

УДК 621.391

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ВИТЕРБИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СИГНАЛАМИ

Вершинин В. А., к.т.н., г. Рыбинск, e-mail: vershinin-vladimir@yandex.ru

THE USE OF THE VITERBI ALGORITHM IN THE TRANSMISSION OVERLAPPING THE ELEMENTARY SIGNALS

Vershinin V. A.

Frequency efficiency, noise immunity, and implementation complexity are the most important parameters of binary message transmission. One of the ways to increase frequency efficiency is the deliberate or controlled introduction of intersymbol interference into the transmitted signal with an acceptable reduction in noise immunity. The purpose of this paper is to consider one of the ways to implement this direction using the Viterbi algorithm. Options for generating the transmitted signal and receiving are considered. The noise immunity of the transmission under the influence of interference in the form of white noise is estimated. The considered method of transmitting binary messages provides a fairly good frequency efficiency without using a spectrum shaper with an acceptable reduction in noise immunity.

Key words: overlapping signals, intersymbol interference, frequency efficiency, complex envelope, Viterbi algorithm, noise immunity.

Ключевые слова: перекрывающиеся сигналы, межсимвольная интерференция, частотная эффективность, комплексная огибающая, алгоритм Витерби, помехоустойчивость.

Введение

Сознательное или контролируемое введение в передаваемый сигнал межсимвольной интерференции является одним из направлений повышения спектральной эффективности передачи двоичных сообщений [1]. Межсимвольная интерференция приводит к ухудшению помехоустойчивости передачи и усложнению алгоритма приема.

Определим на интервале $-T/2 \leq t < T/2$ ортогональные сигналы:

$$\begin{aligned} c(t) &= \cos(2\pi Kt/T) + \cos[2\pi(K+1)t/T]; \\ s(t) &= \sin(2\pi Kt/T) + \sin[2\pi(K+1)t/T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Вне указанного интервала сигналы равны нулю. Здесь K – целое положительное число. На рис. 1 показан в нормированном виде сигнал $c(t)$, а на рис. 2 – сигнал $s(t)$ при $K = 2$.

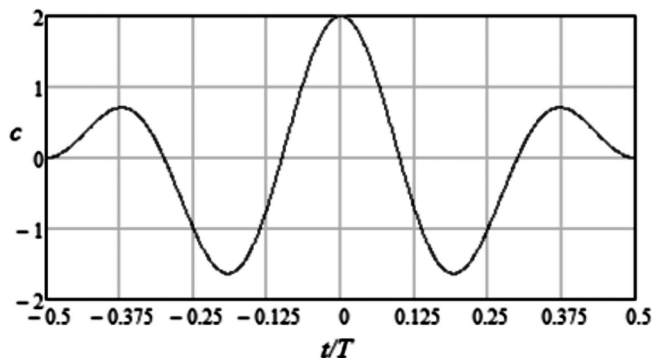


Рис. 1. Нормированный сигнал $c(t)$

Частотная эффективность, помехоустойчивость и сложность реализации являются важнейшими параметрами передачи двоичных сообщений. Одним из направлений повышения спектральной эффективности является сознательное или контролируемое введение в передаваемый сигнал межсимвольной интерференции при приемом снижении помехоустойчивости. Целью работы является рассмотрение одного из способов реализации этого направления с использованием при приеме алгоритма Витерби. Рассмотрены варианты формирования передаваемого сигнала и приема. Произведена оценка помехоустойчивости передачи при воздействии помехи в виде белого шума. Рассматриваемый способ передачи двоичных сообщений обеспечивает достаточно хорошую частотную эффективность без использования формирователя спектра при допустимом снижении помехоустойчивости.

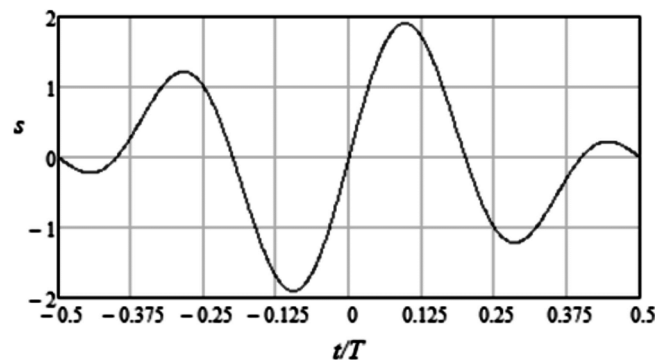
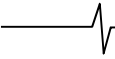


Рис. 2. Нормированный сигнал $s(t)$

Под двоичным сообщением будем понимать последовательность элементов. Элемент сообщения может принимать два значения 0 или 1. Элементы двоичного сообщения считаются независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 или 1 с равной вероятностью. Одновременно передаются два элемента сообщения (пара элементов) с помощью ортогональных сигналов (1) длительностью T . Пары элементов сооб-



щения поступают для передачи с интервалом $T/2$. Таким образом, сигналы, соответствующие последовательно передаваемым парам элементов частично перекрываются во времени на величину $T/2$. В результате при приеме имеется межсимвольная интерференция.

Пусть передаваемый сигнал на интервале $0 \leq t < (M+1)T/2$ формируется в виде:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M [a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2)], \quad (2)$$

где $a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2)$ – сигнал, соответствующий одновременной передаче пары элементов сообщения; M – число пар элементов в сообщении; a_m и b_m принимают значения 1 или -1 в зависимости от значений 1 или 0 элемента сообщения; A – постоянный коэффициент.

Применение сигнала вида (2) для передачи двоичных сообщений рассматривалось в [2] с использованием поэлементного приема и приема в целом. Из [2] следует, что средняя мощность сигнала (2) равна $P = 4A^2$,

его амплитуда $4A$, а пик-фактор $\frac{4A}{\sqrt{P}} = 2$. Пик-фактор

определяется как отношение пиковой амплитуды сигнала к его среднеквадратичному значению (корень квадратный из средней мощности). Полоса частот, в которой сосредоточено 99% мощности сигнала $y(t)$, $F \approx 2,36/T$. Удельные затраты полосы $F/R \approx 0,59$, где $R = 1/T_0 = 4/T$ – скорость передачи элементов двоичного сообщения (бит/с). Спектральная эффективность $R/F \approx 1,69$. Существуют различные критерии определения полосы частот [3], здесь используется один из них.

Таким образом, использование сигнала (2) обеспечивает достаточно высокую спектральную эффективность без использования формирователя спектра. При приеме таких сигналов может использоваться алгоритм Витерби, который реализует правило максимального правдоподобия и минимизирует вероятность ошибки при межсимвольной интерференции [4]. Целью данной работы является рассмотрение формирования сигнала (2) и его приема с использованием алгоритма Витерби.

Формирование сигнала на основе комплексной огибающей

Формирование передаваемого сигнала можно осуществить непосредственно по формуле (2). Однако при больших значениях K целесообразно исходить из комплексной огибающей этого сигнала.

Комплексную огибающую сигнала (2) определим следующим образом:

$$\dot{y}(t) = y_a(t)r(t), \quad (3)$$

$$\text{где } r(t) = \begin{cases} e^{-j2\pi Kt/T} & \text{для четных } K; \\ e^{-j2\pi(K+1)t/T} & \text{для нечетных } K; \end{cases} \quad y_a(t) \text{ – анали-$$

тический сигнал, соответствующий сигналу $y(t)$. Здесь и далее j – мнимая единица.

Как известно, $y_a(t) = y(t) + jy_H(t)$, где $y_H(t)$ – преобразование Гильберта сигнала $y(t)$. С учетом (1) и (2):

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \sum_{m=1}^M \{a_m Ac(t - mT/2) + b_m As(t - mT/2) + \\ &+ j[a_m As(t - mT/2) - b_m Ac(t - mT/2)]\} = \\ &= \sum_{m=1}^M [(b_m + ja_m) As(t - mT/2) + \\ &+ (a_m - jb_m) Ac(t - mT/2)] = \\ &= \sum_{m=1}^M (b_m + ja_m) A(-j)[c(t - mT/2) + js(t - mT/2)] = \\ &= \sum_{m=1}^M (b_m + ja_m) A(-j)[e^{j2\pi K(t/T - m/2)} + e^{j2\pi(K+1)(t/T - m/2)}]. \end{aligned}$$

Тогда (3) можно записать в виде:

$$\dot{y}(t) = y_a(t)r(t) = \sum_{m=1}^M \{(b_m + ja_m) Ag(t - mT/2)\}, \quad (4)$$

где

$$g(t) = \begin{cases} -j(e^{j2\pi t/T} + 1) = \sin(2\pi t/T) - \\ -j[1 + \cos(2\pi t/T)] & \text{для четных } K; \\ -j(e^{-j2\pi t/T} + 1) = -\sin(2\pi t/T) - \\ -j[1 + \cos(2\pi t/T)] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

Сигнал $g(t)$ определен на интервале $-T/2 \leq t < T/2$, вне этого интервала он равен нулю.

Имея в виду (3), можно получить, что

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Re}[\dot{y}(t)r^*(t)] = \\ &= \begin{cases} \text{Re}[\dot{y}(t)]\cos(2\pi Kt/T) - \\ -\text{Im}[\dot{y}(t)]\sin(2\pi Kt/T) & \text{для четных } K; \\ \text{Re}[\dot{y}(t)]\cos[2\pi(K+1)t/T] - \\ -\text{Im}[\dot{y}(t)]\sin[2\pi(K+1)t/T] & \text{для нечетных } K, \end{cases} \end{aligned}$$

где $r^*(t)$ – величина, комплексно сопряженная по отношению к $r(t)$. Из последнего выражения следует, что передаваемый сигнал может быть сформирован с помощью квадратурного модулятора, на входы которого поступают действительная и мнимая составляющая комплексной огибающей (4).

Прием с использованием алгоритма Витерби

Пусть на входе приемника на интервале $0 \leq t < (M+1)T/2$ имеет место сигнал

$$z(t) = y(t) + n(t), \quad (5)$$

где $n(t)$ – аддитивная помеха в виде шума с односторонней спектральной плотностью мощности N в диапазоне частот $0 \leq f < f_1$. При других частотах спектральная плотность мощности помехи равна нулю. Помеха имеет нормальное распределение значений с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = Nf_1$.

Рассмотрим обработку сигнала $z(t)$ путем перехода к комплексной огибающей этого сигнала:

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t) + \dot{n}(t), \quad (6)$$

где $\dot{n}(t)$ – комплексная огибающая, соответствующая помехе $n(t)$.

Для реализации алгоритма Витерби вычисляются комплексные значения (отсчеты) сигнала $\dot{z}(t)$ на интервале $(m-1)T/2 \leq t < (m+1)T/2$, $m = 1, 2, \dots, M$:

$$z_m = \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{z}(t) dt, \quad (7)$$

где $g^*(t)$ – величина, комплексно сопряженная по отношению к $g(t)$.

Кроме того, для алгоритма Витерби необходимы так называемые канальные коэффициенты, которые можно определить следующим образом. С использованием (4) и (6):

$$\begin{aligned} z_m &= \frac{1}{2T} \times \\ &\times \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \left\{ (b_{m-1} + ja_{m-1}) Ag[t-(m-1)T/2] + \right. \\ &+ (b_m + ja_m) Ag(t-mT/2) \\ &+ (b_{m+1} + ja_{m+1}) Ag[t-(m+1)T/2] \left. \right\} dt + \\ &+ \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{n}(t) dt = \\ &= (b_{m-1} + ja_{m-1}) q_3 + (b_m + ja_m) q_2 + \\ &+ (b_{m+1} + ja_{m+1}) q_1 + \frac{1}{2T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} g^*(t-mT/2) \dot{n}(t) dt. \end{aligned}$$

В последнем выражении обозначено:

$$q_1 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t-T/2) dt - \text{канальный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_{m+1} \text{ и } b_{m+1};$$

определяющий вклад в m -й отсчет переданных элементов a_m и b_m ;

$$q_2 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t) dt - \text{канальный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_m \text{ и } b_m;$$

определяющий вклад в m -й отсчет переданных элементов a_m и b_m ;

$$q_3 = \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t) g(t+T/2) dt - \text{канальный коэффициент, определяющий вклад в } m\text{-й отсчет переданных элементов } a_{m-1} \text{ и } b_{m-1}.$$

Если ввести вектор канальных коэффициентов $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]$, то

$$q = \begin{cases} [-A0,318i \ A \ A0,318i] & \text{для четных } K; \\ [A0,318i \ A \ -A0,318i] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

Для определения отсчетов по формуле (7) необходимо получить комплексную огибающую $\dot{z}(t)$. Комплексную огибающую можно определить с помощью преобразования Гилберта. На практике ее определяют несколько иначе с использованием квадратурного де-

модулятора. Для этого предварительно формируется сигнал

$$z_1(t) = z(t)r(t) = \begin{cases} z(t) \cos(2\pi Kt/T) - \\ -z(t)j \sin(2\pi Kt/T) & \text{для четных } K; \\ z(t) \cos[2\pi(K+1)t/T] - \\ -z(t)j \sin[2\pi(K+1)t/T] & \text{для нечетных } K. \end{cases}$$

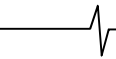
Действительная и мнимая части этого сигнала $\text{Re}[z_1(t)]$ и $\text{Im}[z_1(t)]$ поступают на входы фильтров нижних частот (ФНЧ). На выходах фильтров будем иметь $\text{Re}[\dot{z}(t)]$ и $\text{Im}[\dot{z}(t)]$ соответственно. О выборе ФНЧ будет сказано ниже.

Необходимо отметить, что обработку сигнала $z(t)$ можно осуществить и без перехода к комплексной огибающей этого сигнала. Это целесообразно при небольших значениях K . При этом комплексные значения (отсчеты) сигнала $z(t)$ для алгоритма Витерби определяются следующим образом:

$$z_m = \frac{1}{T} \times \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) z z(t) dt + j \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) z z(t) dt.$$

Имея в виду (2) и (5),

$$\begin{aligned} z_m &= a_{m-1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) c[t-(m-1)T/2] dt + \\ &+ b_m A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} [s(t-mT/2)]^2 dt + \\ &+ a_{m+1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) c[t-(m+1)T/2] dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) n(t) dt + \\ &+ j \left\{ b_{m-1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) s[t-(m-1)T/2] dt + \right. \\ &+ a_m A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} [c(t-mT/2)]^2 dt + \\ &+ b_{m+1} A \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) s[t-(m+1)T/2] dt + \\ &+ \left. \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) n(t) dt \right\} = \\ &= (b_{m-1} + ja_{m-1}) q_3 + (b_m + ja_m) q_2 + (b_{m+1} + ja_{m+1}) q_1 + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} s(t-mT/2) n(t) dt + \\ &+ j \frac{1}{T} \int_{(m-1)T/2}^{(m+1)T/2} c(t-mT/2) n(t) dt, \text{ где} \end{aligned}$$



$$q_1 = -jA \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)c(t-T/2)dt; \quad q_2 = A \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t)]^2 dt;$$

$$q_3 = -jA \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t)c(t+T/2)]dt \text{ – канальные коэффици-}$$

циенты, они имеют те же числовые значения, что были определены выше.

Моделирование

Дальнейший анализ использования алгоритма Витерби будем проводить с использованием моделирования в среде Matlab. При этом сигналы на интервале $0 \leq t < (M+1)T/2$, рассматриваются в дискретные моменты времени $t_d = (d-1)T_0$, где $d = 1, 2, \dots, (M+1)D/2$; T_0 – период дискретизации; $D = T/T_0$ – число дискретных моментов времени на этом интервале $0 \leq t < T$, это число должно быть четным. Необходимо отметить, что выбор D при моделировании будет определяться точностью воспроизведения процессов, описанных в двух предыдущих разделах, а не желанием перехода к цифровой обработке сигналов. Чем большее значение D выбирается, тем точнее моделирование, однако при этом увеличивается время выполнения программы моделирования.

Значения помехи в дискретные моменты времени при условии $T_0 = \frac{1}{2f_1}$ являются независимыми случайными величинами, дисперсия этих величин $\sigma^2 = Nf_1 = \frac{N}{2T_0}$. Воздействие помехи на сигнал принято характеризовать величиной $h^2 = W/N$, где W – средняя энергия сигнала $y(t)$ на m -ом интервале, приходящаяся на элемент передаваемого сообщения, $W = PT/4 = A^2T$. Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{N}{2T_0}} = \sqrt{\frac{W}{2T_0h^2}} = \sqrt{\frac{A^2T}{2T_0h^2}} = A \sqrt{\frac{T}{2T_0h^2}} = A \sqrt{\frac{D}{2h^2}}.$$

Ниже приведена программа моделирования.

```

1. function er=viter_ser(K,h2,U)
2. rng('default');
3. M=1000;
4. A=1;
5. T=1;
6. D=20*K;
7. T0=T/D;
8. [k1,k2]=butter(5,(K-1.5)*2/D);
9. p=round(grpdelay(k1,k2,1,D/T));
10. td=0:T0:(M+1)*T/2 -T0;
11. const=[-1+1i; -1-1i; 1+1i; 1-1i];
12. if rem(K,2)==0
13. rd= exp(-1i*2*pi*K*td/T);
14. gd=sin(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)) -1i(1+cos(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)));
15. q=[-A*0.318; A; A*0.318i];
16. else
17. rd= exp(-1i*2*pi*(K+1)*td/T);

```

```

18. gd=-sin(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)) -
19. i(1+cos(2*pi*(td(1:D)/T-0.5)));
20. q=[A*0.318; A; -A*0.318i];
21. sigma=A*sqrt(L/(2*h2));
22. z=zeros(1,M+1);
23. er=0;
24. for u=1:U
25. a=2*round(rand(1,M))-1;
26. b=2*round(rand(1,M))-1;
27. ydc=upfirdn(b+1i*a,A*gd,D/2);
28. yd=real(ydc.*((rd(1:(M+1)*D/2))));
29. nd=normrnd(0,sigma,1,(M+1)*D/2);
30. zd=yd+nd;
31. zd1=rd.*zd;
32. ezd=filter(k1,k2,[zd1 zeros(1,p)]);
33. for m=1:M
34. ezd1=ezd(p+1+(m-1)*D/2:(m+1)*D/2+p);
35. z(m+1)=(ezd1*gd')kd/D;
36. end
37. viter=mlseeq(z,q,const,15,'rst');
38. b1=real(viter(1:M));
39. a1=imag(viter(1:M));
40. er1=sum(ne(a,a1))+sum(ne(b,b1));
41. er=er+er1;
42. end
43. end

```

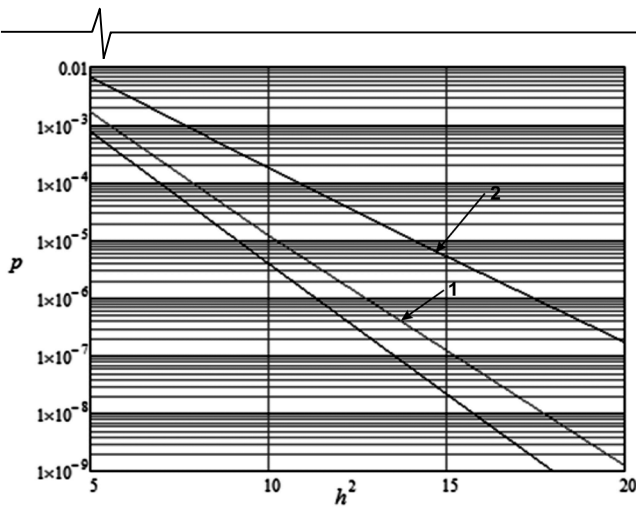
Результаты моделирования с помощью приведенной выше программы приведены в табл. 1. Моделирование производилось при $M = 1000$, $K = 5$ и различных значениях h^2 . В результате получено значение числа ошибок при использовании алгоритма Витерби $N_{ош}$ при передаче $N_{неп} = 2MU$ элементов двоичного сообщения. Затем с помощью функции `berconfint` пакета Matlab определена оценка вероятности ошибки $p = N_{ош}/N_{неп}$, нижняя p_n граница, верхняя p_e граница оценки с доверительной вероятностью 0,95.

Таблица 1. Результаты моделирования

h^2	5	10	15	20
U	10^3	10^5	10^6	10^7
$N_{неп}$	2×10^6	2×10^8	2×10^9	2×10^{10}
$N_{ош}$	3296	2443	245	25
p	$1,648 \times 10^{-3}$	$1,221 \times 10^{-5}$	$1,225 \times 10^{-7}$	$1,25 \times 10^{-9}$
p_n	$1,592 \times 10^{-3}$	$1,173 \times 10^{-5}$	$1,076 \times 10^{-7}$	$0,8087 \times 10^{-9}$
p_e	$1,705 \times 10^{-3}$	$1,271 \times 10^{-5}$	$1,388 \times 10^{-7}$	$1,845 \times 10^{-9}$

На рис. 3 показана диаграмма зависимости p от h^2 (линия 1). Линией 2 изображена зависимость при алгоритме приема в целом [2].

Сравним изложенный в статье способ передачи двоичного сообщения с известным способом передачи, который принято называть модуляцией с минимальным сдвигом (ММС, MSK). Из приведенного в [3] выражения для спектральной плотности мощности можно определить, что полоса частот, в которой сосредоточено 99% мощности сигнала при ММС $F_{ММС} \approx 1,18/T_0$, удельные

Рис. 3. Зависимости p от h^2

затраты полосы $F_{MMC}/R \approx 1,18$, спектральная эффективность $R/F_{MMC} \approx 0,85$, пик-фактор равен $\sqrt{2}$. Таким образом, рассматриваемый способ передачи имеет в два раза большую спектральную эффективность, но в $\sqrt{2}$ раз больший пик-фактор. В [3] также отмечено, что вероятность ошибки при оптимальном приеме сигнала с MMC такая же как при использовании двоичной фазовой манипуляции (ФМ2, BPSK). На рис. 3 соответствующая зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум показана черной линией и можно заключить, что помехоустойчивость рассматриваемого способа передачи несколько хуже, чем при применении MMC. Таким образом, основным преимуществом рассматриваемого способа передачи по сравнению с MMC являются в два раза меньшие удельные затраты полосы и, соответ-

ственно, в два раза большая спектральная эффективность.

Заключение

Рассматриваемый способ передачи двоичного сообщения обеспечивает достаточно высокую спектральную эффективность без использования формирователя спектра при допустимом снижении помехоустойчивости.

Полученные оценки для вероятности ошибки позволяют оценить потенциальную помехоустойчивость приема с использованием алгоритма Витерби.

Повышается помехоустойчивость приема с использованием алгоритма Витерби по сравнению с поэлементным приемом и приемом в целом.

Литература

1. Нгуен Тан Хоанг Фьюк, Гельгор А.Л. Повышение спектральной эффективности DVB-S2 путём применения сигналов с управляемой интерференцией и финитными импульсами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2019. Т. 12. № 3.
2. В.А. Вершинин. Поэлементный прием и прием в целом при перекрывающихся элементарных сигналах // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2018. N10. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/oct18/5/text.pdf>
3. Скляр Бернанд. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая связь: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.– 164 с.