**УДК 621.372**

# ДВУМЕРНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ В БАЗИСАХ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

***Пономарев А.В.,*** *к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@mail.ru*

# TWO-DIMENSIONAL SIGNAL PROCESSING IN SPACE-FREQUENCY DOMAIN IN FOURIER BASES WITH VARIABLE PARAMETERS

***Ponomarev A.V.***

*Discrete Fourier Transform (DFT) is the basis of digital Fourier processing. Two methods for determining 2-D DFT are considered, each of which is carried out using a two-stage application of 1-D DFT. 1-D DFT and 2-D DFT, apart from their advantages, have a number of disadvantages. These disadvantages are manifested in applications in the form of negative effects. Main negative effects are leakage effect, scalloping effect, picket fence effect, aliasing effect. An effective method of dealing with these effects, both in one-dimensional and two-dimensional cases, is to use the operation of padding zeros to a signal. Significant disadvantages of this approach are large required memory size and the need for the great number of unproductive computations with zero elements. There are three options for extending the reference area of a 2-D signal with zeros: zero-padding of the vertical, horizontal, and both vertical and horizontal periods of the two-dimensional signal. It is proved that each of the three options for padding zeros to the reference area samples generates its own set of Fourier bases with variable parameters. The sets were called by the author as Fourier bases of the first, second and third type. The foundations of the theory of two-dimensional signal processing in the spatial-frequency domain in Fourier bases with variable parameters of the first type have been developed. Bases of two-dimensional exponential functions with a variable parameter of the first kind (2-D DEF-VP-1) are introduced and investigated. The basic properties of two-dimensional exponential functions of the first type with a variable parameter are proved. Algebraic and matrix forms of direct and inverse two-dimensional discrete Fourier transform with a variable parameter of the 1st type – 2-D DFT-VP-1 are introduced.*

*The generalization of the 2-D signal periodicity is carried out in the form of the parametric 2-D signal periodicity. The generalization of the cyclic shift of a 2-D signal in the form of a parametric cyclic shift of a 2-D signal is carried out. The main properties of the two-dimensional discrete Fourier transform with a variable parameter of the first type are investigated. The theoretical foundations of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with variable parameters of the first type make it possible to develop new and improve existing methods for two-dimensional Fourier - signal processing.*

**Key words:** theoretical foundations, information technologies of digital Fourier processing, negative effects of two-dimensional DFT, Fourier bases with variable parameters, periodicity of a two-dimensional signal, parametric periodicity of a two-dimensional.

*Рассмотрено два метода определения 2-D ДПФ, каждый из которых проводится с помощью двухэтапного применения 1-D ДПФ. 1-D ДПФ и 2-D ДПФ обладают рядом недостатков, которые в приложениях проявляются в виде негативных эффектов. Основные негативные эффекты: эффект утечки (leakage effect), гребешковый эффект (scalloping effect), эффект частокола (picket fence effect), эффект наложения (aliasing effect). Результативным методом борьбы с этими эффектами, как в одномерном, так и в двумерном случае, является применение операции дополнения сигналов нулями. Возможны три варианта расширения опорной области 2-D сигнала нулевыми отсчетами: дополнение нулями вертикального, горизонтального и одновременно вертикального и горизонтального периодов двумерного сигнала. Доказано, что каждый из трех вариантов расширения опорной области нулевыми отсчетами порождает свое множество базисов Фурье с варьируемыми параметрами, названных автором базисами Фурье первого, второго и третьего рода. Разработаны основы теории двумерной обработки сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода. Введены и исследованы базисы двумерных экспоненциальных функций с варьируемым параметром первого рода – 2-D ДЭФ-ВП-1. Доказаны основные свойства двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром. Введены алгебраическая и матричная формы прямого и обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода –2-D ДПФ-ВП-1, 2-D ОДПФ-ВП-1. Проведено обобщение периодичности 2-D сигнала в виде параметрической периодичности 2-D сигнала. Проведено обобщение циклического сдвига 2-D сигнала в виде параметрического циклического сдвига 2-D сигнала. Исследованы основные свойства двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода. Теоретические основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов.*

**Ключевые слова:** теоретические основы, информационные технологии цифровой Фурье – обработки, негативные эффекты двумерного ДПФ, базисы Фурье с варьируемыми параметрами, периодичность двумерного сигнала, параметрическая периодичность двумерного сигнала.

## Введение

Информационные технологии цифровой обработки как одномерных сигналов (1-D сигналов) в частотной области, так и двумерных сигналов (2-D сигналов) в пространственно-частотной области, нашли свои приложения во многих предметных областях – в радиотехнике, активной и пассивной гидролокации, гидрологии, сейсмологии, геодезии, медицине, метеорологии, контроле и диагностике сложных систем [1 – 33].

При проведении 2-D корреляционного анализа и 2-D свертки сигналов, 2-D спектральной и векторной обработки сигналов широко используется операция дополнения 2-D сигнала $x(n_1,n_2)$; $0 \le n_1 \le N_1 - 1$;

$0 \le n_2 \le N_2 - 1$ на опорной плоскости[1] нулевыми отсчетами. Широкое применение операции дополнения нулями в информационных технологиях цифровой обработки, как одномерных, так и двумерных сигналов связано, главным образом, с тем, что, благодаря этой достаточно простой операции, появляется возможность получения не только циклических, но и линейных математических функций сигналов.

В силу того, что дискретный 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ на прямоугольной пространственной опорной плоскости[2] при $0 \le n_1 \le N_1 - 1$ и $0 \le n_2 \le N_2 - 1$ может быть представлен в виде матрицы:

$$X_{N_1 \times N_2} = \qquad (1)$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ n_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \; . & (N_2-1) & n_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & . \; . & x(0,N_2-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & . \; . & x(1,N_2-1) \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & . \; . & x(N_1-1,N_2-1) \end{bmatrix} \\ \\ \end{array};$$

возможны три варианта дополнения опорной области 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ нулевыми отсчетами с помощью нулевой матрицы $O_{N_1 \times N_2}$:

$$O_{N_1 \times N_2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & . \; . & (N_2-1) & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . \; . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . \; . & 0 \\ . & . & . & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ 0 & 0 & 0 & . \; . & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}; \qquad (2)$$

где $o(m,n) = 0 : \forall\ m = \overline{0, N_1 - 1};\ n = \overline{0, N_2 - 1}$.

*Вариант 1 дополнения опорной области 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ нулевой матрицей $O_{N_1 \times N_2}$:*

$$X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r_1-1) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \begin{bmatrix} X_{N_1 \times N_2} \\ O_{N_1 \times N_2} \\ . \\ . \\ O_{N_1 \times N_2} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3)$$

*Вариант 2 дополнения опорной области 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$* нулевой *матрицей $O_{N_1 \times N_2}$:*

$$X_{N_1 \times N_2 \cdot r_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r_2-1) \end{array} \\ [\; X_{N_1 \times N_2} \quad O_{N_1 \times N_2} \quad . \quad . \quad O_{N_1 \times N_2} \;] \end{array}. \qquad (4)$$

*Вариант 3* дополнения *опорной области 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ нулевой матрицей $O_{N_1 \times N_2}$:*

$$X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2 \cdot r_2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r_1-1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r_2-1) \end{array} \\ \begin{bmatrix} X_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . \; . & O_{N_1 \times N_2} \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . \; . & O_{N_1 \times N_2} \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . \; . & O_{N_1 \times N_2} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (5)$$

Двумерное ДПФ (2-D ДПФ) в матричной форме определяется следующим соотношением:

$$S^{k_1,k_2}_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \mathbf{F}_{N_2 \times N_1} \cdot X_{N_1 \times N_2}; \qquad (6)$$

где $X_{N_1 \times N_2}$ – 2-D сигнал;

$\mathbf{F}_{N_1 \times N_2}$ – матрица двумерных экспоненциальных функций 2-D ДПФ:

$$\mathbf{F}_{N_1 \times N_2} = \qquad (7)$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_2-1) \\ k_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \; . & (N_1-1) & k_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} W^{0 \cdot 0}_{N_1,N_2} & W^{0 \cdot 1}_{N_1,N_2} & . \; . & W^{0 \cdot (N_1-1)}_{N_1,N_2} \\ W^{1 \cdot 0}_{N_1,N_2} & W^{1 \cdot 1}_{N_1,N_2} & . \; . & W^{1 \cdot (N_1-1)}_{N_1,N_2} \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ W^{(N_2-1) \cdot 0}_{N_1,N_2} & W^{(N_2-1) \cdot 1}_{N_1,N_2} & . \; . & W^{(N_2-1) \cdot (N_1-1)}_{N_1,N_2} \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}.$$

$S^{k_1,k_2}_{N_1 \times N_2}$ – двумерный спектр (2-D спектр) 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$:

$$S^{k_1,k_2}_{N_1 \times N_2} = \qquad (8)$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ k_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \; . & (N_2-1) & k_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} S(0,0) & S(0,1) & . \; . & S(0,N_2-1) \\ S(1,0) & S(1,1) & . \; . & S(1,N_2-1) \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ S(N_1-1,0) & S(N_1-1,1) & . \; . & S(N_1-1,N_2-1) \end{bmatrix} \\ \\ \end{array}.$$

Поскольку ядро двумерного дискретного преобразования Фурье обладает свойством разделимости (свойством сепарабельности), то определение 2-D ДПФ может быть реализовано двумя методами, каждый из которых проводится с помощью двухэтапного применения 1-D ДПФ:

***Метод* 1.** $S^{k_1,k_2}_{N_1 \times N_2} = \dfrac{1}{N_1 \cdot N_2} F^{(2)}_{N_1 \times N_1} [X_{N_1 \times N_2} \cdot F^{(1)}_{N_2 \times N_2}]$: (9, а)

*этап № 1:* $S^{(1)}_{N_1 \times N_2} = \dfrac{1}{N_1} [X_{N_1 \times N_2} \cdot F^{(1)}_{N_2 \times N_2}]$;

*этап № 2:* $S^{k_1,k_2}_{N_1,N_2} = \dfrac{1}{N_2} F^{(2)}_{N_1 \times N_1} \cdot S^{(1)}_{N_1 \times N_2}$.

---

[1] **Опорная область** – это диапазон значений переменных $n_1$ и $n_2$, для которого двумерная последовательность $x(n_1, n_2)$ отлична от нуля.

[2] **Опорная область** – это диапазон значений переменных $n_1$ и $n_2$, для которого двумерная последовательность $x(n_1, n_2)$ отлична от нуля.

***Метод 2.*** $S^{k_1,k_2}_{N_1\times N_2} = [\frac{1}{N_1\cdot N_2} F^{(2)}_{N_1\times N_1}\cdot X_{N_1\times N_2}]F^{(1)}_{N_2\times N_2}$ :(9, б)

*этап № 1:* $S^{(2)}_{N_2\times N_1} = [\frac{1}{N_1\cdot N_2}F^{(2)}_{N_1\times N_1}\cdot X_{N_1\times N_2}]$;

*этап № 2:* $S^{k_1,k_2}_{N_1,N_2} = [S^{(2)}_{N2\times N_1}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}]$.

Отметим, что каждый из трех вариантов расширения опорной области нулевыми отсчетами порождает свое множество базисов Фурье с варьируемыми параметрами первого, второго и третьего рода. Свойства базисов Фурье с варьируемыми параметрами третьего рода подробно исследованы в работе автора [1].

**Целью настоящей работы** является создание основ теории двумерной обработки сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода.

### Дискретная двумерная обработка сигналов в пространственно-частотной области в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода

С учетом дополнения сигнала $X_{N_1\times N_2}$ нулевыми матрицами по варианту 1 (3) соотношения (9, а) и (9, б) преобразуются соответственно к виду:

$$S^{k_1,k_2}_{N_1r_1\times N_2} = \frac{1}{N_1\cdot N_2}F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1\cdot r_1}\cdot[X_{N_1\cdot r_1\times N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}]; \qquad (10,\ а)$$

$$S^{k_1,k_2}_{N_1r_1\times N_2} = \frac{1}{N_1\cdot N_2}[F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1\cdot r_1}\cdot X_{N_1\cdot r_1\times N_2}]\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}; \qquad (10,\ б)$$

где $X_{N_1\cdot r_1\times N_2} =$ (11)

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & (N_2-1) & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ . \\ (N_1-1) \\ N_1 \\ . \\ (N_1\cdot r_1-1) \\ n_1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} x(0,0) & x(0,1) & . & x(0,(N_2-1)) \\ . & . & . & . \\ x((N_1-1),0) & x((N_1-1),1) & . & \\ 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right] \end{array};$$

$F^{(1)}_{N_2\times N_2} =$ (12)

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_2-1) & k_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_2-1) \\ n_2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} W^{0\cdot 0}_{N_2} & W^{0\cdot 1}_{N_2} & . & . & W^{0\cdot(N_2-1)}_{N_2} \\ W^{1\cdot 0}_{N_2} & W^{1\cdot 1}_{N_2} & . & . & W^{1\cdot(N_2-1)}_{N_2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W^{(N_2-1)\cdot 0}_{N_2} & W^{(N_2-1)\cdot 1}_{N_2} & . & . & W^{(N_2-1)\cdot(N_2-1)}_{N_2} \end{array}\right] \end{array};$$

$F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1\cdot r_1} =$ (13)

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_1\cdot r_1-1) & n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1\cdot r_1-1) \\ k_1 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} W^{0\cdot 0}_{N_1} & W^{0\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{0\cdot(N_1\cdot r_1-1)}_{N_1} \\ W^{1\cdot 0}_{N_1} & W^{1\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{1\cdot(N_1\cdot r_1-1)}_{N_1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot 0}_{N_1} & W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot(N_1\cdot r_1-1)}_{N_1} \end{array}\right] \end{array}.$$

Исследуем структуру матричного уравнения (10, а), как одну из эквивалентных форм. Нетрудно установить, что если обозначить матричное произведение $[X_{N_1\cdot r_1\times N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}]$ как столбцевую матрицу $Y_{N_1\cdot r_1\times N_2}$, то

$$Y_{N_1\cdot r_1\times N_2} = \begin{bmatrix} X_{N_1\times N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2} \\ O_{N_1\cdot(r_1-1)\times N_2} \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Перемножение матриц $F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1\cdot r_1}$ и $Y_{N_1\cdot r_1\times N_2}$ приводит к усечению $N_1\cdot(r_1-1)$ столбцов квадратной матрицы $F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1\cdot r_1}$ и превращению ее в прямоугольную матрицу $F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1}$:

$F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1} =$ (15)

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_1-1) & n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1\cdot r_1-1) \\ k_1 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} W^{0\cdot 0}_{N_1} & W^{0\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{0\cdot(N_1-1)}_{N_1} \\ W^{1\cdot 0}_{N_1} & W^{1\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{1\cdot(N_1-1)}_{N_1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot 0}_{N_1} & W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{(N_1\cdot r_1-1)\cdot(N_1-1)}_{N_1} \end{array}\right] \end{array}.$$

Обозначим множество номеров строк матрицы $F^{(2)}_{N_1\cdot r_1\times N_1}$ (15) через $C$:

$C: C=\{0,1,2,...,(N_1\,r_1-1)\}$.

Применим к множеству $C$ отношение сравнимости по модулю $r_1$. Известно, что отношение сравнимости по модулю $m$ является отношением эквивалентности и обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности.*

Отношение сравнимости по модулю $r_1$ разбивает множество строк $C$ на $r_1$ классов вычетов по модулю $r_1$:

$$C_0 = \left\{\ 0, r_1, ..., (N_1-1)r_1\ \right\};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{(r_1-1)} = \left\{\ (r_1-1), ..., (N_1 r_1-1)\ \right\}; \qquad (16)$$

$$C_i \neq \varnothing;\quad C_i \bigcap_{i\neq j} C_j = \varnothing;\quad \bigcup_{i=0}^{r_1-1} C_i = C.$$

Матрицу (15), используя разбиение (16) множества $C$ на $r_1$ классов вычетов по модулю $r_1$, представим в виде $r_1$ матриц размером $N_1\times N_1$:

$F^{(2)}_{N_1\times N_1,\theta_1} =$ (17)

$$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_1-1) & n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ k_1 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} W^{(0+\theta_1)\cdot 0}_{N_1} & W^{(0+\theta_1)\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{(0+\theta_1)\cdot(N_1-1)}_{N_1} \\ W^{(1+\theta_1)\cdot 0}_{N_1} & W^{(1+\theta_1)\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{(1+\theta_1)\cdot(N_1-1)}_{N_1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ W^{(N_1-1+\theta_1)\cdot 0}_{N_1} & W^{(N_1-1+\theta_1)\cdot 1}_{N_1} & . & . & W^{(N_1-1+\theta_1)\cdot(N_1-1)}_{N_1} \end{array}\right] \end{array};$$

где $\theta_1 = 0, 1/r_1, ..., /(r_1 - 1)/r_1$.

Дискретные двумерные экспоненциальные функции вида

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2};$$

$$k_1 = \overline{0, N_1 - 1};\ \ k_2 = \overline{0, N_2 - 1};\ \ 0 \le \theta_1 < 1;$$

назовем ***двумерными экспоненциальными функциями с варьируемым параметром первого рода – 2-D ДЭФ-ВП-1***.

Функции $def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) = W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 \cdot n_2} =$

$$= \left[\exp\left(-j\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)\cdot n_1\right)\right]\cdot\left[\exp\left(-j\frac{2\pi}{N_2}k_2\cdot n_2\right)\right] =$$

$$= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)\cdot n_1\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1\right)\cdot n_1\right]\times$$

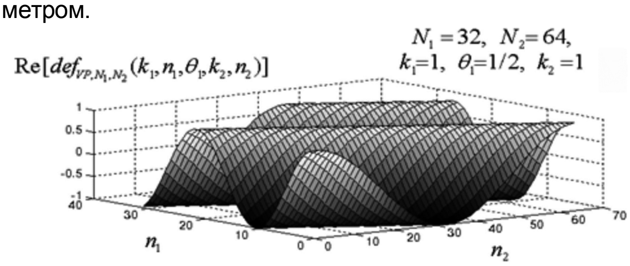
$$\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_2}k_2\cdot n_2\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N_2}k_2\right)\cdot n_2\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2 n_2\right) - \tag{18}$$

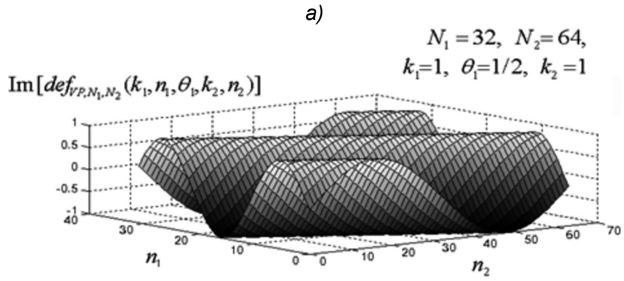
$$- j\sin\left(\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2 n_2\right).$$

образуют при каждом конкретном значении $\theta_1$ базисную систему Фурье варьируемым параметром $\theta_1$ первого рода.

На рис. 1-3 приведены примеры двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром.



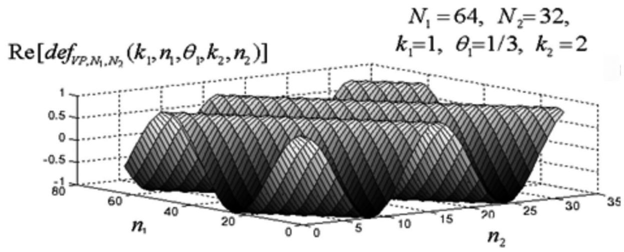

*а)*



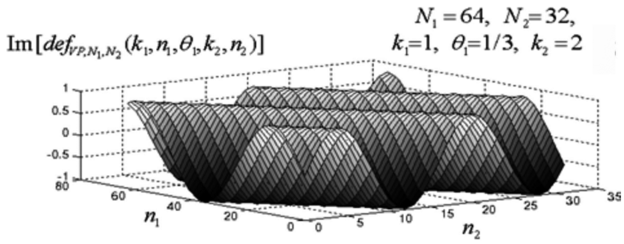

*б)*

*Рис. 1. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при* $N_1 = 32;\ N_2 = 64;\ k_1 = 1;\ k_2 = 1;\ \theta_1 = 1/2$

Рассмотрим основные свойства двумерных дискретных экспоненциальных функций (2-D ДЭФ-ВП-1), совокупность которых составляет при каждом значении параметра $\theta_1$ свою базисную систему двумерного ДПФ-ВП-1 в пространстве $\mathbf{I}_2^{\mathbf{N}}$.

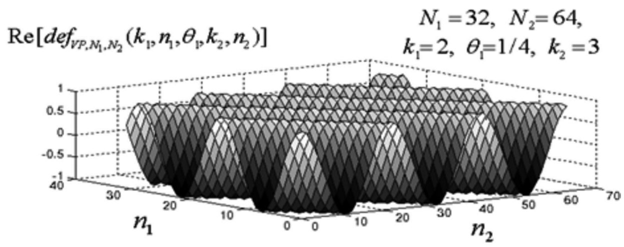



*а)*

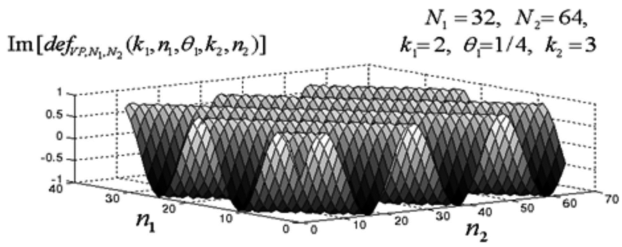



*б)*

*Рис. 2. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при* $N_1 = 64;\ N_2 = 32;\ k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ \theta_1 = 1/3$




*а)*




*б)*

*Рис. 3. Двумерная экспоненциальная функция первого рода с варьируемым параметром при* $N_1 = 32;\ N_2 = 64;\ k_1 = 2;\ k_2 = 3;\ \theta_1 = 1/4$

Отметим, что каждая из двумерных дискретных экспоненциальных функций с варьируемым параметром 1 рода имеет свои пространственные частоты $k_1$, $k_2$, которые определяют ее место в конкретной базисной системе.

***Основные свойства двумерных экспоненциальных функций первого рода с варьируемым параметром:***

1. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются комплексными функциями по определению.
2. 2-D ДЭФ-ВП-1 является обобщением базисной системы 2-D ДЭФ и равна ей при нулевом значении параметра $\theta_1$.
3. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются двумерными функциями четырех равноправных переменных $k_1, k_2$ и $n_1, n_2$, а

также одного варьируемого параметра $\theta_1$ :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1,n_1,\theta_1,k_2,n_2) = W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2\cdot n_2} . \qquad (19)$$

4. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются периодическими по переменной $k_1$ с периодом $N_1$ и по переменным $k_2, n_2$ с периодом $N_2$ :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1 \pm lN_1, n_1, \theta_1, k_2 \pm mN_2, n_2 \pm qN_2)$$
$$= def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) ; \qquad (20)$$

где $l, m, q$ – целые числа.

5. 2-D ДЭФ-ВП-1 являются параметрически периодическими[3] по переменной $n_1$ с периодом $N_1$ :

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1 \pm pN_1, \theta_1, k_2, n_2) =$$
$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot W_{N_1}^{\theta_1 N_1 p} , \qquad (21)$$

где $p$ – целое число.

6. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 по переменным $k_1, k_2$ не является мультипликативной:

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot def_{VP,N_1,N_2}(k_3, n_1, \theta_1, k_4, n_2) \neq$$
$$\neq def_{VP,N_1,N_2}((k_1+k_3)_{\mathrm{mod}\,N_1}, n_1, \theta_1, (k_2+k_4)_{\mathrm{mod}\,N_2}, n_2)) . \qquad (22)$$

7. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 по переменным $n_1, n_2$ является мультипликативной:

$$def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) \cdot def_{VP,N_1,N_2}(k_1, n_3, \theta_1, k_2, n_4) =$$
$$= def_{VP,N_1,N_2}(k_1, (n_1+n_3)_{\mathrm{mod}\,N_1}, k_2, \theta_1, (n_2+n_4)_{\mathrm{mod}\,N_2}) . \qquad (23)$$

8. Среднее значение 2-D ДЭФ-ВП-1 с пространственными частотами $k_1 \neq 0 \;\; k_2 \neq 0$ равно нулю:

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} def_{N_1,N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2) =$$
$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1\cdot N_2}^{N_2(k_1+\theta_1)n_1} \cdot \left[ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1\cdot N_2}^{N_1 k_2 n_2} \right] =$$
$$\left[ \frac{1 - W_{N_1}^{k_1(1+\theta_1)N_1}}{1 - W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)}} \right] \cdot \left[ \frac{1 - W_{N_2}^{k_2 N_2}}{1 - W_{N_2}^{k_2}} \right] = 0 . \qquad (24)$$

9. Система 2-D ДЭФ-ВП-1 это ортогональная система по переменным $k_1, k_2$ :

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1\cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_1 + N_1 k_2 n_2)} \cdot W_{N_1\cdot N_2}^{(N_2(k_3+\theta_1)n_1 + N_1 k_4 n_2)*} =$$
$$= \begin{cases} 1, \text{ если } k_1 = k_3,\ k_2 = k_4, \\ 0, \text{ если } k_1 \neq k_3,\ k_2 \neq k_4 \end{cases} \qquad (25)$$

и по переменным $n_1, n_2$ :

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1\cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_1 + N_1 k_2 n_2)} \cdot W_{N_1\cdot N_2}^{(N_2(k_1+\theta_1)n_3 + N_1 k_2 n_4)*} =$$
$$= \begin{cases} 1, \text{ если } n_1 = n_3,\ n_2 = n_4, \\ 0, \text{ если } n_1 \neq n_3,\ n_2 \neq n_4, \end{cases} . \qquad (26)$$

где символ * означает комплексное сопряжение.

10. 2-D ДЭФ-ВП-1 в пространстве можно изобразить в виде двух векторов единичной длины, вращающихся скачкообразно на углы $2\pi(k_1+\theta_1)/N_1$ и $2\pi k_2/N_1$ соответственно, при изменении переменных $n_1$ и $n_1$ на единицу. Проекции этих векторов на соответствующие оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функций $W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1}$ и $W_{N_2}^{k_2 n_2}$ . На интервале $N_1$ вектор $W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)n_1}$ проходит угол $2\pi(k_1+\theta_1)$ радиан, совершая $(k_1+\theta_1)$ оборотов, а на интервале $N_2$ вектор $W_{N_2}^{k_2 n_2}$ проходит угол $2\pi k_2$ радиан, совершая $k_2$ оборотов. Вектора: $W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)n_1} = W_{N_1}^{(N_1-(k_1+\theta_1))n_1}$ и $W_{N_2}^{-k_2 n_2} = W_{N_2}^{(N_2-k_2)n_2}$ совершают соответственно $(N_1-(k_1+\theta_1))$ и $(N_2-k_2)$ оборотов.

Рис. 4 иллюстрирует такое представление 2-D ДЭФ-ВП-1, на котором углы $\frac{2\pi}{N_1}(k_1+\theta_1)$ и $\frac{2\pi}{N_2}k_2$ отмечены соответствующими точками.

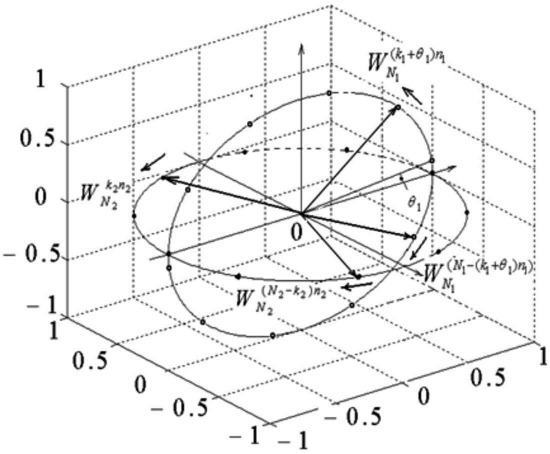



*Рис. 4. Представление двумерной экспоненциальной функции первого рода с варьируемым параметром*

11. В силу того, что число функций в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1 равно числу отсчетов каждой функции, а также линейной независимости функций в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1, система 2-D ДЭФ-ВП-1 является полной в пространстве $\mathbf{I}_2^{\mathbf{N}}$ .

Разложение по базисным системам вида (18) определим как прямое двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемым параметром 1 рода (2-D ДПФ-ВП-1). Существует две формы 2-D ДПФ-ВП-1: алгебраическая и матричная. Рассмотрим их.

***Алгебраическая форма прямого двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ДПФ-ВП-1:***

$$S_{N_1,N_2}(k_1, \theta_1, k_2) =$$
$$= \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2\cdot n_2} , \qquad (27)$$

где $k_1 = \overline{0,(N_1-1)}$ , $k_2 = \overline{0,(N_2-1)}$ – пространственные частоты; $\theta_1$ – параметр преобразования 2-D ДПФ-ВП-1:

[3] **Определение понятия параметрической периодичности** двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$ рассмотрено в статье позже.

$0 \le \theta_1 < 1$ ; $x(n_1,n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1 = \overline{0, N_1-1}$, $n_2 = \overline{0, N_2-1}$, $S_{N_1\,,\,N_2}(k_1,k_2,\theta_1)$ – коэффициенты 2-D ДПФ-ВП-1 (двумерный векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1,n_2)$ в базисной системе 2-D ДЭФ-ВП-1).

***Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-ВП-1, учитывая свойство разделимости (сепарабельности) ядра 2-D ДПФ-ВП-1, может быть реализована в двух видах:***

$$S_{N_1\,,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{N_1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1}\left[\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}\right]; \qquad (28,\ а)$$

или в виде:

$$S_{N_1\,,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) =$$

$$= \frac{1}{N_1}\left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} x(n_1,n_2)\right]\frac{1}{N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{k_2 n_2}. \qquad (28,\ б)$$

Формулами (28, а, б) задается двухэтапное определение прямого 2-D ДПФ-ВП-1 методом двух одномерных параметрических ДПФ (ДПФ-П) [1], выполняемых последовательно: формулой (28, а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (28, б) – по столбцам, а затем по строкам. Отметим, что вычисление ДПФ-П может проводиться методами параметрического быстрого преобразования Фурье (БПФ-П). Существует обратное 2-D ДПФ-ВП-1 (2-D ОДПФ-ВП-1).

***Алгебраическая форма обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода 2-D ДПФ-ВП-1:***

$$x(n_1,n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1,\,,N_2}(k_1,k_2,\theta_1) W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot n_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2\cdot n_2};$$

$$n_1 = \overline{0, N_1-1},\quad n_2 = \overline{0, N_2-1}; \qquad (29);$$

Докажем, что (29) действительно обратное преобразование по отношению к (27).

Умножим правую и левую часть соотношения (27) на $W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot m_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2\cdot m_2}$ и просуммируем по $k_1$ и $k_2$

$$\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1\,,\,N_2}(k_1,k_2,\theta_1)\, W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot m_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2\cdot m_2} =$$

$$= \frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\cdot W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1}\cdot W_{N_2}^{k_2\cdot n_2}\times$$

$$\times W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot m_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2\cdot m_2} =$$

$$= \frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)\cdot W_{N_1}^{-\theta_1(m_1-n_1)}$$

$$\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{-k_1(m_1-n_1)}\cdot W_{N_2}^{-k_2(m_2-n_2)}. \qquad (30)$$

С учетом ортогональности систем функций $W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot m_1}$ и $W_{N_2}^{-k_2\cdot m_2}$, замены переменных $m_1$ и $m_2$ на $n_1$ и $n_2$, и поменяв местами левую и правую части соотношения (30), окончательно получим:

$$x(n_1,n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} S_{N_1,\,,N_2}(k_1,k_2,\theta)\cdot W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)\cdot n_1}\cdot W_{N_2}^{-k_2\cdot n_2};$$

$$n_1 = \overline{0, N_1-1};\ n_2 = \overline{0, N_2-1}. \qquad (31)$$

что совпадает с (29). Используя свойство сепарабельности ядра 2-D ДПФ-ВП-1 введем два вида матричной формы прямого 2-D ДПФ-ВП-1.

***Матричная форма прямого двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ДПФ-ВП-1:***

$$S_{N_1\times N_2,\theta_1} = \frac{1}{N_1}F^{(2)}_{N_1\times N_1,\theta_1}\cdot\frac{1}{N_2}[X_{N_1\times N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}];\ 0\le\theta_1<1; \qquad (32)$$

$$F^{(1)}_{N_2\times N_2} = \qquad (33)$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \ . & (N_2-1) & k_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_2-1) \\ n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0\cdot 0} & W_{N_2}^{0\cdot 1} & . \ . & W_{N_2}^{0\cdot(N_2-1)} \\ W_{N_2}^{1\cdot 0} & W_{N_2}^{1\cdot 1} & . \ . & W_{N_2}^{1\cdot(N_2-1)} \\ . & . & . \ . & . \\ . & . & . \ . & . \\ W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot 1} & . \ . & W_{N_2}^{(N_2-1)\cdot(N_2-1)} \end{bmatrix} \end{array};$$

$$F^{(2)}_{N_1\times N_1,\theta_1} = \qquad (34)$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \ . & (N_1-1) & n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ k_1 \end{array} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0+\theta_1)\cdot 0} & W_{N_1}^{(0+\theta_1)\cdot 1} & . \ . & W_{N_1}^{(0+\theta_1)\cdot(N_1-1)} \\ W_{N_1}^{(1+\theta_1)\cdot 0} & W_{N_1}^{(1+\theta_1)\cdot 1} & . \ . & W_{N_1}^{(1+\theta_1)\cdot(N_1-1)} \\ . & . & . \ . & . \\ . & . & . \ . & . \\ W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)\cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)\cdot 1} & . \ . & W_{N_1}^{(N_1-1+\theta_1)\cdot(N_1-1)} \end{bmatrix} \end{array};$$

или в виде:

$$S_{N_1\times N_2,\theta_1} = \frac{1}{N_1}[\ F^{(2)}_{N_1\times N_1,\theta_1}\cdot X_{N_1\times N_2}]\frac{1}{N_2}\cdot F^{(1)}_{N_2\times N_2}. \qquad (35)$$

Подчеркнем, различие матриц (17) и (34), заключающееся в характере изменения параметра $\theta_1$.

***Матричная форма обратного двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода – 2-D ОДПФ-ВП-1:***

Обратное 2-D ДПФ-ВП-1 в матричной форме задается матричным уравнением в виде:

$$X_{N_1\times N_2} = \frac{1}{N_1}F^{(2)*}_{N_1\times N_1,\theta_1}\cdot\frac{1}{N_2}[S_{N_1\times N_2,\theta_1}\cdot F^{(1)*}_{N_2\times N_2}];\ 0\le\theta_1<1; \qquad (36)$$

или в виде:

$$X_{N_1\times N_2} = \frac{1}{N_1}[F^{(2)*}_{N_1\times N_1,\theta_1}\cdot S_{N_1\times N_2}]\frac{1}{N_2}\cdot F^{(1)*}_{N_2\times N_2};\ 0\le\theta_1<1. \qquad (37)$$

Рассмотрим понятия периодичности и параметрической периодичности двумерных сигналов $x(n_1,n_2)$ и их математическую формализацию.

**Периодичность и параметрическая периодичность двумерных сигналов**

Конечный дискретный двумерный сигнал $x(n_1,n_2)$ с прямоугольной опорной областью $SA_{N_1\times N_2}$ :

$$SA_{N_1\times N_2} := \{\, (n_1,n_2) : n_1 = \overline{0, N_1-1},\ n_2 = \overline{0, N_2-1}\ \}; \qquad (38)$$

является периодическим в пространственной области с вертикальным периодом $N_1$ и горизонтальным периодом $N_2$. В рамках теории двумерных дискретных сигналов $x(n_1,n_2)$ любые линейные преобразования не должны выводить их за пределы фундаментального периода, а сдвиг понимается как циклический сдвиг:

– сдвиг двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$ в направлении вертикального периода $N_1$ понимается как циклическая перестановка строк матрицы $X_{N_1\times N_2}$ (1);

– сдвиг двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$ в направлении горизонтального периода $N_2$ понимается как циклическая перестановка столбцов матрицы $X_{N_1\times N_2}$;

– одновременный сдвиг двумерного сигнала $x(n_1,n_2)$ в направлении вертикального периода $N_1$ и горизонтального периода $N_2$ понимается как одновременные циклические перестановки строк и столбцов матрицы $X_{N_1\times N_2}$.

Введем в рассмотрение матрицы циклических сдвигов двумерного сигнала $X_{N_1\times N_2}$. Матрица вертикального сдвига $H_{V.Sh,N_1\times N_1}$:

$$H_{V.Sh,N_1\times N_1} = \qquad (39)$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N_1-2) \\ (N_1-1) \\ n_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & (N_1-2) & (N_1-1) & n_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \end{array} .$$

Матрица горизонтального сдвига $H_{H.Sh,N_2\times N_2}$:

$$H_{H.Sh,N_2\times N_2} = \qquad (40)$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N_2-2) \\ (N_2-1) \\ n_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & (N_2-2) & (N_2-1) & n_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \end{array} .$$

Указанные выше циклические сдвиги строк и столбцов двумерного сигнала $X_{N_1\times N_2}$ могут быть математически описаны с помощью матриц (39) и (40) следующими блочными матричными уравнениями.

Сдвиг сигнала $X_{N_1\times N_2}$ в вертикальном направлении:

$$C_{V.Sh} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N_1-1) \end{array} \begin{bmatrix} H^0_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ H^1_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ H^2_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ \vdots \\ H^{(N_1-1)}_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \end{bmatrix}; \qquad (41)$$

Сдвиг сигнала $X_{N_1\times N_2}$ в горизонтальном направлении:

$$C_{H.Sh} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N_1-1) \end{array} \begin{bmatrix} [X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^0_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ [X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^1_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ [X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^2_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ \vdots \\ [X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^{(N_2-1)}_{H.Sh,N_2\times N_2} \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Сдвиг сигнала $X_{N_1\times N_2}$ в вертикальном и горизонтальном направлениях:

$$C_{V.H.Sh} = \begin{bmatrix} H^0_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^0_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ H^1_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^1_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ H^2_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^2_{H.Sh,N_2\times N_2} \\ \vdots \\ H^{(N_1-1)}_{V.Sh,N_1\times N_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T\cdot H^{(N_2-1)}_{H.Sh,N_2\times N_2} \end{bmatrix}; \qquad (43)$$

где $H^0_{V.Sh,N_1\times N_1}$, $H^0_{H.Sh,N_2\times N_2}$ – единичные матрицы, выражения $H^m_{V.Sh,N_1\times N_1}$, $H^m_{H.Sh,N_2\times N_2}$, означает возведение в степень $m$ матриц $H_{V.Sh,N_1\times N_1}$, $H_{H.Sh,N_2\times N_2}$.

Двумерные экспоненциальные функции первого рода с варьируемым параметром являются периодическими по переменной $n_2$ с периодом $N_2$ (20) и параметрически периодическими по переменной $n_1$ с периодом $N_1$ (21). Периодичность по переменной $n_2$ является классическим понятием и особого пояснения не требует. Рассмотрим понятие параметрической периодичности.

В теории двумерного ДПФ-ВП-1 под параметрическим сдвигом двумерного сигнала $X_{N_1\times N_2}$ в вертикальном направлении будем понимать циклический параметрический сдвиг вида:

$$C_{V.Sh,\theta_1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N_1-1) \end{array} \begin{bmatrix} H^0_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ H^1_{v.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ H^2_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \\ \vdots \\ H^{(N_1-1)}_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}\cdot[X_{N_1\times N_2}]^T \end{bmatrix}; \qquad (44)$$

где $H_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}$ – матрица параметрического сдвига:

где $H_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}$ = (45)

$$
=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ (N_1-2)\\(N_1-1)\\ n_1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & . & (N_1-2) & (N_1-1) & n_1 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & . & . & . & & 0\\
0 & 0 & 0 & . & . & . & & 0\\
0 & 0 & 0 & . & . & . & & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1\\
\exp(-j2\pi\theta_1) & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array};
$$

$H^0_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}$ – единичная матрица, выражение $H^m_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}$, $m=\overline{0,(N_1-1)}$ означает возведение в степень $m$ матрицы $H_{V.Sh,N_1\times N_1,\theta_1}$.

*Введение параметрической периодичности сигнала для ДПФ-ВП-1 позволяет обобщить понятие периодичности сигнала, из которого классическое (стандартное) понятие периодичности следует как частный случай.*

Дополнение двумерного сигнала $X_{N_1\times N_2}$ $N_1\cdot(r_1-1)$ нулевыми отсчетами согласно соотношению (11) приводит к искусственному увеличению периода сигнала по переменной $n_1$ в $r_1$ раз.

$$
X_{N_1\cdot r_1\times N_2}=
\begin{array}{c} \\ 0\\ \cdot\\ (N_1-1)\\ N_1\\ \cdot\\ (N_1\cdot r_1-1)\\ n_1\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & (N_2-1) & n_2\end{array}\\
\begin{bmatrix}
x(0,0) & x(0,1) & . & x(0,(N_2-1))\\
. & . & . & .\\
x((N_1-1),0) & x((N_1-1),1) & . & \\
0 & 0 & . & 0\\
. & . & . & .\\
0 & 0 & . & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Следовательно, матрицу $X_{N_1\cdot r_1\times N_2}$ можно представить как блочную матрицу вида:

$$X^T_{N_1\times N_2}=[A_{11}\ \ A_{12}\ldots A_{1r_1}]; \tag{46}$$

$A_{11}$= (47)

$$
=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\ \cdot\\ \cdot\\ (N_1-1)\\ n_1\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_2-1) & n_2\end{array}\\
\begin{bmatrix}
x(0,0) & x(0,1) & . & . & x(0,N_2-1)\\
x(1,0) & x(1,1) & . & . & x(1,N_2-1)\\
. & . & . & . & .\\
. & . & . & . & .\\
x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & . & . & x(N_1-1),(N_2-1)
\end{bmatrix}
\end{array};
$$

$$
A_{1\,m}=
\begin{array}{c} \\ 0\\1\\ \cdot\\ \cdot\\ (N_1-1)\\ n_1\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & (N_2-1) & n_2\end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & . & . & 0\\
0 & 0 & 0 & . & . & 0\\
. & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & . & . & 0
\end{bmatrix}
\end{array};
$$

где $m=\overline{2,r_1}$. (48)

Параметрическая периодичность двумерного сигнала $X_{N_1\times N_2,\theta_1}$ на периоде $N_1\cdot r_1$ согласно выражению (21) может быть представлена следующим матричным соотношением:

$$X^T_{N_1\times N_2,\theta_1}=[A_{11}\ \ W^{\theta_1 N_1}_{N_1}\cdot A_{11}\ \ W^{2\,\theta_1 N_1}_{N_1}\cdot A_{11}\ \ldots\ W^{\theta_1 N_1\cdot(r_1-1)}_{N_1}\cdot A_{11}]. \tag{49}$$

Сопоставляя выражения (46) и (49), а также учитывая дискретность параметра $\theta_1$:

$\theta_1=0,\,1/r_1,\ldots,(r_1-1)/r_1$,

сигнал $X_{N_1\cdot r_1\times N_2}$ (11) может быть представлен на $N_1\cdot r_1$ – интервале как почленная сумма блочных матриц:

$$X_{N_1\cdot r_1\times N_2}=\frac{1}{r}\sum_{\theta_1=1/r_1}^{\theta_1=(r_1-1)/r_1}[X^T_{N_1\times N_2,\theta_1}]. \tag{50}$$

При значении параметра $\theta_1=0$ согласно соотношению (49) мы приходим к классической периодичности двумерного сигнала. Отметим также, что если двумерный сигнал $X_{N_1\times N_2}$ является действительным сигналом, то параметрически периодический сигнал $X_{N_1\times N_2,,\theta_1}$ является комплексным сигналом за исключением случая, когда значение параметра $\theta_1$ равно 1/2. В этом случае матричное соотношение (49) преобразуется к виду:

$$X^T_{N_1\times N_2,1/2}=[A_{11}\ \ -A_{11}\ \ A_{11}\ \ldots\ -A_{11}]. \tag{51}$$

## Основные свойства двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода

Прежде чем перейти к изложению теорем, которые справедливы для двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром 1 рода, приведем равенство, справедливость которого, используя понятие параметрической периодичности, несложно установить:

$$\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=p_1}^{M_1}\sum_{n_2=p_2}^{M_2}x_{\theta_1}(n_1,n_2)\,W^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1}_{N_1}\cdot W^{k_2\cdot n_2}_{N_2}=$$

$$=\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x_{\theta_1}(n_1,n_2)\,W^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1}_{N_1}\cdot W^{k_2\cdot n_2}_{N_2}; \tag{52}$$

где $|M_1-p_1|=N_1-1$; $|M_2-p_2|=N_2-1$.

Введем символическое обозначения для ДПФ-ВП-1:

$x_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ .

***Теорема линейности:***

ДПФ-ВП-1 является линейным преобразованием по определению.

Если:

$x_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

$y_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} Q_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

то:

$\lambda_1 \cdot x_{\theta_1}(n_1,n_2) + \lambda_2 \cdot y_{\theta_1}(n_1,n_2) =$

$\lambda_1 \cdot S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) + \lambda_2 \cdot Q_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2);$ ;

где $\lambda_1$ , $\lambda_2$ – произвольные числа.

***Теорема сдвига:***

Если:

$x_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

то:

$x_{\theta_1}((n_1+m_1),(n_2+m_2)) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1}$

$W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2m_2} \cdot S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

*<u>Доказательство.</u>*

Обозначим:

$U_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2m_2} \cdot S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) =$

$= W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2m_2} \cdot$

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1,n_2)\, W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2\cdot n_2}$$

и введем замену переменных:

$l_1 = n_1 + m_1$ ; $l_2 = n_2 + m_2$ .

Тогда:

$U_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) =$

$$= \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{l_1=m_1}^{N_1+m_1-1} \sum_{l_2=m_2}^{N_2+m_2-1} x_{\theta_1}(l_1,l_2)\, W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot(l_1-m_1)} \cdot W_{N_2}^{k_2\cdot(l_2-m_2)} .$$

С учетом (52) получим:

$U_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{-k_2m_2} \cdot S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ .

Аналогично для сдвигов $(n_1-m_1),(n_2-m_2)$ получим:

$x_{\theta_1}((n_1-m_1),(n_2-m_2)) =$

$= W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)m_1} \cdot W_{N_2}^{k_2m_2} \cdot S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ .

***Теорема корреляции:***

Если:

$x_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

$y_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} Q_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

$R_{\theta_1}(n_1,n_2) =$

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1,n_2) \cdot y_{\theta_1}((n_1+m_1),(n_2+m_2)) ;$$

где $R_{\theta_1}(n_1,n_2)$ циклическая (круговая) корреляция сигналов $x_{\theta_1}(n_1,n_2)$ и $y_{\theta_1}(n_1,n_2)$ ;

$R_{\theta_1}(n_1,n_2) \xleftrightarrow{ДПФ-ВП-1} Z_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ ;

то:

$Z_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = S^*_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) \cdot Q_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ .

*<u>Доказательство.</u>*

ДПФ-ВП-1 циклической (круговой) корреляции сигналов $x_{\theta_1}(n_1,n_2)$ и $y_{\theta_1}(n_1,n_2)$ равно:

$Z_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) =$

$$= \frac{1}{N_1^2 \cdot N_2^2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{\theta_1}(n_1,n_2) \cdot y_{\theta_1}((n_1+m_1),(n_2+m_2)) \times$$

$$\times W_{N_1}^{(k_1+\theta_1)\cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2\cdot n_2} .$$

Применив теорему сдвига, несложно установить справедливость теоремы корреляции:

$Z_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = S^*_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) \cdot Q_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ .

***Теорема (равенство) Парсеваля:***

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \left| x_{\theta_1}(n_1,n_2) \right|^2 = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \left| S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) \right|^2 .$$

*<u>Доказательство.</u>*

Если положить:

$x_{\theta_1}(n_1,n_2) = y_{\theta_1}(n_1,n_2)$ ;

то из теоремы корреляции непосредственно следует:

$$\frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \left| x_{\theta_1}(n_1,n_2) \right|^2 = = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \left| S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) \right|^2 .$$

Для ДПФ-ВП-1 можно ввести аналогично двумерному ДПФ понятия спектра мощности $P_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ и энергетического спектра $G_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2)$ :

$P_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = | \ S_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) \ |^2$ ;

$G_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) = P_{N_1,N_2}(k_1,\theta_1,k_2) / \Delta f$ ; $\Delta f = 1/(N_1 \cdot N_2)$ .

**Заключение**

В работе предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода. Предложенная теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной Фурье – обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости.

Теоретические основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами первого рода позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов.

Предложенные двумерные базисы Фурье с варьируемыми параметрами первого рода, дискретное преобразование Фурье на их основе существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий двумерной цифровой обработки сигналов и изображений в пространственной и пространственно-частотной областях.

Исследования аналитических свойств базисов Фурье с варьируемыми параметрами первого рода, позволяют сделать вывод о перспективности проведения исследований вероятностных свойств спектров, полученных на их основе, на основе двумерной версии теоремы Винера – Хинчина.

## Литература


1. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов. – 2019. – № 2. – С. 12-20.

2. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ. 2016. – 172 с.

3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Перевод с англ.– М.: Мир. 1978. – 839 с.

4. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. – 406 p.

5. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. – 1168 p.

6. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. – 790 с.

7. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова, 2016. – Т. 19. – № 2. – С. 80-83.

8. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис….д-ра техн. наук: 05.13.01. – Ижевск, 2016. – 357 с.

9. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 88-94.

10. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов// Метрология. 2017. – № 1. – С. 20-32.

11. Смирнова Н.В., Пономарева О.В. Векторная и спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2019. – № 2. – С. 3-11.

12. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 2. – С.81-87.

13. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2010. – № 2(16). – С.36-42.

14. Пономарев В.А, Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. 2014. – Т. 1. – № 15. – С.183-184.

15. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. 2013. – Т. 1. – № 14. – С.121-124.

16. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. 2013. – Т. 2. – № 14. – С. 90-93.

17. Пономарева О.В. Теоретико-вероятностные характеристики случайных дискретных информационных сигналов и аксиомы их измерения // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 2. – С. 73-80.

18. Пономарева Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 26-32.

19. Пономарева Н. В., Пономарева О.В., Хворенков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 33-40.

20. Пономарева Н.В., Пономарева В.Ю. Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 15-18.

21. Пономарева Н.В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики – MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 4 (31). – С. 32-34.

22. Пономарева О.В., Пономарева Н.В., Пономарева В.Ю. Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 19-21.

23. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Инверсия дискретного времени и параметрическое дискретное преобразование Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 4 (31). – С. 25-31.

24. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI. – № 9. – С. 67-68.

25. Пономарева О.В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 102-106.

26. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 106-109.

27. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического Фурье - спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – № 2. – С. 8 - 16.

28. Пономарева О.В., Пономарев В.А. Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2(22). – С. 149-157.

29. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 115-118.

30. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 244-247.

31. Пономарева О.В. Горизонтальная скользящая пространственно-частотная обработка двумерных дискретных действительных сигналов // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 78-87.

32. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. – № 1. – С. 71-77.

33. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margarita Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. – 2020.