого её месторасположения: обложка (2-я, 3-я или 4-я стр.), цветная внутренняя полоса (объем полосы).*

Журнал «Цифровая обработка сигналов» издается с 1999 года. Выходит ежеквартально, тиражом 250 экз.

Научно-технический журнал «Цифровая обработка сигналов» включен в Перечень изданий, рекомендуемый ВАК РФ для публикации результатов научных исследований соискателями ученой степени доктора и кандидата технических наук в области радиотехники, связи, вычислительной техники, электроники, приборостроения, информационных технологий, информационно-измерительных и управляющих систем. Журнал «Цифровая обработка сигналов» включен в базу данных Web of Science – Russian Science Citation Index (287-я позиция)

#### Планируемые сроки издания отдельных номеров журнала:

- № 1 март 2021 г. Тематический выпуск: «ЦОС в инфокоммуникационных системах».
- № 2 июнь 2021 г. Тематический выпуск по материалам 23-й Международной научно-технической конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение-DSPA».
- № 3 сентябрь 2021 г. Тематический выпуск: «Цифровая обработка изображений».
- № 4 декабрь 2021 г. Тематический выпуск: «ЦОС в радиотехнике и системах телекоммуникаций».

#### Ориентировочная стоимость рекламных услуг:

- 4-я (внешняя) страница цветной обложки – 25 тысяч рублей.
- 2-я и 3-я (внутренние) страницы цветной обложки – 15 тысяч рублей.
- 1/2 цветной внутренней полосы – 8 тысяч рублей.

Ждем Ваших предложений.

С наилучшими пожеланиями, зам. главного редактора

д.т.н., профессор Витязев Владимир Викторович, телефон 8-903-834-81-81.

Предложения прошу направлять по адресу: E-mail: [vityazev.v.v@rsreu.ru](mailto:vityazev.v.v@rsreu.ru) или [info@dspa.ru](mailto:info@dspa.ru)

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТРЕХ СИГНАЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ И БЛАНКИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МЕШАЮЩИХ ОТРАЖЕНИЙ

*Бартенев В.Г., профессор, д.т.н., МИРЭА – Российский технологический университет,  
e-mail: bartenev\_v@mirea.ru*

## THE USAGE OF THREE SIGNAL FEATURES FOR CLASSIFICATION AND BLANKING OF DISCRETE INTERFERING REFLECTIONS

*Bartenev V.G.*

*A new method for the classification and blanking of discrete interfering reflections is proposed, based on the use of three signal features: Doppler velocity, inter-frequency correlation coefficient and an effective scattering surface.*

**Key words:** doppler velocity, inter-frequency correlation coefficient, effective scattering surface.

**Ключевые слова:** дискретные мешающие отражения, доплеровская частота, межчастотный коэффициент корреляции, эффективная поверхность рассеяния.

### Введение

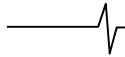
Известен способ бланкирования сигналов дискретных мешающих отражений, основанный на формировании одного сигнального признака, так называемого скоростного, с классификацией, сигнала, отраженного от мешающего точечного объекта, имеющего малую радиальную скорость в данном элементе дальности [1]. Поэтому данный сигнал бланкируется, снижая поток ложных отметок на выходе приемного тракта РЛС. Основным недостатком данного способа является его низкая эффективность, обусловленная необходимостью использования для однозначного измерения скорости вобулированной пачки с ограниченным числом импульсов. Кроме того, попытка выставления максимально высокого скоростного порога для повышения эффективности данного способа приводит к росту вероятности бланкирования полезных целей с малой радиальной скоростью.

Более эффективным является двухчастотный способ классификации и бланкирования дискретных коррелированных помех. Данный способ строится на обработке отраженных сигналов на каждой несущей частоте РЛС в виде двух выборок наблюдения в каждом элементе дальности и включает в себя формирование оценок межпериодной доплеровской разности фазы с последующим их вычитанием для однозначного измерения скорости обнаруживаемого дискретного объекта [2]. Полученная таким образом оценка межчастотной межпериодной разности фазы сравнивается с фазовым порогом (фактически со скоростным порогом), на основании чего принимается решение о бланкировании отраженных сигналов от медленно движущихся мешающих точечных объектов, если этот порог оказался не превышен. Хотя данный способ позволяет осуществлять более эффективную классификацию сигналов благодаря более высокой точности оценки межпериодной

*Предложен новый способ классификации и бланкирования дискретных мешающих отражений, основанный на использовании наряду с такими применяемыми сигнальными признаками как доплеровская скорость и межчастотный коэффициент корреляции еще и эффективной поверхности рассеяния (ЭПР). По совокупности этих трех сигнальных признаков принимается решение о принадлежности принятых эхо сигналов в каждом элементе дальности к дискретным мешающим отражениям. Приведены результаты моделирования эффективности от добавления ЭПР признака к ранее применяемым двум сигнальным признакам.*

разности фазы на каждой несущей частоте РЛС, из-за отсутствия вобуляции периодов повторения с использованием большего числа импульсов, тем не менее, и данному способу с одним сигнальным признаком свойственен недостаток бланкирования полезных целей с малыми радиальными скоростями.

Для исключения бланкирования полезных сигналов от целей с малыми радиальными скоростями для принятых на двух несущих частотах сигналов осуществляются как формирование оценок межчастотной межпериодной доплеровской разности фазы для однозначного измерения скорости объектов в каждом элементе дальности, так и формирование второго сигнального признака в виде модуля межчастотного коэффициента корреляции, который используется для оценки продольного размера классифицируемых объектов и который при не превышении порога классифицируется как мешающий сигнал по корреляционному признаку, при этом скоростному и корреляционному признаку для мешающих отражений ставят в соответствие логические единицы, совпадение которых фиксируют в каждом элементе дальности с помощью логической функции «И», на основании чего принимается решение о бланкировании отраженного сигнала в данном элементе дальности [3]. Хотя данный способ позволяет, используя скоростной и корреляционный признаки, повысить эффективность бланкирования мешающих отражений, однако не учет мощности отраженного сигнала может привести к ошибочной классификации, когда могут быть приняты за мешающие отражения сигналы от цели с малой ра-



диальной скоростью и большого размера, например, авиалайнер летящий с ракурсом по отношению к РЛС.

### Новый способ классификации и бланкирования дискретных мешающих отражений

С целью исключения бланкирования полезных сигналов от целей с большой эффективной поверхностью рассеяния (ЭПР), предлагается формирование третьего сигнального признака в виде оценки мощности принимаемых сигналов, которая сравнивается с порогом в каждом элементе дальности с присвоением при не превышении этого порога в конкретном элементе дальности признака сигнала мешающего отражения. И лишь после объединения корреляционного, скоростного, ЭПР сигнальных признаков, при их совпадении принимается решение о бланкировании отраженного сигнала в данном элементе дальности [4].

Рассмотрим более подробно формирование этих трех сигнальных признаков. Для однозначного измерения скорости обнаруженного объекта на каждой несущей формируется оценка межпериодной доплеровской разности фазы с последующим формированием межчастотной межпериодной разности фазы. Для классификации объектов по скоростному признаку можно воспользоваться известной оценкой аргумента межпериодного коэффициента корреляции. Алгоритм этой оценки, получаемой по пачке из  $N$  импульсов, может быть выражен в следующем виде

$$\hat{\gamma} = \arctg(\hat{s} / \hat{r}),$$

где  $\hat{r} = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_i^* Z_{i+1})$ ,  $\hat{s} = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Im}(Z_i^* Z_{i+1})$ ,  $Z_i$  – комплексные выборки наблюдений на одной несущей частоте.

Классификация объектов по скоростному признаку может быть реализована путем сравнения полученной оценки с порогом, соответствующим максимальной скорости движения мешающего объекта

$$|\hat{\gamma}| \leq \text{или} \geq \gamma_{\text{пор}}.$$

Использование такого одночастотного алгоритма классификации сопряжено с существенным недостатком – наличие неоднозначности оценки доплеровской фазы. Известно, что оценка  $\gamma$  связана с длиной волны  $\lambda$  излучения РЛС, частотой повторения импульсов  $F$  и радиальной составляющей скорости полета объекта

$$V \text{ соотношением } \gamma = \frac{4\pi V}{\lambda F}.$$

При относительно малых значениях частот повторения ( $F = 300$  Гц-1000 Гц), которые используются в большинстве современных РЛС обнаружения,  $\gamma$  в несколько раз может превышать значение  $2\pi$  даже в случае зондирования РЛС медленно движущегося объекта, в то время как функция арктангенса однозначно определена в интервале изменения фазы от 0 до  $2\pi$  (или от  $-\pi$  до  $\pi$ ). Это может привести к увеличению вероятности ошибочной классификации скоростных и медленно движущихся объектов. Для устранения указанного недостатка в прототипе используются две не-

сущих частоты РЛС. Доплеровский набег фазы на каждой из несущих частот можно представить в виде:

$$\gamma_1 = \gamma_{10} + 2\pi k, \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + 2\pi n, \quad \text{где } \gamma_{10}, \gamma_{20} - \text{ значения фазы в интервале однозначности } (-\pi, \pi), \\ k, n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Определим межчастотную разность фазы:

$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_{10} - \gamma_{20} + 2\pi k - 2\pi n.$$

Для небольшого разноса несущих частот (несколько % от несущей)  $k = n$ , получаем

$\Delta\gamma = \gamma_{10} - \gamma_{20}$ , Разность  $\Delta\gamma$  однозначно определена в пределах  $(-\pi, \pi)$ .

Таким образом, алгоритм однозначного измерения разности фаз  $\Delta\hat{\gamma}$  будет

$$\Delta\hat{\gamma} = |\hat{\gamma}_{10} - \hat{\gamma}_{20}| \leq \gamma_{\text{пор}},$$

$$\text{где } \hat{\gamma}_{10} = \arctg(s1 / r1), \quad r1 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_i^* Z_{i+1}),$$

$$s1 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Im}(Z_i^* Z_{i+1}), \quad \hat{\gamma}_{20} = \arctg(s2 / r2),$$

$$r2 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_i^* Z_{i+1}), \quad s2 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Im}(Z_i^* Z_{i+1}).$$

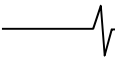
Измеренная межчастотная разность межпериодной разности фаз сравнивается с порогом и при не превышении порога принимается решение, что отраженный сигнал может принадлежать к сигналам точечных мешающих отражений. Дополнительно использование двух несущих частот для однозначного измерения скорости дает возможность сформировать еще один сигнальный признак – признак классифицируемого объекта – межчастотный коэффициент корреляции. Как показано в работе [5], для классификации отраженных сигналов от объектов по их продольному размеру можно использовать характер флюктуаций отраженных сигналов на разных несущих частотах. В частности, в основе второго признака классификации в предлагаемом способе лежит взаимосвязь значения нормированного межчастотного коэффициента корреляции с линейными размерами объекта. Чем больше размер объекта, тем меньше межчастотный коэффициент корреляции. Если разнос несущих частот выбрать из условия

$$\Delta F \leq \frac{c}{4L_{\text{MAX}}}, \quad \text{где } L_{\text{MAX}} - \text{максимальный разнос участ-}$$

ков локального отражения вдоль линии визирования РЛС на классифицируемый объект при разных несущих частотах зондирующего сигнала, то величина межчастотного коэффициента корреляции  $R(\Delta F)$  будет связана с размером объекта  $L$  выражением

$$R(\Delta F) = \cos\left(\frac{4\pi\Delta FL}{c}\right).$$

Как следует из этой формулы, с учетом [5], для того чтобы различить класс летательных аппаратов с малым продольным размером от класса медленно перемещающихся дискретных мешающих объектов, имеющих значительно большие размеры  $L$ , достаточно выбрать



разнос несущих частот  $\Delta F$  порядка 10 МГц. Современные летательные аппараты имеют максимальный размер менее 75 метров, что значительно меньше разрешающей способности РЛС обнаружения, составляющей 150-300 метров, соизмеримой с размерами дискретных пассивных помех.

В этом случае для самого большого самолета, например, Эрбас А-380, размером в 72 метра межчастотный коэффициент корреляции равен

$$R(10 \text{ МГц}) = \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot 72}{3 \cdot 10^8}\right) = 0,86.$$

Для меньшего размера отечественного лайнера ИЛ-96-300 длиной в 55 метров

$$R(10 \text{ МГц}) = \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot 55}{3 \cdot 10^8}\right) = 0,92.$$

В то время как для 200 метрового мешающего объекта

$$R(10 \text{ МГц}) = \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot 200}{3 \cdot 10^8}\right) = 0,1.$$

Значит, выбрав разнос несущих не более 10 МГц и сравнивая корреляционный признак с порогом при его не превышении, формируется второй корреляционный признак отраженного сигнала, который может принадлежать к сигналам точечных мешающих отражений.

Следует отметить, что разнос несущих в 10 МГц хорошо согласуется с требованием однозначной оценки и скоростного признака, т.е. составляет несколько процентов от частоты несущих современных РЛС обзора.

Как и для первого скоростного признака, для формирования межчастотного коэффициента корреляции применим накопление оценки по пачке из  $N$  импульсов.

$$r = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{2i}) + \text{Im}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{2i}),$$

$$s = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{2i}) \text{Im}(Z_{1i}) - \text{Im}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{1i}),$$

$$z1 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{1i}) + \text{Im}(Z_{1i}) \text{Im}(Z_{1i}),$$

$$z2 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{2i}) + \text{Im}(Z_{2i}) \text{Im}(Z_{2i}),$$

где  $Z_{1i}$  и  $Z_{2i}$  – комплексные выборки наблюдений на первой и второй несущей частоте. Тогда межчастотный коэффициент корреляции может быть вычислен по следующей формуле:

$$\hat{R}(\Delta F) = \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{\sqrt{z1z2}} \leq R_{\text{ПОР}}.$$

Порог ЭПР признака изменяется по дистанции для каждого элемента дальности в соответствии с уравнением дальности радиолокации для выбранного ЭПР мешающего отражения и конкретных параметров РЛС.

На данный порог подается усредняемый сигнал в каждом элементе дальности как по пачке сигналов в каждом частотном канале, так и их сумма. Оценка ЭПР по измерениям мощности принятого сигнала определяется по известной формуле уравнения дальности радиолокации [6]:

$$\sigma = \frac{(4\pi)^3 P_{np} R^4}{P_{nep} G^2 \lambda^2},$$

где  $\sigma$  – величина ЭПР;  $P_{np}$  – мощность принятого сигнала;  $P_{nep}$  – мощность передатчика;  $G$  – коэффициент усиления передающей (приемной) антенны;  $\lambda$  – длина волны РЛС;  $R$  – дальность до цели.

Третий сигнальный признак по ЭПР может быть получен путем суммирования мощностей сигналов  $z_1$  и  $z_2$ , используемых для нормирования оценки межчастотного коэффициента корреляции, т.е.

$$z1 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{1i}) + \text{Im}(Z_{1i}) \text{Im}(Z_{1i}),$$

$$z2 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{2i}) + \text{Im}(Z_{2i}) \text{Im}(Z_{2i}),$$

$$Z_1 + Z_2 < \sigma_{\text{пор}}.$$

## Моделирование

Проиллюстрируем работу предлагаемого способа на конкретном примере, прибегнув к моделированию с помощью системы MATLAB [7]. Осуществим классификацию двух объектов движущихся на скорости от 10 до 180 метров в секунду, используя две выборки наблюдений в виде двух пачек импульсов с постоянным периодом повторения 0,001 сек., отраженных от объекта на разных несущих частотах 500 МГц и 510 МГц. Объекты имеют ширину спектра флюктуаций в несколько герц и большой продольный размер, характеризуемый межчастотным коэффициентом корреляции 0,1 (как цель, так и мешающий объект). Скоростной порог был задан в 100 м/с, и корреляционный порог составлял 0,5. Обработываемое число импульсов в пачке, на каждой несущей равнялось 8. Предположим что ЭПР цели  $\sigma_1 = 5 \text{ м}^2$ , а мешающего отражения ЭПР  $\sigma_2 = 0,25 \text{ м}^2$ . В общем виде из уравнения дальности радиолокации следует:

$$\sigma_1 = \frac{(4\pi)^3 P_{np1} R_1^4}{P_{nep} G^2 \lambda^2} = K P_{np1} R_1^4,$$

$$\sigma_2 = \frac{(4\pi)^3 P_{np2} R_2^4}{P_{nep} G^2 \lambda^2} = K P_{np2} R_2^4,$$

где  $K = \frac{(4\pi)^3}{P_{nep} G^2 \lambda^2}$  – постоянный коэффициент, характеризующий параметры РЛС,  $P_{np1}$ ,  $P_{np2}$  – мощность принимаемого сигнала на входе приемной антенны на дальности  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

Используя приведенные выше формулы, найдем отношение оценок ЭПР, сделанных на разных дальностях  $R_1$  и  $R_2$ :

Используя приведенные выше формулы, найдем отношение оценок ЭПР, сделанных на разных дальностях  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{P_{np2} \cdot R_2^4}{P_{np1} \cdot R_1^4}.$$

Считая, что полезная цель и мешающие отражения находятся на одной дальности, можно видеть, что мощность принимаемых сигналов для выбранных ЭПР отличается в 20 раз. Возьмем дисперсию моделируемых квадратурных составляющих с гауссовым законом распределения для мешающих отражений равной 1,



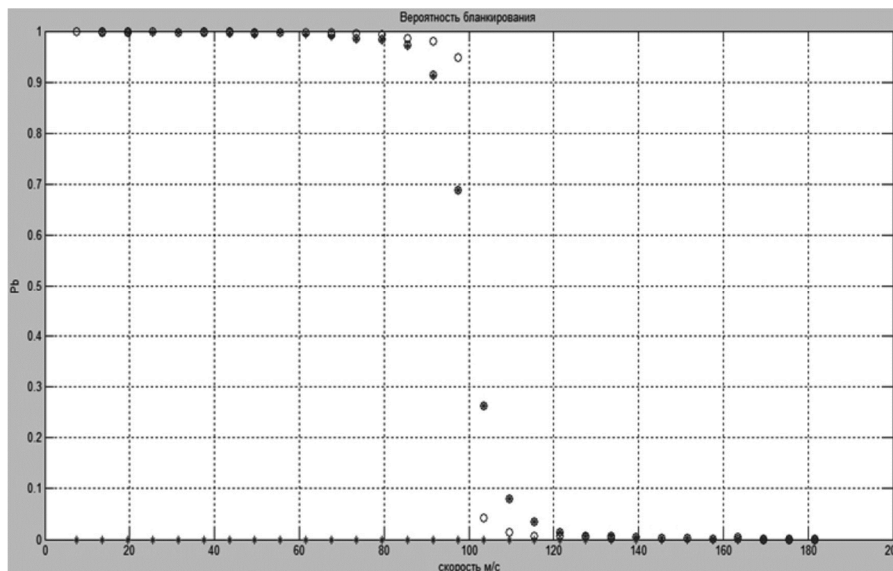


Рис. 1 Вероятность бланкирования узкополосных объектов для скоростного порога 100 м/с и корреляционного порога 0,5 в зависимости от скорости объекта с одинаковым продольным размером в 200 метров в зависимости от ЭПР. Кружочки на графиках соответствуют способу с двумя сигнальными признаками для ЭПР 0,25 м<sup>2</sup>, ромбики способу с двумя сигнальными признаками для ЭПР 5 м<sup>2</sup>, звездочки – способу с тремя сигнальными признаками для ЭПР 0,25 м<sup>2</sup>, квадратики способу с тремя сигнальными признаками для ЭПР 5 м<sup>2</sup>

а для цели в двадцать раз больше. Порог ЭПР выберем равным 2.

Результаты моделирования вероятностей бланкирования данных объектов в MATLAB с использованием трех сигнальных признаков (отмечены звездочками) и способа с двумя сигнальными признаками (отмечены кружочками), приведены на рис. 1, на котором приведена вероятность бланкирования с малым ЭПР мешающего отражения и с большим ЭПР полезной цели, имеющих большие продольные размеры (порог в 0,5 оценкой межчастотного коэффициента корреляции ими не превышен) и малые скорости. Вероятности бланкирования у мешающего отражения для сравниваемых способов совпадают, так как порог ЭПР мощностью их сигналов не превышен, а вот полезная цель с большой ЭПР не бланкируется. У способа с двумя сигнальными признаками из-за отсутствия признака ЭПР бланкируются как мешающие отражения, так и полезная цель. Иными словами, применение трех сигнальных признаков имеет явные преимущества.

### Заключение

В статье рассмотрен новый способ классификации и бланкирования дискретных мешающих отражений, основанный на использовании трех сигнальных признаков: доплеровская скорость, межчастотный коэффициент корреляции и эффективная поверхность рассеяния (ЭПР). По совокупности этих трех сигнальных признаков принимается решение о принадлежности принятых эхо сигналов в каждом элементе дальности к дискретным мешающим отражениям. Приведены результаты моделирования эффективности использования трех сигнальных признаков. Таким образом, проведенное исследование, подтверждает положительный эффект от приме-

ния трех сигнальных признаков для классификации и бланкирования дискретных помех. Хотелось бы добавить, что использование двух частотного режима РЛС для применения предложенного способа предполагает, как одновременное излучение сигналов на двух несущих частотах, так и последовательное излучение двух пачек импульсов с перестройкой частоты от пачки к пачке.

### Литература

1. Бартенев В.Г., Дракин Е.В. Цифровая система селекции движущихся целей. Авторское свидетельство №160321 по заявке №2285451 с приоритетом от 13 августа 1980 г. Опубликовано в бюл. №34 ФИПС 2018 г.
2. Бартенев В.Г., Галкин Р.Е. Синтез цифрового двухчастотного классификатора дискретных помех по скоростному признаку. Труды 16 Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение DSPA-2014», Москва, Т. 1, стр. 343-347, 2014.
3. Бартенев В.Г. Способ классификации и бланкирования дискретных помех. Патент № 2599870 по заявке №2015128907 зарегистрирован в Государственном реестре РФ 23.09.2016.
4. Бартенев В.Г. Способ классификации и бланкирования дискретных помех. Патент № 2710894 по заявке №2018134712 зарегистрирован в Государственном реестре РФ 14.01.2020.
5. Абраменков В.В., Климов С.А., Бондарев П.А., Юдин В.А., Гульшин В.А. Разрешение и распознавание радиолокационных объектов. Ульяновск: УлГТУ, 2012.
6. Справочник по радиолокации. Под ред. М. Сколника, т. 1, М.: «Советское радио», 1976, с.357, формула (1).
7. Потемкин В.Г. «Справочник по MATLAB» Анализ и обработка данных. <http://matlab.exponenta.ru/ml/book2/chapter8>.

## МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВИДЕОКАМЕР НА ОСНОВЕ БИННИНГА С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

*Дрынкин В.Н., начальник сектора ФГУП «ГосНИИАС», e-mail: drynkinv@gosniias.ru*

*Царева Т.И. к.б.н., старший научный сотрудник ФГУП «ГосНИИАС», e-mail: tsareva@gosniias.ru*

*Павлов Ю.В., начальник лаборатории ФГУП «ГосНИИАС», кандидат технических наук, e-mail: pavlov@gosniias.ru*

*Мысин Д.В., начальник сектора ФГУП «ГосНИИАС», e-mail: mysin@gosniias.ru*

## METHOD FOR INCREASING THE SENSITIVITY OF VIDEO CAMERAS BASED ON BINNING WITH RESTORATION OF SPATIAL RESOLUTION

*Drynkin V.N., Tsareva T.I., Pavlov U.V., Mysyn D.V.*

*Reducing the image resolution is a limiting use of binning in video cameras and video surveillance systems. The article describes an experimentally tested method for increasing the sensitivity of video cameras, based on a method for increasing the sensitivity and frame rate using the procedure of binning of adjacent pixels of photodetector matrix for a sequence of video frames with subsequent restoration of spatial resolution.*

**Key words:** digital image processing, increasing the sensitivity of video cameras, procedure of binning of adjacent pixels.

**Ключевые слова:** цифровая обработка изображений, повышение чувствительности видеокамер, восстановление пространственного разрешения, биннинг, трехмерная пространственно-временная фильтрация.

### Введение

Одним из способов повышения чувствительности видеокамер за счет увеличения отношения сигнал/шум является аппаратный биннинг (или бинирование), представляющий собой процесс суммирования зарядов смежных ячеек матрицы приемника излучения в один суперпиксель в процессе считывания информации из матрицы перед оцифровкой [1, 2]. При этом происходит уменьшение амплитуды суммированного шумового сигнала, носящего случайный характер, и увеличение полезного сигнала яркости суммированного заряда, пропорционально которому увеличивается чувствительность матрицы. Это позволяет получать более контрастные изображения при низкой освещенности на объекте. На рис. 1 показаны примеры повышения контраста сцены, изображенной на рис. 1 а, при биннинге 2x2 (рис. 1 б) и 4x4 (рис. 1 в).

Для удобства сравнения контрастов изображений воспользуемся относительным контрастом (1), который определим отношением разницы яркостей между самой светлой  $B_{max}$  и самой темной  $B_{min}$  областями изображения к максимальному значению диапазона яркостей  $D$ . Для полутонового восьмибитного изображения, характерного для большинства современных мониторов, значение  $D = 255$ .

$$K = \frac{B_{max} - B_{min}}{255} 100 \% \quad (1)$$

Для кадров видеоизображений сцены, фрагмент которой представлен на рис. 1 а, относительный контраст

*Снижение разрешения является ограничивающим фактором применения биннинга в видеокамерах и системах видеонаблюдения. В статье описывается экспериментально апробированный метод повышения чувствительности видеокамер, основанный на способе повышения чувствительности и частоты кадров с использованием процедуры биннинга смежных пикселей матрицы фотоприемного устройства для последовательности видеокадров с последующим восстановлением пространственного разрешения.*

увеличился в 2,5 раза при биннинге 2x2 (рис. 1 б), и в 7 раз при биннинге 4x4 (рис. 1 в).

При биннинге количество эффективных пикселей матрицы (которые участвуют в формировании изображения) уменьшается пропорционально кратности биннинга, что наряду с повышением чувствительности обеспечивает возможность увеличения частоты кадров [3]. Однако следствием уменьшения пиксельного размера кадров видеоизображения является падение пространственного разрешения в изображении сцены [4]. Для количественной оценки пространственного разрешения при использовании биннинга были проведены эксперименты с измерительными штриховыми мирами Фуко [5], один из примеров которых изображен на рис. 2.

Каждый элемент мира состоит из чередующихся темных и светлых прямоугольных полос одинаковой ширины, ориентированных в четырех разных направлениях. Ширина полос от группы к группе убывает в 1,06 раз.

Разрешение определялось методом визуальной оценки по группе штрихов с самой узкой шириной полос, разрешаемых по меньшей мере 80 % участвующих в эксперименте наблюдателей. Группа штрихов считалась разрешенной, если по всей длине чередующихся темных и светлых полос при сохранении их одинаковой ширины визуально ощущалась разница в уровнях серого тона.

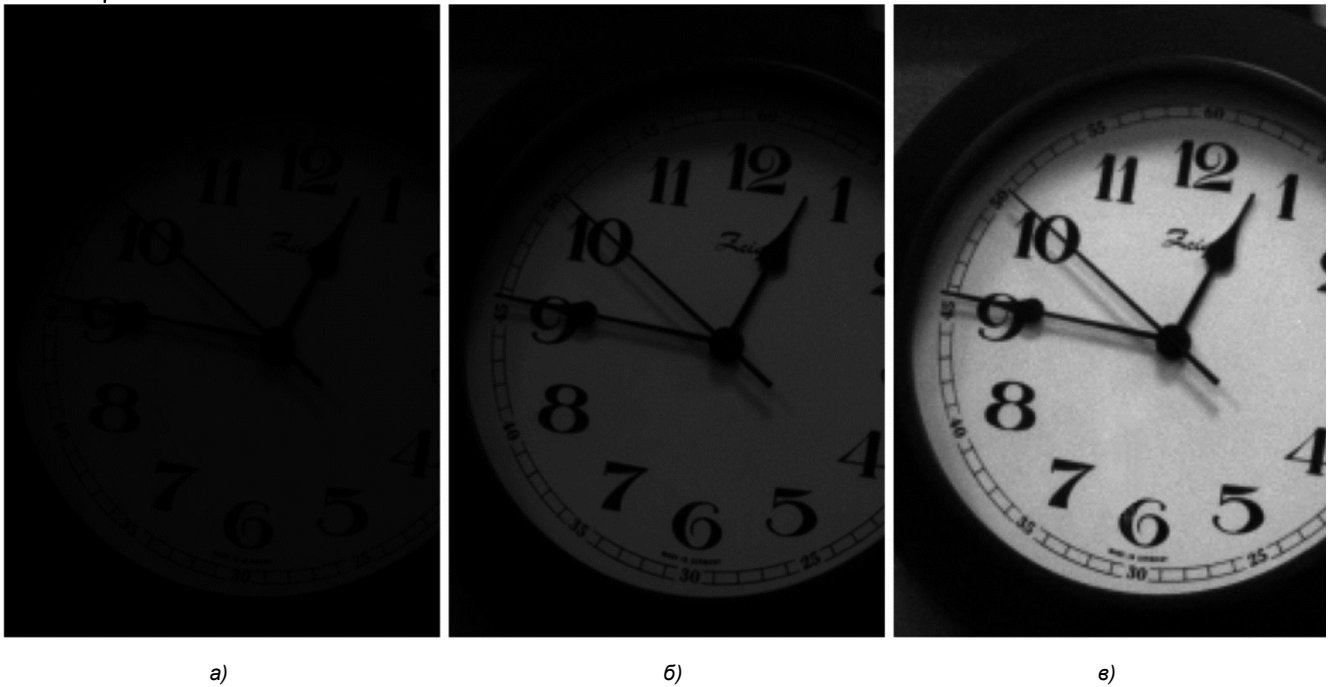


Рис. 1. Примеры повышения контраста сцены (а) при биннинге 2x2 (б) и 4x4 (в)

На рис. 3 а показан увеличенный фрагмент изображения штриховой миры без биннинга, на котором критерию разрешения соответствует 24 группа, а на рис. 3 б – увеличенный фрагмент изображения той же миры при биннинге 2x2, на котором разрешается 12 группа штрихов. Это соответствует падению разрешения в 2 раза. Дальнейшие эксперименты показали, что при переходе к биннингу 4x4 разрешение падает еще в 2 раза дополнительно.

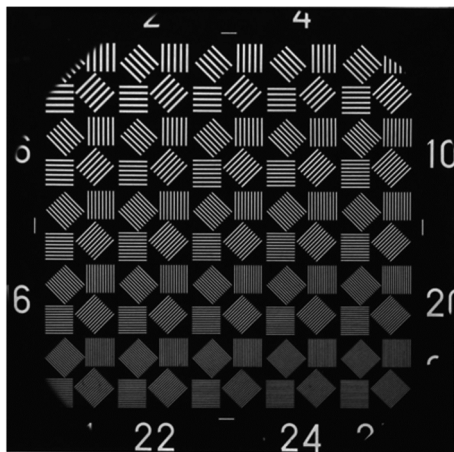


Рис. 2. Измерительная штриховая мира Фуко

Данные эксперименты проводились в студии, поэтому падение разрешения совпало с кратностью биннинга. В реальных же условиях вследствие воздействия дополнительных факторов на процесс формирования изображения (влияние атмосферы, погодных условий, изменения освещенности и др.) пространственное разрешение может падать сильнее.

Снижение разрешения является ограничивающим применением биннинга фактором в целом ряде случаев, например, в охранных телевизионных видеокамерах, в инфракрасных системах видеонаблюдений и т.п.

Ниже предлагается метод повышения чувствительности видеокамер, основанный на способе повышения

чувствительности и частоты кадров видеокамер (далее – Способ) с использованием процедуры биннинга смежных пикселей матрицы приемника излучения для последовательности видеокадров с восстановлением пространственного разрешения [6].

#### Описание способа повышения чувствительности и частоты кадров видеокамер

Согласно этому Способу биннинг в видеокадрах производят со сдвигом, по крайней мере, на один пиксель матрицы приемника излучения по диагонали так, что в соседних видеокадрах образуется пространственно-временная решетка с шахматным расположением значений яркостей полученных в результате биннинга пикселей, затем видеокадры, полученные посредством биннинга, перед оцифровкой считывают с повышенной или исходной кадровой частотой, после чего пиксельные размеры данных видеокадров увеличивают до размера матрицы приемника излучения путем введения в их матричную структуру нулевых столбцов и строк и осуществляют их интерполяцию с помощью трехмерного интерполяционного пространственно-временного фильтра нижних частот (ФНЧ) с областью пропускания трехмерной пространственно-частотной характеристики (ПЧХ) в виде октаэдра. На выходе ФНЧ формируется последовательность видеокадров повышенной чувствительности исходного пиксельного размера с восстановленным за счет трехмерной интерполяции пространственным разрешением.

Пример выполнения процедуры биннинга 2x2 пикселей со сдвигом на один пиксель матрицы приемника излучения по диагонали в соседних видеокадрах приведен на рис. 4 а. Один из вариантов диагонального сдвига в соседних видеокадрах для биннинга 4x4 приведен на рис. 4 б. На этом рисунке белыми квадратиками на сером фоне показаны полученные в результате биннинга пиксели. Серым цветом показаны области соседних пикселей, подвергаемых процедуре биннинга.

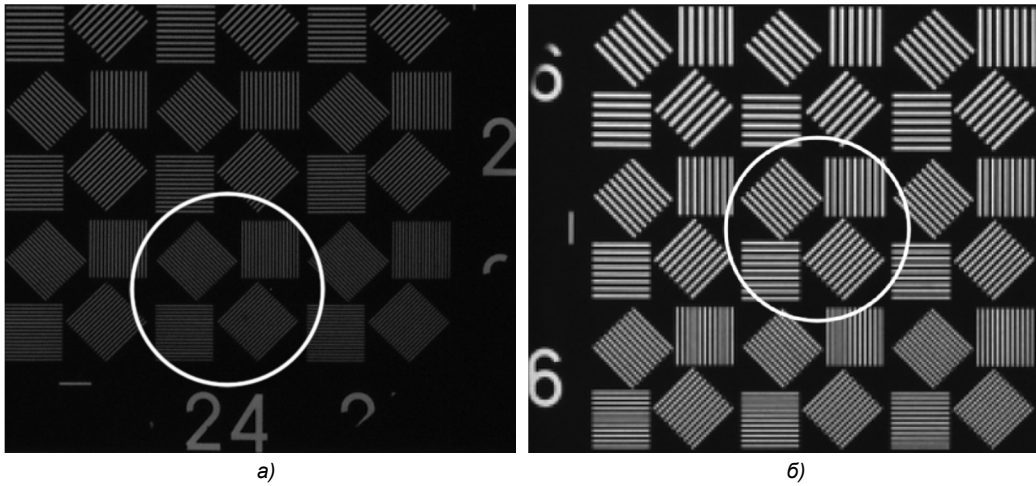


Рис. 3. Иллюстрация падения исходного разрешения (а) при биннинге 2x2 (б)

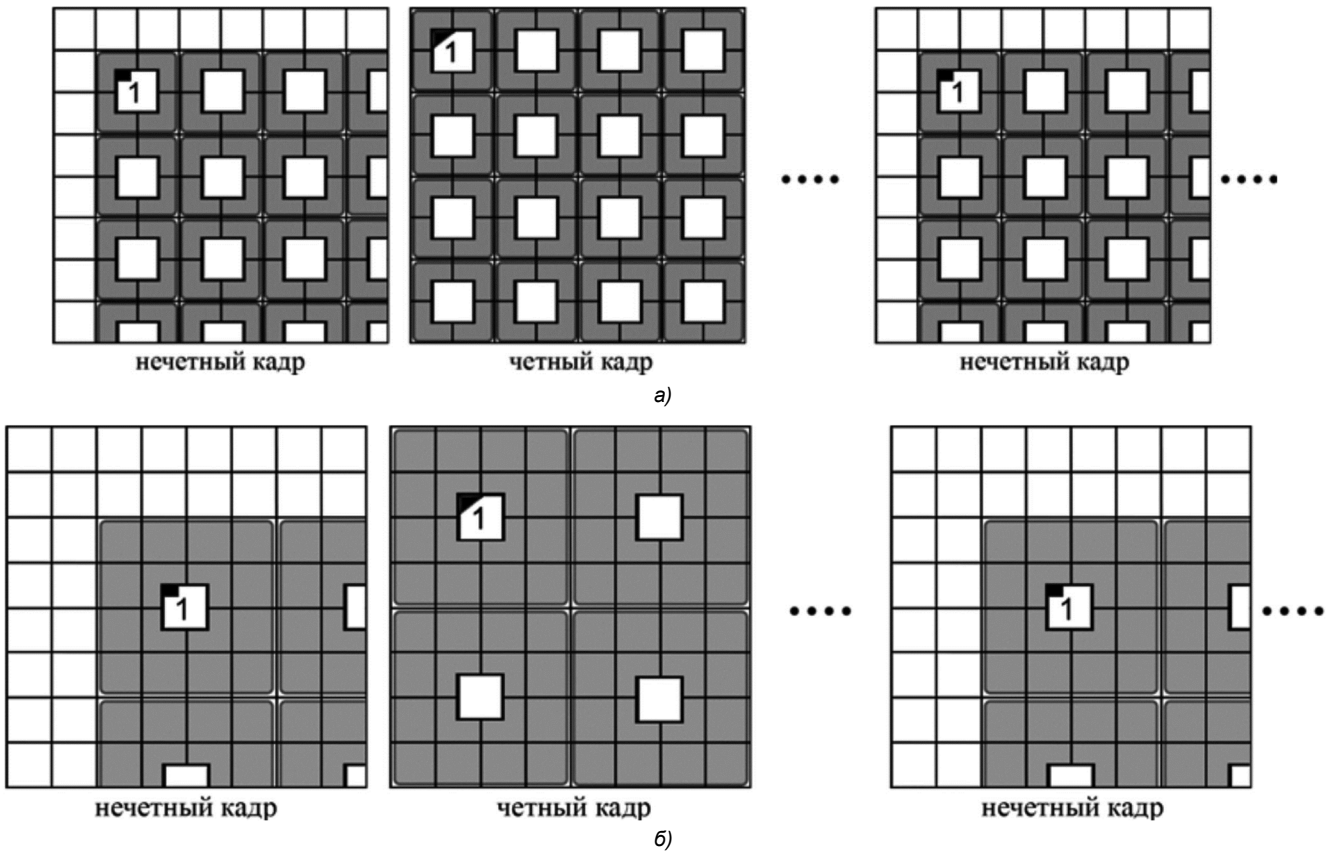


Рис. 4. Примеры выполнения процедуры биннинга матрицы приемника излучения с диагональным сдвигом в соседних видеокадрах для биннинга 2x2 (а) и 4x4 (б)

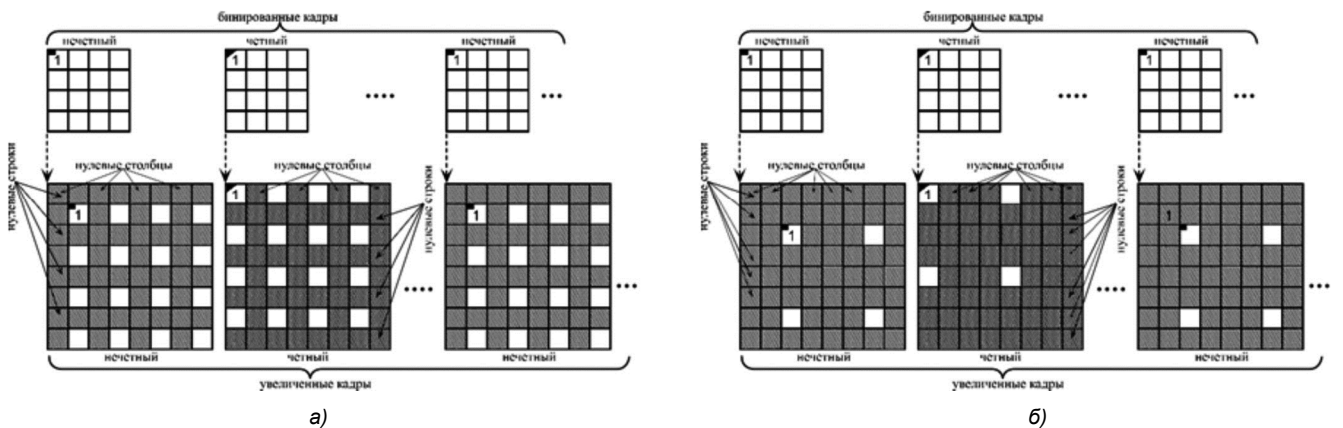


Рис. 5. Примеры увеличения пиксельного размера видеокадров для биннинга 2x2 (а) и 4x4 (б)

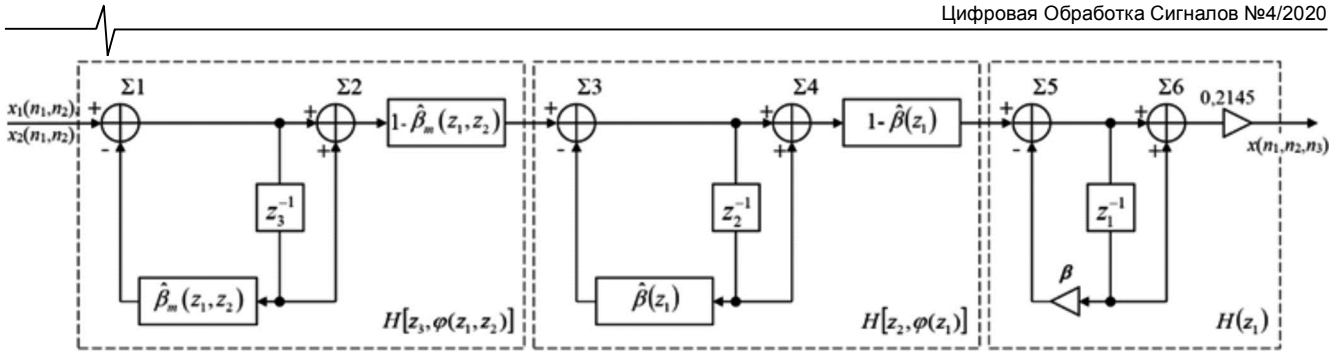


Рис. 6. Обобщенная структурная схема трехмерного интерполяционного ФНЧ

В каждом случае согласно Способа может быть четыре варианта диагонального сдвига в зависимости от направления смещения. Перед восстановлением разрешения пиксельный размер видеокадров, полученных в результате биннинга, увеличивают, дополняя их нулевыми столбцами и строками согласно варианту сдвига, применяемого в каждом конкретном случае. На рис. 5 приведен пример увеличения пиксельного размера видеокадров для биннинга 2x2 (рис. 5 а) и 4x4 (рис. 5 б) согласно вариантам, изображенных на рис. 4.

Таким образом значения яркостей пикселей увеличиваемых видеокадров, полученных в результате биннинга, перемежают нулевыми столбцами и строками так, что в любых двух соседних кадрах формируется пространственно-временная решетка с шахматным расположением значений яркостей полученных в результате биннинга пикселей.

Кадры видеоизображений увеличенного пиксельного размера (см. рис. 5) представляют собой разреженные данные, не удовлетворяющие главному критерию теоремы отсчетов для восстановления исходного сигнала. Однако их можно рассматривать с точки зрения парадигмы compressive sensing [7], которая означает сжатые измерения, сжатые ощущения или опознание со сжатием [8], интенсивно развивающейся в последние годы для разработки видеосистем. В нашем случае видеокадры увеличенного пиксельного размера представляют собой разреженные выборки на неортогональном растре дискретизации, возможность восстановления которых с помощью трехмерного интерполяционного пространственно-временного ФНЧ с областью пропускания в виде октаэдра была исследована в работе [9].

Для осуществления трехмерного интерполяционного пространственно-временного ФНЧ с областью пропускания в виде октаэдра использовалась комбинированная структура, представляющая собой каскадное включение трехмерного, двумерного и одномерного рекурсивно-нерекурсивных звеньев [10].

Передаточная функция восстанавливающего трехмерного интерполяционного пространственно-временного ФНЧ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 H(z_1, z_2, z_3) &= H[z_3, \phi(z_1, z_2)]H[z_2, \phi(z_1)]H(z_1) = \\
 &= 0,2145 \frac{(1+z_3^{-1})}{1-\hat{\beta}_m(z_1, z_2)z_3^{-1}} [1-\hat{\beta}_m(z_1, z_2)] \times \\
 &\times \frac{(1+z_2^{-1})}{1-\hat{\beta}(z_1)z_2^{-1}} [1-\hat{\beta}(z_1)] \frac{1+z_1^{-1}}{1+0,716z_1^{-1}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}(z_1) &= 0,114 - 0,389(z_1 + z_1^{-1}) + \\
 &+ 0,026(z_1^2 + z_1^{-2}) + 0,001(z_1^3 + z_1^{-3}) - 0,04(z_1^4 + z_1^{-4})
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

представляет собой передаточную функцию одномерной нерекурсивной цепи обратной связи двумерного звена;  $m$  – размер апертуры (в элементах) импульсной характеристики двумерной цепи обратной связи трехмерного звена,  $3 \leq m \leq k$  и принимает нечетные значения из множества  $\mathbb{N}$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$  – кратность биннинга. Протяженность апертуры двумерной цепи обратной связи  $\hat{\beta}_m(z_1, z_2)$  трехмерного звена зависит от кратности биннинга  $k$  и должна захватывать соседние значащие отсчеты (которые на рис. 5 показаны белыми квадратиками) видеокадров увеличенного пиксельного размера, т.е. для биннинга 2x2 достаточно иметь  $m \geq 3$ , а для биннинга 4x4 – не менее 5. Для случая  $m = 3$  передаточная функция двумерной нерекурсивной цепи обратной связи будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_3(z_1, z_2) &= 0,531 - 0,156(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}) - \\
 &- 0,109(z_1 + z_1^{-1})(z_2 + z_2^{-1});
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$z_3^{-1}$  представляет собой память на кадр видеоизображения,  $z_2^{-1}$  и  $z_2$  – память на строку видеоизображения,  $z_1^{-1}$  и  $z_1$  – память на элемент строки видеоизображения.

Обобщенная структурная схема фильтра приведена на рис. 6.

На рис. 7 показана результирующая пространственно-частотная характеристика восстанавливающего трехмерного интерполяционного пространственно-временного ФНЧ в виде поверхности уровня  $K(v_1, v_2, v_3) = 0,8$  для положительного октанта трехмерной области  $\{v_1, v_2, v_3\}$  нормированных вертикальных  $v_1$ , горизонтальных  $v_2$  и временных  $v_3$  частот.

Согласованная со спектрами реальных видеоизображений и с ПЧХ зрения человека область пропускания восстанавливающего трехмерного интерполяционного пространственно-временного ФНЧ в виде октаэдра позволяет при восстановлении видеоизображений по дискретным отсчетам наилучшим образом выделять из дискретного спектра основной спектр изображения исходного разрешения и подавлять побочные составляющие и высокочастотные шумы, что позволяет восстанавливать пространственное разрешение изображений с незначительными для наблюдателя потерями [11].

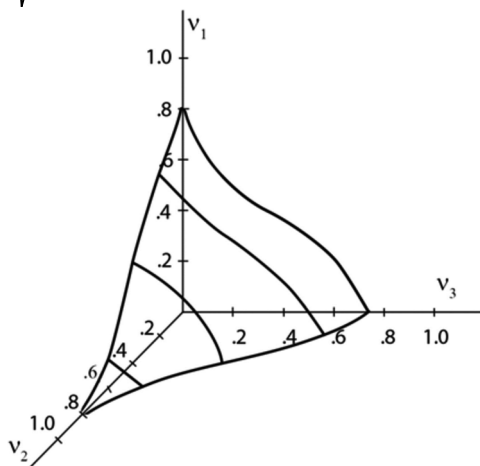


Рис. 7. ПЧХ трехмерного интерполяционного ФНЧ

### Тестирование метода

Методами имитационно-математического полунатурного моделирования с использованием реальной видеокамеры с биннингом была исследована возможность восстановления пространственного разрешения изображений сцены при биннинге 2x2 и 4x4.

В экспериментах применялась камера BOBCAT ICL-B2520 фирмы Imregh [12], имеющая следующие основные характеристики:

- максимальное разрешение 2456 x 2058 пикселей;
- максимальная частота кадров 50 Гц;
- максимальное отношение сигнал/шум 53 дБ;
- кратность биннинга (горизонтального и вертикального)  $\times 1$ ,  $\times 2$ ,  $\times 3$ ,  $\times 4$ ,  $\times 8$ ;
- возможность ручной регулировки настроек камеры.

Поскольку реализация электронного сдвига биннинга согласно Способа требует разработки новой видеокамеры, то в эксперименте была реализована имитация покадрового сдвига бинированных кадров с помощью естественного дрожания камеры в режиме биннинга при отключенных автоматических настройках с покадровой

фиксацией бинированных видеокadres неподвижной сцены. Далее с помощью программного коррелятора из полученной последовательности бинированных кадров выявлялись видеокadres с необходимым согласно Способа субпиксельным сдвигом относительно друг друга, по которым затем и осуществлялось восстановление пространственного разрешения с помощью трехмерного интерполяционного ФНЧ с областью пропускания в виде октаэдра.

Рис. 8 демонстрирует один из примеров восстановления пространственного разрешения изображения сцены при использовании биннинга 2x2. На рис. 8 а показан увеличенный фрагмент видеокadra сцены без биннинга (биннинг 1x1), на рис. 8 б – тот же фрагмент с биннингом 2x2, а на рис. 8 в – восстановленный фрагмент.

На рис. 9 приведен еще один из примеров восстановления пространственного разрешения (рис. 9 а) изображения сцены, увеличенный фрагмент которой показан на рис. 9 а, после применения процедуры биннинга 4x4 (рис. 9 б).

Из рис. 8 и 9 следует, что биннинг 4x4 позволяет «вытягивать» информацию при более низком уровне освещенности сцены, однако падение пространственного разрешения практически разрушает мелкие детали сцены (см. рис. 9 б). Процедура же восстановления пространственного разрешения (рис. 9 в) существенно улучшает полученную картину, хотя уровень восстановления ниже, чем при биннинге 2x2 (рис. 8 в), что вполне естественно: ведь при биннинге 4x4 в изображении сцены (рис. 9 б) остается всего 1/16 часть (6,25 %) информации исходного кадра (рис. 9 а), тогда как при биннинге 2x2 – 25 %.

Для количественной оценки уровня восстановления пространственного разрешения была проведена серия экспериментов с мирами Фуко (рис. 2). Эксперименты показали, что при биннинге 2x2 исходное разрешение восстанавливается в среднем более, чем на 80 %, а при биннинге 4x4 – не менее, чем на 40 %.



Рис. 8. Пример восстановления пространственного разрешения изображения сцены при биннинге 2x2

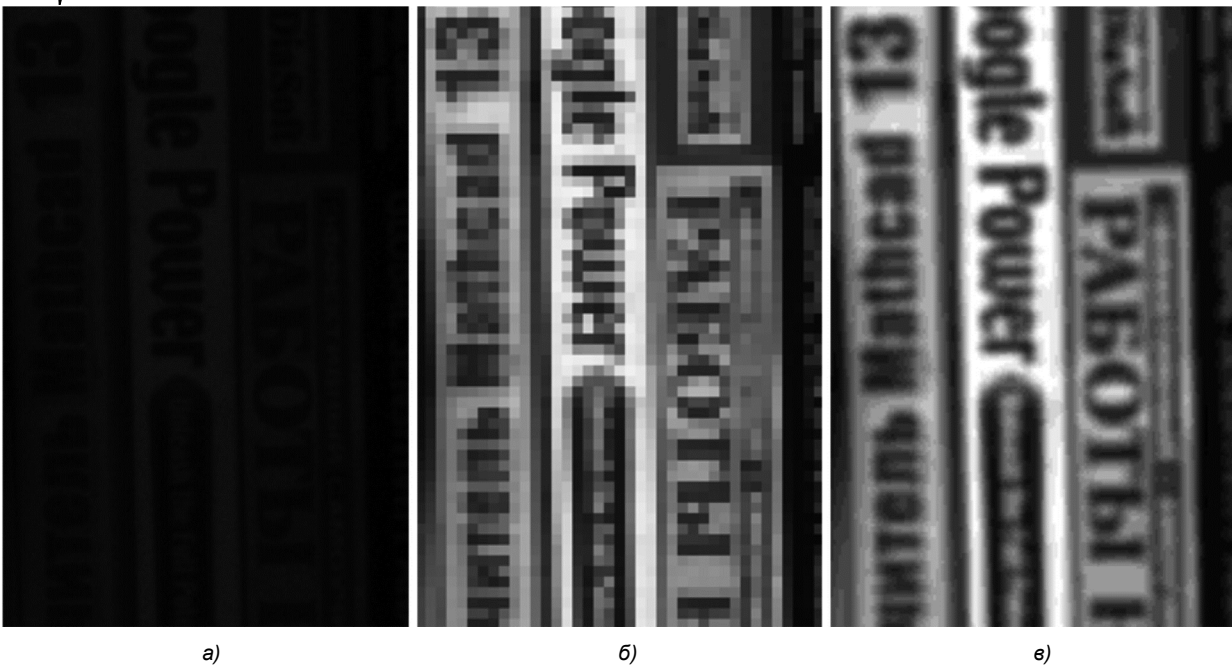


Рис. 9. Пример восстановления пространственного разрешения изображения сцены при биннинге 4x4

## Заключение

Разработан метод, позволяющий повышать чувствительность видеокамер с помощью биннинга. Метод содержит процедуру увеличения пиксельного размера подвергнутых биннингу видеокадров, сдвинутых относительно друг друга, по крайней мере, на один пиксель по диагонали, до исходного значения матрицы приемника излучения за счет дополнения их матричной структуры нулевыми столбцами и строками. Полученная последовательность увеличенных видеокадров подвергается затем интерполяции с помощью трехмерного пространственно-временного ФНЧ с областью пропускания в виде октаэдра, что позволяет восстанавливать пространственное разрешение изображений сцены с незначительными для наблюдателя потерями.

Устройство, реализующее представленный метод, может быть выполнено как элемент видеосистемы, интегрированный в видеокамеру [13], что позволит обрабатывать подвергнутые биннингу видеокадры в реальном масштабе времени, и может найти применение в различных областях обработки изображений, в том числе системах видеонаблюдения, техническом зрении, в медицине, неразрушающем контроле и т.п.

## Благодарности

Авторы выражают благодарность фирме «Лазерные компоненты» за любезно предоставленную видеокамеру BOBCAT ICL-B2520 фирмы Imregh с биннингом для проведения эксперимента, а также выражают признательность сотруднику ФГУП ГосНИИАС Фролкину Д.В. за техническую помощь при проведении экспериментов.

## Литература

1. Способы улучшения чувствительности камер видеонаблюдения // Настройка видеонаблюдения, август 2019. URL: <http://zapishemvse.ru/sposoby-uluchsheniya-chuvstvitelности-kamer->

[videonablyudeniya/](http://videonablyudeniya/) (дата обращения 19.06.2020).

2. Цыцулин А.К., Зубакин И.А., Левко Г.В., Морозов А.В. Изменение качества видеоинформации, формируемой телекамерой // Вопросы радиоэлектроники. Техника телевидения. 2016, вып. 4. С. 26-32.

3. Binning // Quantum Imaging, 2018. URL: <https://quantumimaging.com/binning/> (дата обращения 03.12.2020).

4. Биннинг // Спецтелетехника, 2004. URL: <http://www.sptt.ru/sptt/docs.php?l=1&part=3> (дата обращения 19.06.2020).

5. Дрынкин В.Н., Царева Т.И. Метод повышения разрешающей способности изображений // Цифровая обработка сигналов. 2014. №3. С. 9-14.

6. Дрынкин В.Н., Царева Т.И., Павлов Ю.В. Способ повышения чувствительности и частоты кадров видеокамер. Заявка на изобретение № 2020139588 (W/20073570) от 02.12.2020. H04N 5/347. / Заявитель – ФГУП ГосНИИАС.

7. Donoho D.L. Compressed sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. Vol. 52. Pp. 1289-1306.

8. Граничин О.Н., Павленко Д.В. Рандомизация получения данных и  $\ell_1$ -оптимизация (опознание со сжатием) (Обзор) // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 3-28.

9. Drynkin V.N., Nabokov S.A., Tsareva T.I. Non-Orthogonal Sampling as the Basis for Video Data Compression and Reconstruction // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2019. Vol. 58, No. 3. Pp. 115-122. DOI: 10.1134/S1064230719030080.

10. Drynkin V.N., Nabokov S.A., Tsareva T.I. Video images compression and restoration methods based on optimal sampling // Computer Optics. 2019. Vol. 43, Issue 1. Pp. 115-122. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-115-122.

11. Дрынкин В.Н. Разработка и применение многомерных цифровых фильтров. М.: ФГУП «ГосНИИАС», 2016/

12. Описание камеры BOBCAT ICL-B2520. URL: <https://cameralab.ru/sites/default/files/icl-b2520.pdf> (дата обращения 04.11.2020).

13. Бондаренко А.В., Ядчук К.А., Бондаренко М.А., Дрынкин В.Н. Аппаратно-программная реализация алгоритма повышения разрешающей способности цифровых видеокамер // Сб. тезисов докладов НТК «Техническое зрение в системах управления-2016 (ТЗСУ-2016)». Москва. 14-16 марта, 2017. С. 38-39.



**Всероссийская конференция**  
**«СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**  
**ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ» (СТОС-2021)**

**27 октября – 29 октября 2021 г. Москва**

*All-Russian conference*  
*«MODERN TECHNOLOGIES OF SIGNAL PROCESSING» (STOS-2021)*

**Уважаемые коллеги!**

**ПРИГЛАШАЕМ ВАС ПРИНЯТЬ УЧАСТИЕ В РАБОТЕ КОНФЕРЕНЦИИ**

**ОРГАНИЗАТОРЫ:**

- Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
- Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова
- Министерство образования и науки Российской Федерации
- Московский технический университет связи и информатики

**ПРИ УЧАСТИИ:**

- Федеральное агентство по промышленности РФ
- ОАО «Концерн радиостроения «Вега»
- ОАО «Концерн «Созвездие»
- ФГУП «НИИР»
- Владимирский государственный университет
- Московский авиационный институт
- Балтийский федеральный университет им. И. Канта
- Военная академия РВСН им. Петра Великого
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
- Московский энергетический институт
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. А.М. Бонч-Бруевича
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
- Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
- Тульский государственный университет
- Ульяновский государственный технический университет
- Ярославский государственный университет

**ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

**Председатель:** академик РАН **Гуляев Юрий Васильевич**

**Заместитель Председателя:** академик РАН **Фёдоров И.Б.**

**Члены комитета:**

академик РАН **Бугаев А.С.**, член-корр. РАН **Зубарев Ю.Б.**,

академик РАН **Каляев И.А.**

**ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:**

**Председатель:** член-корреспондент РАН **Черепенин Владимир Алексеевич**

**Заместитель Председателя:** д.т.н., проф. **Витязев Владимир Викторович**

**Сопредседатели:** д.т.н., проф. **Аджемов А.С.**, д.т.н., проф. **Цимбал В.А.**

**Члены Оргкомитета:**

доц. **Алёшин В.С.**, проф. **Акиншин Н.С.**, проф. **Брюханов Ю.А.**, проф. **Васильев К.К.**, проф. **Калошин В.А.**, проф. **Мамон Ю.И.**, проф. **Митрофанов Д.Г.**, проф. **Пахотин В.А.**, проф. **Постников И.И.**, доц. **Самсонов Г.А.**, проф. **Сперанский В.С.**, проф. **Степанов С.Н.**, проф. **Чиров Д.С.**, проф. **Ямпурин Н.П.**

**Организация работы** в форме пленарных и проблемно-тематических заседаний. Пленарные доклады будут представлены по основным направлениям работы Конференции. Доклады, включенные в Программу конференции, будут опубликованы в **Сборниках докладов Конференции** к началу её работы. По опыту прошедших конференций, мероприятие оказалось очень эффективным местом общения для всех участников мероприятия: представителей науки и производства, заказчиков и разработчиков, потребителей и поставщиков, преподавателей и студентов, работодателей и соискателей, научно-технических издательств и читателей.