УДК 621.372

РОЛЬ И МЕСТО ОПЕРАЦИИ ДОПОЛНЕНИЯ НУЛЯМИ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ФУРЬЕ-ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Пономарев А.В., *к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@ mail.ru;*
Пономарева О.В., *д.т.н., профессор, Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@ mail.ru.*

THE ROLE OF ZERO PADDING IN THE THEORY OF TWO-DIMENSIONAL FOURIER SIGNAL PROCESSING

Ponomarev A.V., Ponomareva O.V.

The transition to two-dimensional Fourier processing requires rethinking many concepts and definitions of one-dimensional digital Fourier processing of signals. For example, the operation of appending zeros to the original signal in one-dimensional Fourier signal processing is an effective method for eliminating aliasing effects, detailing the spectrum estimate of finite discrete one-dimensional signal. In two-dimensional Fourier signal processing, the corresponding operation is also effective, but requires rethinking. The paper presents the systems analysis of theoretical foundations of discrete two-dimensional signal processing based on Fourier transform. Evaluation of the efficiency of the zero-padding operation in two-dimensional signal processing is carried out.
The concept of discrete-spatial Fourier transform is introduced. It is shown that the discrete-spatial Fourier transform is defined as a two-dimensional z-transform. This transformation is computed in z-space on the unit sphere.
An approximation of the discrete - spatial Fourier transform is considered. The approximation of the discrete-spatial Fourier transform is based on a two-dimensional discrete Fourier transform of a zero-padded signal.
A systems analysis of the postulates of the theory of discrete two-dimensional signal processing based on Fourier transform is given.
Methods and algorithms for obtaining a two-dimensional linear convolution using cyclic convolution are presented. Methods and algorithms for obtaining a two-dimensional linear correlation function based on a cyclic correlation function are presented. The results of numerical simulation are presented, which confirm the obtained theoretical results.

Key words: two-dimensional signal, reference domain, two-dimensional discrete Fourier transform, two-dimensional discrete-spatial Fourier transform, two-dimensional convolution, two-dimensional correlation function, zero padding.

Проведен системный анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье. Получена оценка эффективности операции дополнения нулями в двумерной обработке сигналов.
Введено понятие дискретно-пространственного преобразования Фурье. Показано, что дискретно-пространственное преобразование Фурье определяется как двумерное z-преобразование. Данное преобразование вычисляется в z-пространстве на единичной сфере.
Рассмотрена аппроксимация дискретно-пространственного преобразования Фурье, основанная на двумерном дискретном преобразовании Фурье дополненного нулями сигнала.
Дан системный анализ постулатов теории дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье. Приведены методы и алгоритмы получения двумерной линейной свертки и двумерной линейной корреляции с помощью циклической свертки на основе циклической свертки и циклической корреляционной функции. Приведены результаты численного моделирования, подтверждающие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: двумерный сигнал, опорная область, двумерное дискретное преобразование Фурье, двумерное дискретно – пространственное преобразование Фурье, двумерная свертка, двумерная корреляционная функция, операция дополнения нулями.

Введение

Переход от одномерной (1-D) к двумерной (2-D) Фурье – обработке требует переосмысления многих понятий и определений 1-D цифровой обработки сигналов (ЦОС) [1-30]. Это с одной стороны объясняется существенными различиями в теориях 1-D и 2-D линейных систем. С другой стороны, необходимость переосмысления связана с тем, что переход от 1-D к 2-D обработке в базисах Фурье сигналов является не только количественным, но и в существенной степени качественным переходом. Среди понятий и определений 1-D ЦОС, которые требуют переформулирования при переходе к 2-D ЦОС такие как: свертка, корреляция, эффекты наложения, частокола, утечки. Операция дополнения исходного сигнала нулевыми отсчетами в 1-D Фурье – обработке, которая является эффективным и результативным методом детализации оценки спектра финитных, дискретных, одномерных сигналов[1], также не является исключением.

Целью данной работы является системный анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье, оценка роли и места в данной теории операции дополнения нулями.

[1] ***Финитным дискретным сигналом*** называют сигнал $x(n)$, определенный при целочисленных значениях n, при $-\infty \le n \le +\infty$ и отличный от нуля на интервале длительностью в N отсчетов.

Анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье

Финитной дискретной 2-D последовательности

$x(n_1,n_2)$; $n_1=\overline{0,N_1-1},\ n_2=\overline{0,N_2-1}$; (1)

с прямоугольной опорной областью $SA_{N_1\times N_2}$:

$$SA_{N_1\times N_2}:=\left\{(n_1,n_2):n_1=\overline{0,N_1-1},\ n_2=\overline{0,N_2-1}\right\}; \quad (2)$$

можно поставить в соответствие двумерную периодическую последовательность $x_p(n_1,n_2)$ с фундаментальным периодом $SA_{N_1\times N_2}$ [2]:

$$x_p(n_1,n_2)=x(n_1+l_1\cdot N_1,\ n_2+l_2\cdot N_2);\quad l_1,l_2-\text{целые числа.} \quad (3)$$

В силу того, что 2-D ДПФ $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ дискретной 2-D последовательности $x(n_1,n_2)$ определяется соотношением:

$$S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)=\frac{1}{N_1\cdot N_2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x(n_1,n_2)W_{N_1}^{k_1n_1}\cdot W_{N_2}^{k_2n_2}; \quad (4)$$

где $W_{N_1}^{k_1n_1}=\exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N_1}k_1n_1\right)$; $W_{N_2}^{k_2n_2}=\exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right)$;

то спектру $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$ можно поставить в соответствии 2-D последовательность $S_{p,\,N_1,N_2}(k_1,k_2)$ с фундаментальный периодом $SA_{N_1\times N_2}$:

$$S_{p,\,N_1,N_2}(k_1,k_2)=S_{N_1,N_2}(k_1+l_1\cdot N_1,\ k_2+l_2\cdot N_2);\quad l_1,l_2-\text{целые числа.} \quad (5)$$

В теории цифровой Фурье – обработки 1-D дискретных сигналов широкое применение нашло ***дискретно-временное преобразование Фурье*** (ДВПФ). ДВПФ – это z-преобразование, вычисленное в z-плоскости на единичной окружности.

В двумерном случае можно ввести аналогичное ДВПФ преобразование – ***дискретно-пространственное преобразование Фурье*** (ДППФ). ДППФ – это двумерное z-преобразование, вычисленное в z-пространстве на единичной сфере:

$$X_{ДППФ}(f_1,f_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(m,n)\cdot z_1^{-m}z_2^{-n}\Bigg|_{\substack{z_1=\exp(+j2\pi f_1)\\ z_2=\exp(+j2\pi f_2)}}; \quad (6)$$

где f_1 и f_2 непрерывные пространственные частоты.

Сравнивая соотношения (4) и (6) несложно установить, что двумерное ДПФ сигнала $x(n_1,n_2)$ равно двумерному ДППФ, вычисленному на единичной сфере в точках $\exp(-j2\pi k_1/N_1)$ и $\exp(-j2\pi k_2/N_2)$.

Отметим, что ДВПФ и ДППФ представляют собой соответственно непрерывные преобразования дискретных 1-D и 2-D последовательностей и являются чисто теоретическими понятиями одномерной теории и двумерной теории цифровой Фурье – обработки.

[2] **Фундаментальный период** $SA_{N_1\times N_2}$ определяется соответственно вертикальным и горизонтальным периодами N_1 и N_2.

ДППФ финитного дискретного сигнала (1) с фундаментальным периодом $SA_{N_1\times N_2}$ может быть аппроксимировано с помощью операции дополнения нулями путем вычисления 2-D ДПФ сигнала $x_1(m,n)$ с фундаментальным периодом $SA_{L_1\times L_2}$ размерностью $L_1\times L_2$:

$$x_1(m,n)=\begin{cases}x(m,n);\ m=\overline{0,N_1-1};\ n=\overline{0,N_2-1}\\ 0;\ m=\overline{N_1,\ L_1-1};\ n=\overline{N_2,\ L_2-1}\end{cases}. \quad (7)$$

Анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье позволяет сделать следующие важные выводы.

Двумерное дискретное преобразование Фурье следует понимать как двумерный дискретный ряд Фурье, из свойств которого во многом вытекают свойства 2-D ДПФ.

Свойства двумерного ДПФ (как и свойства одномерного ДПФ) являются математически точными, и не могут трактоваться как аппроксимация свойств непрерывного преобразования Фурье (НПФ). В то же время одномерное и двумерное ДПФ конечной последовательности могут рассматриваться как аппроксимации соответствующих НПФ.

Теория двумерной обработки дискретных сигналов на основе двумерного дискретного преобразования Фурье является теорией двумерной Фурье - обработки финитных двумерных дискретных сигналов.

Проведенный анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов позволил сформулировать следующие основополагающие и взаимоувязанные ее аксиоматические положения (постулаты):

Определение двумерных дискретных сигналов на конечной опорной области – фундаментальном периоде, задаваемом вертикальным и горизонтальным периодами.

Определение сдвига двумерного дискретного сигнала как циклического сдвига в виде циклической перестановки его отсчетов на конечной опорной области. Принцип двумерной циклической перестановки отсчетов сигнала на конечной опорной области заключается в следующем: если справа или сверху отсчет 2-D сигнала «вышел», то этот отсчет 2-D сигнала соответственно слева или снизу «зашел». Циклическая перестановка пространственных и пространственно-частотных отсчетов двумерного дискретного сигнала, может быть представлена периодическим продолжением его отсчетов (с фундаментальным периодом) за пределами опорной области. Циклическая перестановка пространственных и пространственно-частотных отсчетов двумерного дискретного сигнала может быть также представлена пространственными и пространственно-частотными отсчетами, расположенными на единичной сфере в соответствующей области.

Определение полной базисной системы 2-D ДПФ в виде системы двумерных дискретных экспоненциальных функций.

Отметим, что ***конечность, периодичность и дискретность*** последовательностей в пространственной или пространственно-частотной области приводит к появлению новых свойств как 1-D ДПФ так и 2-D ДПФ, которые отсутствуют в непрерывных преобразованиях Фурье. Конечность, периодичность и дискретность последовательностей в пространственной и пространственно-частотной области приводит также к видоизменению некоторых понятий Фурье – обработки непрерывных сигналов (например, видоизменению таких понятий как сдвиг, свертка и корреляция).В непрерывном случае понятие линейного сдвига двумерного сигнала $x(t_1,t_2)$ в пространственной области (как и одномерного во временной области) особого пояснения не требует, поскольку соответствует интуитивному пониманию сдвига. Введем в рассмотрение еще одно математическое определение циклического сдвига дискретного сигнала $x(n_1,n_2)$ при изменении переменных $n_1 \geq N_1$ и $n_2 \geq N_2$:

$$x(n_1,n_2) = x(((n_1))_{\text{mod}\,N_1},((n_2))_{\text{mod}_{N_2}}); \quad (n_1,n_2) \in SA_{N_1\times N_2}; \tag{8}$$

где $((n))_{\text{mod}\,N}$ – символ взятия числа по модулю N[3].

Если 2-D ДПФ сигнала $x(n_1,n_2)$ равно – $S_{N_1,N_2}(k_1,k_2)$:

$$x(n_1,n_2) \xleftrightarrow{F} S_{N_1,N_2}(k_1,k_2); \tag{9}$$

то 2-D ДПФ сигнала $x(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1}),((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2}$ умножается на двумерную экспоненту:

$$x(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1}),((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2} \xleftrightarrow{F} W_{N_1}^{p_1k_1}\cdot W_{N_2}^{p_2k_2}\, S_{N_1,N_2}(k_1,k_2). \tag{10}$$

Известно, что если:

$x(n_1,\ n_2) \xrightarrow{F} S_{N_1,N_2}(k_1,\ k_2)$, и $y(n_1,n_2) \xrightarrow{F} Y_{N_1,N_2}(k_1,\ k_2)$

то:

$$x(n_1,\ n_2) * y(n_1,n_2) \xrightarrow{F} S_{N_1,N_2}(k_1,\ k_2)\cdot Y_{N_1,N_2}(k_1,\ k_2); \tag{11}$$

где * – символ свертки.

Выражение (11) задает так называемую циклическую свертку $h(n_1,n_2)$ двух 2-D сигналов $x(n_1,\ n_2)$ и $y(n_1,\ n_2)$ в пространственной области:

$$h(n_1,n_2) = \sum_{p_1}^{N_1-1}\sum_{p_2}^{N_2} x(p_1,p_2)\cdot y(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1},((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2}); \tag{12}$$

$(n_1,n_2) \in SA_{N_1\times N_2}$;

или:

$$h(n_1,n_2) = \sum_{p_1}^{N_1-1}\sum_{p_2}^{N_2} y(p_1,p_2)\cdot x(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1},((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2});. \tag{13}$$

$(n_1,n_2) \in SA_{N_1\times N_2}$.

Циклическая 2-D корреляционная функция определяется следующими соотношениями:

$$c(n,n_2) = x(n_1,\ n_2) * x(n_1,n_2) \xrightarrow{F} \left|S_{N_1,N_2}(k_1,\ k_2)\right|^2; \tag{14}$$

$$c(n_1,n_2) = \sum_{p_1}^{N_1-1}\sum_{p_2}^{N_2} x(p_1,p_2)\cdot x(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1},((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2}); \tag{15}$$

$(n_1,n_2) \in SA_{N_1\times N_2}$;

или:

$$c(n_1,n_2) = \sum_{p_1}^{N_1-1}\sum_{p_2}^{N_2} x(p_1,p_2)\cdot x(((n_1-p_1))_{\text{mod}\,N_1},((n_2-p_2))_{\text{mod}\,N_2}); \tag{16}$$

$(n_1,n_2) \in SA_{N_1\times N_2}$.

В то же время при разработке и моделировании изопланатических систем, Фурье – обработке 2-D сигналов, необходима линейная 2-D свертка (линейная 2-D корреляционная функция).

Метод, позволяющий с помощью 2-D циклической свертки (2-D циклической корреляционной функции) получить линейную 2-D свертку (2-D корреляционную функцию), как отмечалось выше, заключается в устранении наложения 2-D сигналов в корреляционной области путем соответствующего дополнения сворачиваемых дискретных сигналов нулевыми отсчетами в их опорных областях.

Если задана опорная область $SA_{V_1\times V_2}$ сигнала $x(n_1,n_2)$ и опорная область $SA_{Q_1\times Q_2}$ сигнала $y(n_1,n_2)$, то размер опорной области (фундаментального периода) для получения линейной свертки $h_{лин}(n_1,n_2)$ должен быть:

$$SA_{(V_1+Q_1)\times(V_2+Q_2)}; \tag{17}$$

где $n_1 = \overline{0,(V_1+Q_1-1)}$; $n_2 = \overline{0,(V_2+Q_2-1)}$.

А размер опорной области для получения линейной корреляции сигнала $x(n_1,n_2)$ должен быть:

$$SA_{2V_1\times 2V_2};\ \text{где}\ n_1 = \overline{0,(2V_1-1)};\ n_2 = \overline{0,(2V_2-1)}. \tag{18}$$

Следовательно, алгоритм получения 2-D линейной свертки на основе 2-D циклической свертки состоит из следующих операций.

Алгоритм получения 2-D линейной свертки на основе 2-D циклической свертки

1. Дополнить 2-D сигналы $x(n_1,n_2)$ и $y(n_1,n_2)$ соответственно Q_1, Q_2 и V_1, V_2 нулевыми отсчетами, задав, таким образом, новые 2-D сигналы $x_0(n_1,n_2)$ и $y_0(n_1,n_2)$ с горизонтальными N_2 и вертикальными N_1 периодами согласно соотношениям:

$$N_1 \geq (V_1+Q_1-1);\ N_2 \geq (V_2+Q_2-1). \tag{19}$$

2. Выполнить 2-D ДПФ двумерных сигналов $x_0(n_1,n_2)$ и $y_0(n_1,n_2)$:

$$x_0(n_1,\ n_2) \xrightarrow{F} X_{0,N_1,N_2}(k_1,\ k_2); \quad y_0(n_1,\ n_2) \xrightarrow{F} Y_{0,N_1,N_2}(k_1,\ k_2). \tag{20}$$

3. Выполнить 2-D ОДПФ произведения

$$X_{0,N_1,N_2}(k_1,\ k_2)\cdot Y_{0,N_1,N_2}(k_1,\ k_2). \tag{21}$$

Алгоритм получения линейной 2-D корреляционной функции на основе циклической 2-D корреляционной

[3] **Каждое целое число** k можно представить в виде суммы $k = entire(k/m) + ((k))_{\text{mod}\,m}$, где *entire* (анг. *floor*) – символ взятия целой части числа k, m – положительное число, называемое модулем, $((k))_{\text{mod}\,m}$ – остаток.

функции аналогичен предыдущему алгоритму. Если задана опорная область $SA_{N_1 \times N_2}$ сигнала $x(n_1, n_2)$, то размер опорной области (фундаментального периода) для получения линейной корреляционной функции $c_{лин}(n_1, n_2)$ должен быть:

$$SA_{2N_1 \times 2N_2}\text{; где } n_1 = \overline{0, 2N_1 - 1}\text{; } n_2 = \overline{0, 2N_2 - 1}. \quad (22)$$

Для получения 2-D линейной корреляционной функции на основе 2-D циклической корреляционной функции необходимо выполнить следующие операции.

Алгоритм получения 2-D корреляционной функции на основе 2-D циклической корреляционной функции

1. Дополнить 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ соответственно N_1, N_2 нулевыми отсчетами, создав, таким образом, новый 2-D сигнал $x_0(n_1, n_2)$ с горизонтальным $2N_2$ и вертикальным $2N_1$ периодами.

2. Выполнить 2-D ДПФ двумерного сигнала $x_0(n_1, n_2)$:

$$x_0(n_1,\ n_2) \xrightarrow{F} X_{0,\, N_1, N_2}(k_1,\ k_2)\,; \quad (23)$$

3. Выполнить 2-D обратное ДПФ произведения

$$X_{0,\, N_1, N_2}(k_1,\ k_2) \cdot X_{0 N_1, N_2}(k_1,\ k_2)\,. \quad (24)$$

Проведем сравнение линейной и циклической корреляционных функций на примере дискретного, финитного, единичного 2-D сигнала $x\ (n_1, n_2)$:

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1;\ \forall\ n_1 = \overline{0, N_1 - 1};\ \forall\, n_2 = \overline{0, N_2 - 1} \\ 0;\ \forall\ \ n_1 \ge N_1; \forall\ n_2 \ge N_2 \end{cases};$$

при $N_1 = N_2 = 4$;
$$x(n_1, n_2) = \begin{array}{c|cccc|l} & 0 & 1 & 2 & 3 & n_2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline n_1 & & & & & \end{array}\,. \quad (25)$$

Циклическая 2-D корреляционная функция дискретного, финитного, единичного 2-D сигнала (25), вычисленная согласно формуле (14), в графической форме приведена на рис. 1.

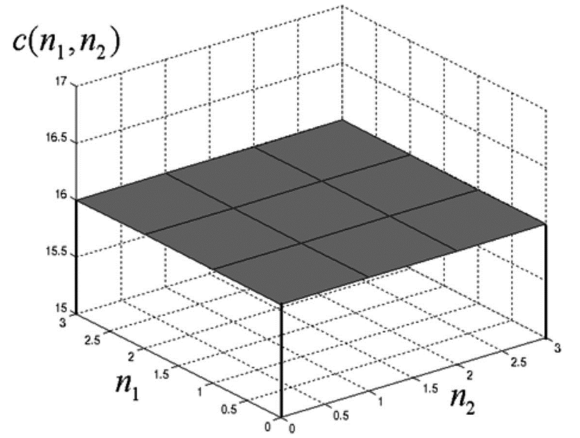

Рис. 1. Циклическая 2-D корреляционная функция дискретного, финитного, единичного 2-D сигнала (25)

Применим выше рассмотренный алгоритм получения линейной 2-D корреляционной функции на основе циклической 2-D корреляционной функции. Дополним дискретный, финитный, единичный 2-D сигнал (25) нулевыми отсчетами:

$$x_0(n_1, n_2) = \begin{array}{c|cccccccc|l} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n_2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline n_1 & & & & & & & & & \end{array}\,. \quad (26)$$

Линейная 2-D корреляционная функция сигнала $x_0(n_1, n_2)$ в матричной форме, вычисленная согласно формуле (24), равна:

$$c_0(n_1, n_2) = \begin{array}{c|cccccccc|l} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n_2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & \\ 2 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 & 0 & \\ 3 & 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 & 0 & \\ 4 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 & 0 & \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline n_1 & & & & & & & & & \end{array}\,. \quad (27)$$

Линейная 2-D корреляционная функция сигнала $x_0(n_1, n_2)$ в графической форме приведена на рис. 2:

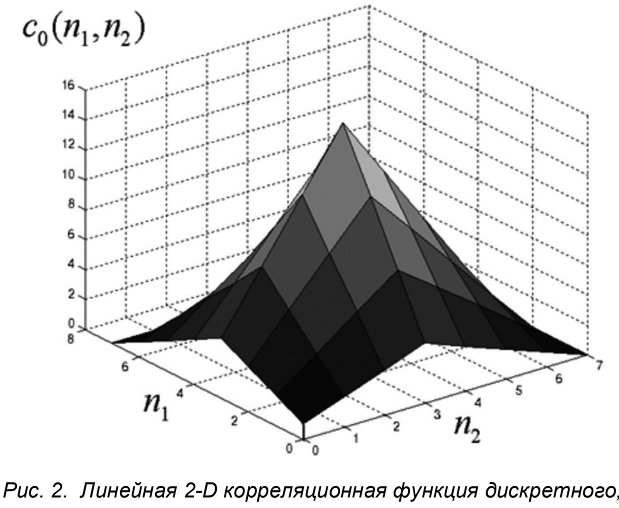

Рис. 2. Линейная 2-D корреляционная функция дискретного, финитного, единичного 2-D сигнала (25)

В заключение отметим, что в двумерном случае возможны три варианта детализации 2-D спектра дискретного, финитного 2-D сигнала – по числу вариантов дополнения опорной области нулевыми отсчетами. Если задан в матричной форме 2-D сигнал $X_{N_1 \times N_2}$ и задан в матричной форме 2-D сигнал с нулевыми отсчетами $O_{N_1 \times N_2}$:

$$X_{N_1 \times N_2} = \tag{28}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & (N_2-1) & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} x(0,0) & x(0,1) & . & . & x(0,N_2-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & . & . & x(1,N_2-1) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & . & . & x(N_1-1),(N_2-1) \end{array} \right] \\ \\ \end{array} ;$$

$$O_{N_1 \times N_2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (N_1-1) \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & (N_2-1) & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{array} \right] \\ \\ \end{array} ; \tag{29}$$

где $o(m,n) = 0 : \forall\ m = \overline{0, N_1 - 1};\ n = \overline{0, N_2 - 1}$.

Тогда возможно три варианта расширения опорной области 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ нулевыми отсчетами:

Вариант 1. Дополнение вертикального периода 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ $(r_1 - 1)$ нулевыми матрицами приводит к блочной матрице:

$$X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r_1-1) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \left[\begin{array}{c} X_{N_1 \times N_2} \\ O_{N_1 \times N_2} \\ . \\ . \\ O_{N_1 \times N_2} \end{array} \right] \end{array} . \tag{30}$$

Вариант 2. Дополнение горизонтального периода 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ $(r_2 - 1)$ нулевыми матрицами приводит к блочной матрице:

$$X_{N_1 \times N_2 \cdot r_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r_2-1) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} X_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . & . & O_{N_1 \times N_2} \end{array} \right] \end{array} . \tag{31}$$

Вариант 3. Дополнение $(r_1 - 1)$ нулевыми матрицами вертикального и $(r_2 - 1)$ горизонтального периодов 2-D сигнала $X_{N_1 \times N_2}$ приводит к блочной матрице:

$$X_{N_1 \cdot r_1 \times N_2 \cdot r_2} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ (r_1-1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (r_2-1) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} X_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . & . & O_{N_1 \times N_2} \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . & . & O_{N_1 \times N_2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & . & . & O_{N_1 \times N_2} \end{array} \right] \end{array} . \tag{32}$$

Двумя существенными недостатками методов, основанных на операции дополнения сигнала в пространственной области нулевыми отсчетами, являются необходимость существенного увеличения объема памяти и необходимость проведения значительного числа непроизводительных вычислений с нулевыми отсчетами.

Заключение

Проведенный анализ роли и места операции дополнения нулями в теории двумерной Фурье-обработки сигналов позволяет сделать следующие выводы.

1. Системный анализ теоретических основ дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье позволяет утверждать, что свойства двумерного дискретного преобразования Фурье являются математически точными и не основаны на аппроксимации свойств непрерывного преобразования Фурье.

2. Теория двумерной обработки дискретных сигналов на основе двумерного дискретного преобразования Фурье является теорией двумерной Фурье – обработки финитных двумерных дискретных сигналов, основанной на трех основополагающих и взаимоувязанных аксиоматических положениях: определение конечной опорной области, определении сдвига двумерного дискретного сигнала и определении полной базисной системы в виде системы двумерных дискретных экспоненциальных функций.

3. Операция дополнения двумерного сигнала нулевыми отсчетами играет важнейшую роль в теории дискретной двумерной обработки сигналов на базе преобразований Фурье, поскольку позволяет разрешить многие проблемы Фурье – обработки и, как следствие, расширить спектр предметных областей приложения данной теории.

4. Операция дополнения двумерного сигнала нулевыми отсчетами является методом аппроксимации двумерного дискретно – пространственного преобразования Фурье, введенного в данной работе.

5. Операция дополнения двумерного сигнала нулевыми отсчетами в два раза позволяет находить с помощью циклической свертки и циклической корреляционной функции соответственно линейную свертку и линейную корреляционную функцию.

6. Дополнение двумерного сигнала нулевыми отсчетами более чем в два раза позволяет значительно детальнее анализировать 2-D энергетический спектр дискретного сигнала, опираясь на двумерный вариант теоремы Винера-Хинчина и двумерное дискретное преобразование Фурье.

7. Необходим поиск эффективных и результативных методов и алгоритмов Фурье – обработки дискретных, двумерных, финитных, дополненных нулевыми отсчетами.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Перевод с англ. – М.: Мир. 1978. – 839 с.

2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

3. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018.–1168 pages.

4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1983. – 790 с.

5. Смирнова Н.В., Пономарева О.В. Векторная и

спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов, 2019. – № 2. – С. 3-11.

6. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17.-№ 2. – С. 81-87.

7. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов, 2019. – № 2. – С. 12-20.

8. Пономарев В.А, Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2014. – № 1. – С. 15-22.

9. Пономарев В.А, Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии, 2014. – № 15. – С.183-184.

10. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Формализованное описание погрешности измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии, 2013. № 14. – С. 90-93.

11. Пономарева Н.В., Пономарева О.В., Хворенков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 33-40.

12. Пономарев В.А., Пономарева О.В Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // Метрология. 2017. – № 1. – С. 20-32.

13. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии, 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 121-124.

14. Пономарева Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 26-33.

15. Пономарева Н.В. Цифровая спектральная обработка сигналов в музыкальной акустике // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. – Т. 8. – № 2. – С. 37-42.

16. Пономарев В.А., Пономарева Н.В. Метод и алгоритм выделения музыкально-акустического сигнала из его смеси со случайным дискретным телеграфным сигналом. В сборнике: Перспективные информационные технологии (ПИТ 2018). Труды Международной научно-технической конференции. Под ред. С.А. Прохорова. 2018. – С. 161-164.

17. Пономарева Н.В. Предобработка дискретных сигналов при спектральном анализе в системе компьютерной математики MATLAB // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. – № 4(31). – С. 32-34.

18. Пономарев В.А., Пономарева Н.В. Цифровой спектрально-временной анализ музыкально-акустических сигналов на основе параметрического дискретного преобразования Фурье// В сборнике: Приборостроение в XXI веке 2017. Интеграция науки, образования и производства. Сборник материалов XIII Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2018. – С. 307-312.

19. Пономарева Н.В., Пономарев В.В. Метод быстрого получения прореженных коэффициентов дискретного преобразования Фурье на основе параметрических дискретных экспоненциальных базисов // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. – Т. 7.-№ 1. – С. 172-177.

20. Пономарева Н.В, Пономарева В.Ю. Локализация спектральных пиков методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. – № 2(29). – С. 15-18.

21. Пономарева Н.В, Пономарева В.Ю. Метод измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования Фурье // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. – Т. 6. – № 2. – С. 393-397.

22. Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романеев А.Е. Аппроксимационный подход к решению задач анализа и интерпретации экспериментальных данных // Вестник Самарского государственного университета. Серия: Технические науки. 2006.-№40.-С.57-65.

23. Батищев В.И., Мелентьев В.С. Измерительно-моделирующий подход к определению интегральных характеристик периодических сигналов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. – №6. – С.36-39.

24. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений // Автометрия.2017. – Т. 53. – № 4. – С. 127-134.

25. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Исследование аппроксимационных свойств функциональных базисов в задачах реконструкции изображений при дистанционном зондировании земли // В сб.: Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XVIII Международной конференции. Под ред.: Е.А. Федосова, Н.А. Кузнецова, В.А. Виттиха. 2016. – С. 304-307.

26. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem // Signal Processing. 2015. – Т. 108. – С. 25-29.

27. Прохоров С.А., Графкин В.В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов. Самара, 2010.

28. Прозоров Д.Е., Петров Е.П. Быстрый поиск шумоподобных сигналов. Под ред. Е.П. Петрова. Киров, 2006.

29. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. – 406 p.

30. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. – 1168 p.

31. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. – 790 с.

32. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis // Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control. Editor: Margarita Favorskaya, Lakmi C. Jain. // Springer. – 2020.

Всероссийская конференция

«СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ» (СТОС-2021)

27 октября – 29 октября 2021 г. Москва

All-Russian conference
«MODERN TECHNOLOGIES OF SIGNAL PROCESSING» (STOS-2021)

Уважаемые коллеги!

ПРИГЛАШАЕМ ВАС ПРИНЯТЬ УЧАСТИЕ В РАБОТЕ КОНФЕРЕНЦИИ

ОРГАНИЗАТОРЫ:

- Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
- Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова
- Министерство образования и науки Российской Федерации
- Московский технический университет связи и информатики

ПРИ УЧАСТИИ:

- Федеральное агентство по промышленности РФ
- ОАО «Концерн радиостроения «Вега»
- ОАО «Концерн «Созвездие»
- ФГУП «НИИР»
- Владимирский государственный университет
- Московский авиационный институт
- Балтийский федеральный университет им. И. Канта
- Военная академия РВСН им. Петра Великого
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
- Московский энергетический институт
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. А.М. Бонч-Бруевича
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
- Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
- Тульский государственный университет
- Ульяновский государственный технический университет
- Ярославский государственный университет

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: академик РАН **Гуляев Юрий Васильевич**
Заместитель Председателя: академик РАН **Фёдоров И.Б.**
Члены комитета:
академик РАН **Бугаев А.С.,** член-корр. РАН **Зубарев Ю.Б.,**
академик РАН **Каляев И.А.**

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

Председатель: член-корреспондент РАН **Черепенин Владимир Алексеевич**
Заместитель Председателя: д.т.н., проф. **Витязев Владимир Викторович**
Сопредседатели: д.т.н., проф. **Аджемов А.С.,** д.т.н., проф. **Цимбал В.А.**
Члены Оргкомитета:
доц. Алёшин В.С., проф. Акиншин Н.С., проф. Брюханов Ю.А., проф. Васильев К.К., проф. Калошин В.А., проф. Мамон Ю.И., проф. Митрофанов Д.Г., проф. Пахотин В.А., проф. Постников И.И., доц. Самсонов Г.А., проф. Сперанский В.С., проф. Степанов С.Н., проф. Чиров Д.С., проф. Ямпурин Н.П.

Организация работы в форме пленарных и проблемно-тематических заседаний. Пленарные доклады будут представлены по основным направлениям работы Конференции. Доклады, включенные в Программу конференции, будут опубликованы в **Сборниках докладов Конференции** к началу её работы. По опыту прошедших конференций, мероприятие оказалось очень эффективным местом общения для всех участников мероприятия: представителей науки и производства, заказчиков и разработчиков, потребителей и поставщиков, преподавателей и студентов, работодателей и соискателей, научно-технических издательств и читателей.