

# ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Научно-технический журнал  
№ 2/2020

Издается с 1999 года  
Выходит четыре раза в год

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**  
д.т.н., чл. кор. РАН Ю.Б. ЗУБАРЕВ

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

д.т.н., проф. В.В. ВИТЯЗЕВ,  
д.т.н., проф. **В.П. ДВОРКОВИЧ**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

д.т.н., проф. Ар.С. Аджемов, д.т.н., проф. Б.А. Алпатов,  
д.т.н., проф. В.Г. Бартенев, д.т.н. Ю.И. Борисов,  
д.т.н., проф. Ю.А. Брюханов, д.т.н., член-корр. РАН  
А.В. Дворкович, д.т.н., профессор В.И. Джиган,  
д.т.н., проф. В.В. Еремеев, д.т.н. Г.В. Зайцев,  
Р.В. Зубарев, А.П. Кирпичников,  
д.т.н., акад. РАН Н.А. Кузнецов,  
В.Г. Мистюков, д.т.н., проф. С.Л. Мишенков,  
д.т.н., проф. Ю.Н. Прохоров,  
д.т.н. А.Л. Приоров, д.т.н., проф. В.Г. Санников,  
к.т.н., проф. В.С. Сперанский, д.т.н., проф. **Ю.С. Шинаков**

## Адрес редакции:

г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 8  
Научный центр МТУСИ  
Тел.: (+7) 903-201-53-33  
E-mail: rntores@mail.ru  
vityazev.v.v@rsreu.ru  
http://www.dspsa.ru

## Издатель:

Российское научно-техническое общество  
радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова  
Компьютерная верстка: И.А. Благодарова  
Дизайн: М.В. Аверин

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – **82185**

Подписано в печать 10.06.20 г.  
Формат 60х90/8.

Гарнитура «Arial». Печать офсетная.  
Бумага офсетная. Печ.л. 6,5. Тираж 250 экз.

Заказ № 2463. Отпечатано в  
ООО НПЦ «Информационные технологии»  
Рязань, ул. Островского, д. 21/1  
тел.: (4912) 98-69-84

Издание зарегистрировано в Министерстве  
Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1488  
от 14.01.2000 г.

Журнал «Цифровая обработка сигналов» включен  
в Перечень ведущих рецензируемых научных изданий,  
в которых по рекомендации Минобрнауки РФ, должны  
быть опубликованы основные научные результаты  
диссертаций на соискание ученой степени доктора  
и кандидата наук.

## УЧРЕДИТЕЛИ:

АО «Инструментальные системы»  
ФГУП «НИИ радио»

## В НОМЕРЕ:

### Джиган В.И.

Особенности применения RLS-алгоритмов адаптивной  
фильтрации в эквалайзерах с дробной задержкой..... 3

### Вашкевич М.И., Азаров И.С.

Сравнение частотно-временных преобразований:  
Фурье анализ, вейвлеты и банки фильтров  
на основе фазового преобразования..... 13

### Быховский М.А.

Эффективные методы передачи сигналов  
в спутниковых системах связи..... 27

### Киселева Т.П.

Алгоритм синхронизации сотовой базовой станции  
с мобильным пользователем по корреляционной функции  
первичного синхросигнала в технологии LTE..... 34

### Кузьмин Е.В.

О влиянии квантования по уровню на эффективность  
процедуры поиска шумоподобного сигнала по задержке  
на фоне шума и гармонической помехи..... 41

### Мингазин А.Т.

Трехмерная графика в задаче анализа  
квантованных КИХ-фильтров ..... 46

### Стефаниди А.Ф., Приоров А.Л., Топников А.И., Хрящев В.В.

Применение сверточных нейронных сетей  
в задаче мультимодальной идентификации..... 52

Подписной индекс по каталогу  
ОАО «Роспечать» – **82185**

# Digital Signal Processing

Science & Technical Magazine  
Issue 2, 2020 year

Is published quarterly since 1999

## THE EDITOR-IN-CHIEF:

Dr.Sci. (Tech.), Professor, Corresponding Member  
of Russian Academy of Sciences U.N. Zubarev

## DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:

Dr.Sci.(Tech.), Professor V.V. Vityazev, Dr.Sci.(Tech.),  
Professor V.P. Dvorkovich

## EDITORIAL BOARD:

Adzhemov A.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Alpatov B.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Bartenev V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Borisov Y.I., Dr.Sci.(Tech.)  
Bruchanov Y.A., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Dvorkovich A.V. Dr. Sci (Tech), Professor  
Corresponding Member of RAS  
Djigan V.I., Dr. Sci (Tech), Professor  
Eremeyev V.V., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Zaitsev G.V., Dr.Sci.(Tech.)  
Zubarev R.V.,  
Kirpichnikov A.P.,  
Kuznetsov N.A., Dr.Sci.(Tech.), Academician  
Mistyukov V.G.,  
Mishenkov S.L., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Priorov A.L., Dr. Sci (Tech)  
Prokhorov Y.N., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Sannikov V.G., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Speranskii V.S., Dr.Sci.(Tech.), Professor  
Shinakov Y.S. Dr.Sci.(Tech.), Professor

## Editorial office address:

Aviamotornaya, 8, Moscow, Russia  
Research Center of MTUCI  
Phone: (+7) 903-201-53-33  
E-mail: rntores@mail.ru,  
vityazev.v.v@rsreu.ru  
Web: http://www.dsps.ru

## Publisher:

Russian A.S. Popov Society for Radioengineering,  
Electronics & Communications

## Computer makeup:

I.A. Blagodarova

## FOUNDERS: InSys

Radio Research and Development Institute

## CONTENTS:

### Djigan V.I.

*Peculiarities of RLS adaptive filtering algorithms application  
in fractionally spaced equalizers.....*3

### Vashkevich M.I., Azarov I.S.

*Comparison of time-frequency transforms: Fourier analysis,  
wavelets and allpass transformed filter banks .....*13

### Bykhovskiy M.A.

*Effective signal transmission methods  
in satellite communications systems .....*27

### Kiseleva T.P.

*Algorithm for synchronizing a cellular base station with  
a mobile user based on the correlation function  
of the primary sync signal in LTE technology.....*

### Kuzmin E.V.

*Efficiency of the spread spectrum signal searching procedure  
in case of continuous wave interference and quantization effect.....*41

### Mingazin A.T.

*Three-dimensional graphics in analysis problem  
of quantized fir filters .....*46

### Stefanidi A.F., Priorov A.L., Topnikov A.I., Hryashev V.V.

*The problem of personality recognition using facial images  
and audio signals with speech recordings .....*52

Subscription index: 82185 ("Rospechat")  
ISSN: 1684-2634 9 771684 263005

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ RLS-АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЭКВАЛАЙЗЕРАХ С ДРОБНОЙ ЗАДЕРЖКОЙ

*Джиган В.И., д.т.н., главный научный сотрудник Института проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук, г. Москва, Россия, e-mail: djigan@ipprt.ru*

### PECULIARITIES OF RLS ADAPTIVE FILTERING ALGORITHMS APPLICATION IN FRACTIONALLY SPACED EQUALIZERS

*Djigan V.I.*

*The paper considers the peculiarities of the fast Recursive Least Squares (RLS) algorithms application in Fractionally Spaced (FS) Feed Forward (FF) and Feed Backward (FB) equalizers. Such equalizers are viewed as the multichannel adaptive filters with unequal number of weights in channels. The architectures and computational procedures of such equalizers, based on four versions of the fast RLS algorithms, are presented. The simulation results demonstrate the proposed equalizer efficiency.*

**Key words:** equalizer, Fractionally Spaced (FS), Feed Forward (FF) equalizer, Feed Backward (FB) equalizer, multichannel adaptive filter, fast Recursive Least Squares (RLS) algorithms, Fast Kalman (FK) algorithm, Fast Transversal Filter (FTF) algorithm, Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) algorithm, stabilized FAEST algorithm.

**Ключевые слова:** эквалайзер, дробная задержка, эквалайзер без обратной связи, эквалайзер с обратной связью, многоканальный адаптивный фильтр, быстрые рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS), быстрый алгоритм Калмана, быстрый трансверсальный фильтр, Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) алгоритм, стабилизированный FAEST алгоритм.

#### Введение

Сегодня адаптивная обработка сигналов [1-5] является сложившимся направлением в современной цифровой обработке сигналов. Ключевыми элементами в адаптивной обработке сигналов являются адаптивные фильтры. Такие фильтры изменяют свои весовые коэффициенты в процессе работы, благодаря чему, они нашли широкое применение в приложениях, где заранее невозможно определить требования к параметрам традиционных фильтров с фиксированными весовыми коэффициентами, так как эти требования могут быть либо не известными, либо меняться в процессе работы. Адаптивные фильтры не требуют предварительного расчета весовых коэффициентов. Эти коэффициенты вычисляются в результате минимизации некоторой функции ошибок между выходным и требуемым сигналами адаптивного фильтра в процессе его работы.

Построение систем радиолокации, навигации, связи и даже бытовой электроники сегодня уже сложно представить без использования адаптивных фильтров [6-9]. Примерами такого использования являются адаптивные антенные и акустические решетки [10]; активные компенсаторы узкополосных акустических шумов [11]; компенсаторы сигналов акустического и электрического эха [12]; компенсаторы нелинейных искажений в усилителях мощности радиопередатчиков [13], а также выравниватели амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) кана-

*Рассматриваются особенности использования быстрых рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов в выравнивателях амплитудно-частотной характеристики каналов связи (эквалайзерах) с дробной задержкой без обратной связи и с обратной связью. Такие эквалайзеры представлены в виде многоканальных адаптивных фильтров с неодинаковым числом весовых коэффициентов в каналах. Представлены архитектуры эквалайзеров и вычислительные процедуры алгоритмов их работы на базе четырех разновидностей быстрых рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов. Приводятся результаты моделирования, демонстрирующие работоспособность и эффективность предлагаемых эквалайзеров.*

лов связи, именуемые эквалайзерами [14].

Большинство беспроводных, проводных, оптических или акустических каналов связи с электрической точки зрения представляют собой фильтры с конечной импульсной характеристикой. АЧХ таких фильтров, как правило, неравномерная, что при передаче цифровых сигналов через канал связи, приводит к их искажениям за счет появления межсимвольной интерференции, мешающей правильному принятию решений при распознавании информационных символов в приемнике [15].

Устройством, решающим задачу выравнивания АЧХ канала связи, является эквалайзер [16-19]. Эквалайзер – это линейный адаптивный фильтр. По архитектуре эквалайзеры бывают без обратной связи (Feed-Forward, FF) и с обратной связью (Feed-Backward, FB). Из них наиболее эффективными являются FB-эквалайзеры [20, 21]. Такие эквалайзеры демонстрируют существенно меньшую среднеквадратичную ошибку в установившемся состоянии, чем FF-эквалайзеры.

Обычно оба типа эквалайзеров работают на символевой скорости (Symbol-Spaced, SS). В этом случае эквалайзеры требуют минимальных ресурсов для их реализации. Однако, дискретизация сигналов с частотой следования информационных символов не удовлетворяет условиям теоремы Котельникова, так как при такой



дискретизации возникает эффект просачивания внеполосного сигнала в полосу основного сигнала, что приводит к его зашумлению. Это не критично, если параметры входного сигнала точно известны. Применительно к эквалайзерам это означает необходимость довольно точной синхронизации по времени принимаемых информационных символов и тактов работы аналогово-цифрового преобразователя, осуществляющего дискретизацию этих символов по времени и квантование полученных отсчетов по уровню.

Указанных недостатков лишены эквалайзеры с дробной задержкой (Fractionally-Spaced, FS) [22, 23]. В таких эквалайзерах входной сигнал дискретизируется на частоте, в несколько раз (обычно целое число) превышающей частоту следования информационных символов. Ценой за качество работы таких эквалайзеров является более высокое требование к вычислительным ресурсам, реализующим эквалайзер, т.к. число весовых коэффициентов FF-части эквалайзера увеличивается кратно увеличению частоты дискретизации его входного сигнала. В FS-эквалайзерах вычисление выходного сигнала, а также его сдвиг в линии задержки FB-части, если такова присутствует, выполняются на частоте следования информационных символов. Обычно FB-эквалайзеры содержат обе части: FF и FB. В рамках настоящей статьи для большей ясности такие эквалайзеры далее обозначаются как FF/FB.

При реализации SS FF- или SS FF/FB-эквалайзеров могут быть использованы соответственно одноканальные или двухканальные адаптивные фильтры, как на базе простых градиентных алгоритмов с линейной арифметической сложностью, так и более сложных алгоритмов, таких как рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS) с квадратичной арифметической сложностью и их быстрые (вычислительно эффективные) версии с линейной арифметической сложностью: быстрый алгоритм Калмана (Fast Kalman, FK), быстрый трансверсальный фильтр (Fast Transversal Filter, FTF), Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) и его стабилизированная версия [4].

Арифметическая сложность при реализации большинства современных алгоритмов цифровой обработки сигналов уже не является существенной проблемой. Благодаря успехам физики полупроводников, микроэлектронных технологий и средств проектирования больших интегральных схем, сегодня промышленностью освоены современные цифровые сигнальные процессоры (ЦСП, Digital Signal Processors, DSP) и программируемые логические схемы (ПЛИС, Field-Programmable Gate Arrays, FPGA), позволяющие быстро и эффективно реализовывать различные алгоритмы цифровой обработки сигналов [24-28]. Эта элементарная база уже позволяет реализовывать адаптивные фильтры на базе не только арифметически простых, но и сложных алгоритмов [29, 30].

Если реализуются FS-эквалайзеры, то в них могут быть использованы указанные выше простые градиентные адаптивные алгоритмы и RLS-алгоритмы с квадратичной вычислительной сложностью, с той лишь

разницей по отношению к SS-эквалайзерам, что сигналы FF-части эквалайзера по-прежнему формируются и сдвигаются в линиях задержки на частоте дискретизации, а сигналы FB-части – на частоте следования информационных символов. Из них формируются векторы обрабатываемых сигналов только на символической скорости и на ней же происходит их обработка с целью вычисления векторов весовых коэффициентов эквалайзера и формирования его выходного сигнала.

Однако такая процедура не применима к быстрым RLS-алгоритмам с линейной вычислительной сложностью, т.к. принцип их работы основан теории линейного предсказания входных сигналов, отсчеты которых следуют с той же скоростью, что и скорость вычисления весовых коэффициентов и выходного сигнала адаптивного фильтра.

В настоящей работе рассматривается решение, позволяющее использовать быстрые RLS-алгоритмы в FS FF- и FS FF/FB-эквалайзерах.

### Архитектуры эквалайзеров

Архитектура SS FF-эквалайзера приведена на рис. 1, а SS FF/FB-эквалайзера – на рис. 2. SS FF-эквалайзер – это одноканальный, а SS FF/FB-эквалайзер – двухканальный адаптивный фильтр. Первый эквалайзер обрабатывает входной сигнал  $x(k_s)$ , поступающий из канала связи, и требуемый сигнал  $d(k_s)$ . Второй эквалайзер обрабатывает эти же сигналы, а также задержанный на длительность одного символа  $z_s^{-1}$  сигнал  $\tilde{y}(k_s)$  с выхода устройства принятия решения о принадлежности выходного сигнала эквалайзера  $y(k_s)$  тому или иному элементу информационного созвездия. В качестве требуемого сигнала  $d(k_s)$  в процессе обучения обычно выступает известная на приемной стороне тренировочная последовательность, предварительно синхронизированная с аналогичной последовательностью, принимаемой из канала связи, а в установившемся состоянии – сигнал с выхода решающего устройства.

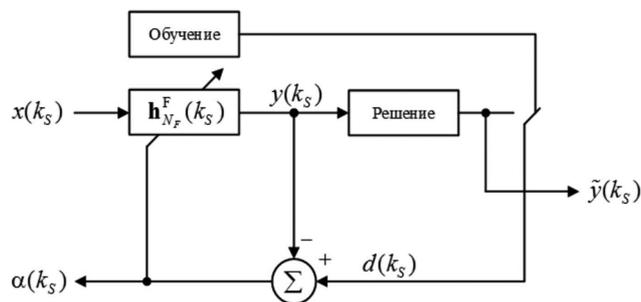


Рис. 1. SS FF-эквалайзер

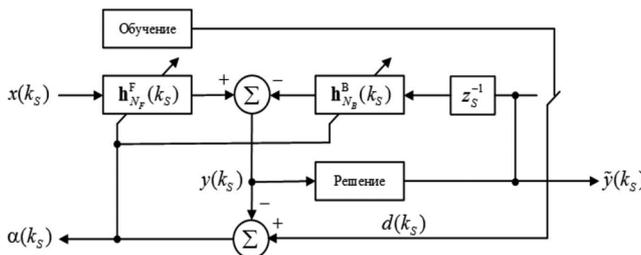


Рис. 2. SS FF/FB-эквалайзер

На рис. 1 и рис. 2,  $k_s$  – номер отсчёта, совпадающий с номером символа, так как отсчёты следуют с частотой принимаемых символов  $F_S$ , т.е.  $F_D = F_S$ , где  $F_D$  – частота дискретизации входного сигнала эквалайзера. Обработка всех обозначенных сигналов осуществляется также на символьной скорости  $F_S$ . Результатом обработки являются векторы весовых коэффициентов  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  в SS FF-эквалайзере. В эквалайзере с обратной связью вычисляются векторы весовых коэффициентов  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  FF-части и весовые коэффициенты  $\mathbf{h}_{N_B}^B(k_S)$  FB-части, которые формируют вектор весовых коэффициентов всего SS FF/FB-эквалайзера  $\mathbf{h}_N(k_S) =$

$= [\mathbf{h}_{N_F}^{FT}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S)]^T$ . С его помощью вычисляется выходной сигнал эквалайзера

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N(k_S), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_N(k_S) = [\mathbf{x}_{N_F}^T(k_S), \mathbf{x}_{N_B}^T(k_S)]^T$  – вектор входных сигналов всего эквалайзера,  $\mathbf{x}_{N_F}(k_S)$  и  $\mathbf{x}_{N_B}(k_S)$  – векторы сигналов его FF- и FB частей, а  $N = N_F + N_B$  – полное число весовых его коэффициентов. В случае SS FF/FB-эквалайзера вычисление векторов  $\mathbf{h}_N(k_S)$  может быть выполнено с помощью любых версий многоканальных (с числом каналов  $M = 2$ ) градиентных адаптивных алгоритмов и RLS-алгоритмов с квадратичной вычислительной сложностью. В случае SS FF-эквалайзера  $\mathbf{x}_N(k_S) = \mathbf{x}_{N_F}(k_S)$  и  $\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$ ,  $N = N_F$  и  $M = 1$ , т.е. для вычисления весовых коэффициентов используется одноканальный адаптивный алгоритм.

Таким образом, по сравнению с FF/FB-эквалайзером в FF-эквалайзере отсутствует ветвь обратной связи, поэтому в статье далее будет рассматриваться в основном лишь FF/FB-эквалайзер, как более сложный. Переход к FF-эквалайзеру осуществляется путем очевидного упрощения FF/FB-эквалайзера. Также в статье в формулах строчными буквами обозначаются скалярные переменные и элементы векторов. Векторы обозначаются жирными строчными буквами. Верхний индекс T обозначает операцию транспонирования вектора, а верхний индекс H – операцию эрмитово сопряжения, т.е. транспонирование вектора и комплексное сопряжение его элементов, обозначаемое символом \*. Нижний индекс N обозначает число элементов в векторе.

В FS-эквалайзерах входной сигнал дискретизируется на частоте  $F_D = L \cdot F_S$ , где  $L$  – это коэффициент пере-дискретизации (обычно целое число), определяемой полосой входного сигнала. В этом случае для вычисления весовых коэффициентов эквалайзера могут быть использованы простые градиентные адаптивные алгоритмы с линейной арифметической сложностью  $O(N)$  или RLS-алгоритмы с квадратичной арифметической сложностью  $O(N^2)$ . Однако, в FS-эквалайзерах не могут быть использованы напрямую вычислительно эф-

фективные быстрые RLS-алгоритмы с линейной арифметической сложностью  $O(N)$ , так как в таких алгоритмах все сигналы должны следовать с одной и той же скоростью [4].

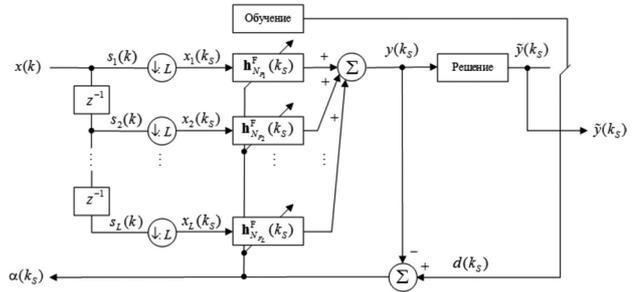


Рис. 3. FS FF-эквалайзер

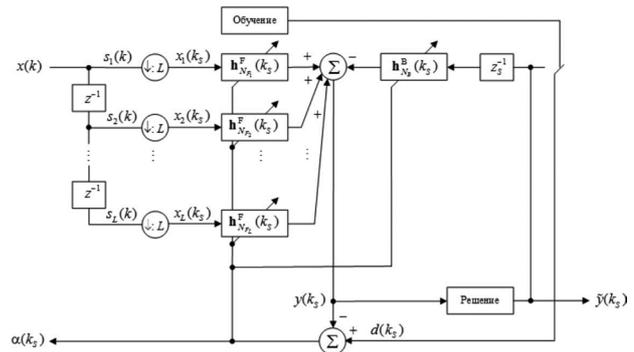


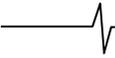
Рис. 4. FS FF/FB-эквалайзер

Для решения этого противоречия предлагается использовать полифазное представление входного сигнала  $x(k)$  (см. рис. 3 и рис. 4), где  $k$  – номера отсчётов этого сигнала, следующих с частотой дискретизации  $F_D$ . Здесь символ  $\downarrow L$  обозначает операцию прореживания (децимации) отсчетов, а символ  $z^{-1}$  – задержку отсчетов сигнала на длительность одного периода частоты дискретизации  $F_D$ .

В этом случае FS FF-эквалайзер уже является не одноканальным, а многоканальным адаптивным фильтром с числом каналов  $M = L$ . При этом FS FF/FB-эквалайзер по-прежнему остается многоканальным, но с числом каналов не  $M = 2$ , а  $M = L + 1$ . В обоих типах эквалайзеров весовые коэффициенты  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  распределяются с прореживанием между  $L$  каналами как  $\mathbf{h}_{N_F,l}^F(k_S)$ , где  $l = 1, 2, \dots, L$ . Если  $N_F$  и  $L$  – четные числа, то все векторы  $\mathbf{h}_{N_F,l}^F(k_S)$  содержат одинаковое число весовых коэффициентов  $N_{F,l} = N_F/L$ . В противном случае значения  $N_{F,l}$  могут быть неодинаковыми.

### Алгоритмы работы эквалайзера

Так как число весовых коэффициентов в каналах FS FF-части эквалайзеров (рис. 3 и рис. 4) в общем случае может быть неодинаковым, а также отличаться от числа весовых коэффициентов FB-части эквалайзера, то для вычисления этих коэффициентов требуются быстрые



версии многоканальных RLS-алгоритмов, в которых имеется возможность использовать неодинаковое число весовых коэффициентов в каждом из каналов.

В качестве таких алгоритмов могут быть использованы многоканальные алгоритмы [4]. Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквалайзера на базе такого FK-алгоритма приведен в табл. 1.

Здесь  $\delta^2$  – параметр задания начальных значений

энергий линейного предсказания  $E^{f(m)}(0)$ ,  $\lambda$  – параметр экспоненциального взвешивания обрабатываемых сигналов, а  $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)}$  и  $\mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$  – перестановочные матрицы [4]. В табл. 1 и далее обозначения типа  $\bullet|_{n_1:n_2}$  указывают на используемые номера элементов вектора.

Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквалайзера на базе FTF-алгоритма приведен в табл. 2.

Таблица 1. FS FF/FB-эквалайзер на основе многоканального FK-алгоритма

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization :</b> $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; <b>create :</b> $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{g}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$	(1.0)
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$\mathbf{s}_L(k) _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) _1 = x(k)$	(1.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(1.2)
<b>if</b> $l = 0$	
$k_s = k_s + 1$	(1.3)
<b>For</b> $l = 1, 2, \dots, L$	
$x_l(k_s) = s_l(k)$ ( <b>decimation</b> )	(1.4)
$\mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _{2:N_{F,l}} = \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _{1:N_{F,l}-1}$ , $\mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _1 = x_l(k_s)$	(1.5)
<b>End for</b> $l$	
$\mathbf{x}_{N_B}(k_s) _{2:N_B} = \mathbf{x}_{N_B}(k_s) _{1:N_B-1}$ , $\mathbf{x}_{N_B}(k_s) _1 = d(k_s - 1)$	(1.6)
$\mathbf{x}_N^{(0)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_{F,1}}^{(1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{F,2}}^{(2)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l+1)T}(k_s),$ $\dots, \mathbf{x}_{N_{F,L}}^{(L)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_B}^T(k_s)]^T = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s), \dots,$ $\mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.7)
$\mathbf{x}_N^{(1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.8)
$\vdots$	
$\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.9)
$\mathbf{x}_N^{(m+1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.10)
$\vdots$	
$\mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.11)
$\mathbf{x}_N^{(M)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s - 1)]^T$	(1.12)
<b>For</b> $m = M, M-1, \dots, 1$	
$\alpha^{f(m)}(k_s) = x_m(k_s) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s)$	(1.13)
$\alpha^{b(m)}(k_s) = x_m(k_s - N_m) - \mathbf{h}_N^{b(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_s)$	(1.14)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_s) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_s - 1) + \mathbf{g}_N^{(m)}(k_s)\alpha^{f(m)*}(k)$	(1.15)
$e^{f(m)}(k_s) = x_m(k_s) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s)$	(1.16)

$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S)$	(1.17)
$\bar{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) \end{bmatrix} \frac{e^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S)}$	(1.18)
$\tilde{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix}$	(1.19)
$\mathbf{g}_N^{(m-1)}(k_S) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) + \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)}{1 - \alpha^{b(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S)}$	(1.20)
$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \mathbf{g}_N^{(m-1)}(k_S) \alpha^{b(m)*}(k_S)$	(1.21)
<b>End for</b> $m$	
$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S)$	(1.22)
$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S)$	(1.23)
$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \mathbf{g}_N^{(0)}(k_S) \alpha^*(k_S) =$	(1.24)
$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{FJ}}^{F(J)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{Fj+1}}^{F(j+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{FL}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T$	(1.25)
$\mathbf{g}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{g}_N^{(0)}(k_S)$	(1.25)
<b>End for</b> $if$	
<b>End for</b> $k$	

Таблица 2. FS FF/FB-эквайзер на основе многоканального FTF-алгоритма

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization</b> : $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $E^{b(m)}(0) = \delta^2 \lambda^{-N_m}$ , $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ;	(2.0)
<b>create</b> : $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{t}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ , $\varphi_N^{(M)}(1) = 1$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ;	
$\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$	
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$\mathbf{s}_L(k) \Big _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) \Big _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) \Big _1 = x(k)$	(2.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(2.2)
<b>if</b> $l = 0$	
$\vdots$	(2.3)...(2.12)
<b>For</b> $m = M, M - 1, \dots, 1$	
$\alpha^{f(m)}(k_S) = x_m(k_S) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m)}(k_S)$	(2.13)
$e^{f(m)}(k_S) = \alpha^{f(m)}(k_S) \varphi_N^{(m)}(k_S)$	(2.14)
$\bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) \end{bmatrix} \frac{\alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(2.15)
$\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix}$	(2.16)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) e^{f(m)*}(k_S)$	(2.17)
$\alpha^{b(m)}(k_S) = E^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)$	(2.18)
$\mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) = \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) + \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)$	(2.19)
$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S)$	(2.20)
$\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S) = \varphi_N^{(m)}(k_S) \frac{\lambda E^{f(m)}(k_S - 1)}{E^{f(m)}(k_S)}$	(2.21)
$\varphi_N^{(m-1)}(k_S) = \frac{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)}{1 - \lambda^{-1} \varphi_{N+1}^{(m)}(k_S) \tilde{q}^{(m)*}(k_S) \alpha^{b(m)}(k_S)}$	(2.22)
$e^{b(m)}(k_S) = \alpha^{b(m)}(k_S) \varphi_N^{(m-1)}(k_S)$	(2.23)
$E^{b(m)}(k_S) = \lambda E^{b(m)}(k_S - 1) + e^{b(m)}(k_S) \alpha^{b(m)*}(k_S)$	(2.24)

$$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) e^{b(m)*}(k_S) \quad (2.25)$$

**End for**  $m$

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S) \quad (2.26)$$

$$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S) \quad (2.27)$$

$$e(k_S) = \alpha(k_S) \varphi_N^{(0)}(k_S) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S) e^*(k_S) =$$

$$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F_1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F_2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F_J}}^{F(J)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F_{J+1}}}^{F(J+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F_L}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T$$

$$\mathbf{t}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S), \quad \varphi_N^{(M)}(k_S + 1) = \varphi_N^{(0)}(k_S) \quad (2.29)$$

**End for if**

**End for**  $k$

Вычислительная процедура FS FF/FB-эквайзера на базе FAEST-алгоритма аналогична табл. 2, за исключением уравнений (2.21) и (2.22), которые заменяются соответственно на уравнения

$$\frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_N^{(m)}(k_S)} + \lambda^{-1} \frac{\alpha^{f(m)*}(k_S) \alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)} \quad (2)$$

и

$$\frac{1}{\varphi_N^{(m-1)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} - \lambda^{-1} \alpha^{b(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S). \quad (3)$$

Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквайзера на базе стабилизированного FAEST-алгоритма приведен в табл. 3.

В табл. 1 – табл. 3 в основном использованы обозначения, принятые в [4], где можно найти объяснения промежуточных переменных, используемых в представленных алгоритмах. Эти алгоритмы могут быть использованы и для реализации FS FF-эквайзера при исключении, как уже указывалось, из FS FF/ FB-эквайзера вычислений, связанных с FB-частью.

Таблица 3. FS FF/FB-эквайзер на основе многоканального стабилизированного FAEST-алгоритма

Вычисления	Ссылки (3.0)
<b>Initialization</b> : $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $E^{b(m)}(0) = \delta^2 \lambda^{-N_m}$ , $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; <b>create</b> : $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{t}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ , $\varphi_N^{(M)}(1) = 1$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$ ; $K_1 = 1.5$ ; $K_2 = 2.5$ ; $K_3 = 1$ ; $K_4 = 0$ ; $K_5 = 1$	
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$\mathbf{s}_L(k) \Big _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) \Big _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) \Big _1 = x(k)$	(3.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(3.2)
<b>if</b> $l = 0$	
$\vdots$	(3.3)...(3.12)
<b>For</b> $m = M, M-1, \dots, 1$	
$\alpha^{f(m)}(k_S) = x_m(k_S) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m)}(k_S)$	(3.13)
$e^{f(m)}(k_S) = \alpha^{f(m)}(k_S) \varphi_N^{(m)}(k_S)$	(3.14)
$\bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) \end{bmatrix} \frac{\alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(3.15)
$\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix}$	(3.16)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \bar{\mathbf{t}}_N^{(m)}(k_S) e^{f(m)*}(k_S)$	(3.17)
$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S)$	(3.18)
$\frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_N^{(m)}(k_S)} + \lambda^{-1} \frac{\alpha^{f(m)*}(k_S) \alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(3.19)
$\alpha^{b(m)}(k_S) = x_m(k_S - N_m) - \mathbf{h}_N^{b(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_S)$	(3.20)
$q^{(m)}(k_S) = \alpha^{b(m)}(k_S) / E^{b(m)}(k_S - 1)$	(3.21)
$\tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) = E^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}_N^{(m)}(k_S)$	(3.22)

$$\alpha^{b(1)(m)}(k_S) = K_1 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_1) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.23)$$

$$\alpha^{b(2)(m)}(k_S) = K_2 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_2) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.24)$$

$$\alpha^{b(5)(m)}(k_S) = K_5 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_5) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.25)$$

$$t^{(m)}(k_S) = K_4 q^{(m)}(k_S) + (1 - K_4) \tilde{q}^{(m)}(k_S) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{t}_N(k_S) = \tilde{\mathbf{q}}_N(k_S) + \mathbf{h}_N^b(k_S - 1) t^{(m)}(k_S) \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{\hat{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} = 1 + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)H}(k_S) \mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} = \frac{1}{\phi_{N+1}^{(m)}(k_S)} - \lambda^{-1} \alpha^{b(5)(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S) \quad (3.29)$$

$$\phi_N^{(m-1)}(k_S) = \left[ K_3 \frac{1}{\hat{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} + (1 - K_3) \frac{1}{\tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} \right]^{-1} \quad (3.30)$$

$$e^{b(1)(m)}(k_S) = \alpha^{b(1)(m)}(k_S) \tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.31)$$

$$e^{b(2)(m)}(k_S) = \alpha^{b(2)(m)}(k_S) \tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.32)$$

$$E^{b(m)}(k_S) = \lambda E^{b(m)}(k_S - 1) + e^{b(2)(m)}(k_S) \alpha^{b(2)(m)*}(k_S) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) e^{b(1)(m)*}(k_S) \quad (3.34)$$

End for m

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S) \quad (3.35)$$

$$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S) \quad (3.36)$$

$$e(k_S) = \alpha(k_S) \phi_N^{(0)}(k_S)$$

$$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S) e^*(k_S) = \quad (3.37)$$

$$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F,1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F,2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F,l}}^{F(l)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F,l+1}}^{F(l+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F,L}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T$$

$$\mathbf{t}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S), \quad \phi_N^{(M)}(k_S + 1) = \phi_N^{(0)}(k_S) \quad (3.38)$$

End for if

End for k

### Моделирование эквалайзера

Проверка работоспособности эквалайзеров, представленных на рис. 3 и рис. 4, и алгоритмов их работы выполнена путем моделирования FS FF-эквалайзера с числом весовых коэффициентов  $N_F = 137$  и эквивалентного ему FS FF/FB-эквалайзера с числом весовых коэффициентов  $N_F = 69$  и  $N_B = 34$  при  $L = 2$  и практически отсутствии шума на входе (при отношении сигнал-шум, ОСШ = 50 дБ). Для моделирования использован алгоритм (табл. 3), но может быть использован любой из алгоритмов (табл. 1 – табл. 3), т.к. они являются математически эквивалентными друг-другу. В качестве принимаемого сигнала использовался цифровой сигнал с модуляцией 16-QAM. Число тренировочных символов равнялось 1000, а информационных – 1000. Результаты моделирования приведены на рис. 5 – рис. 7.

На рис. 5 зеленой кривой обозначена АЧХ канала связи, имеющая в полосе частот один глубокий провал примерно – 65 дБ. Фиолетовая кривая – это АЧХ эквалайзера в установившемся режиме, а синяя – совместная АЧХ канала связи и эквалайзера. Видно, что даже при практически отсутствии шума на входе, FS FF-эквалайзер не может полностью выровнять АЧХ рассматриваемого канала связи, в то время как FS FF/FB-эквалайзер его выравнивает с равномерностью менее 0,01 дБ.

Для построения совместной АЧХ канала связи и эквалайзеров (рис. 5) необходимо найти свертку их импульсных откликов. Вектор отсчетов совместного импульсного отклика канала связи и импульсного отклика SS FF-эквалайзера – это свертка

$$\mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_F}(k_S), \quad (4)$$

где символ  $\otimes$  обозначает операцию свертки, а  $\mathbf{h}_{N_w}$  – это вектор  $N_w$  отсчетов импульсного отклика канала связи.

В FF/FB-эквалайзере этот отклик определяется несколько сложнее, а именно как

$$\left[ \left( \mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_F}^F(k_S) \right) \Big|_{1:D} \right]^T, \quad (5)$$

$$\left( \mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_F}^F(k_S) \Big|_{D+1:D+N_B} + \mathbf{h}_{N_B}^B(k_S) \right) \Big|_{N_C}^T,$$

где  $N_C = \max \{ N_w + N_F - 1, D + N_F \}$ , а  $D$  – это задержка в отсчетах принятого тренировочного сигнала по отношению к передаваемому сигналу.

В случае FS FF- и FS FF/FB-эквалайзеров выполняются аналогичные операции, но на символьной скорости, для чего свертка

$$\mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_F}(k) \quad (6)$$

рассчитывается на частоте дискретизации входного сиг-

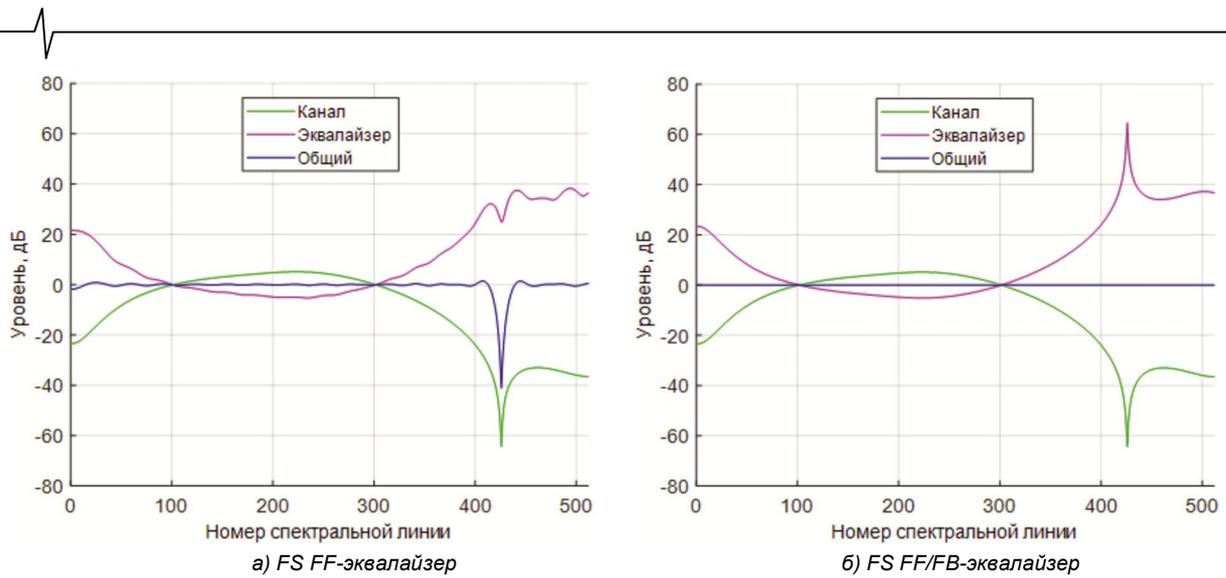


Рис. 5. Выравнивание АЧХ канала связи

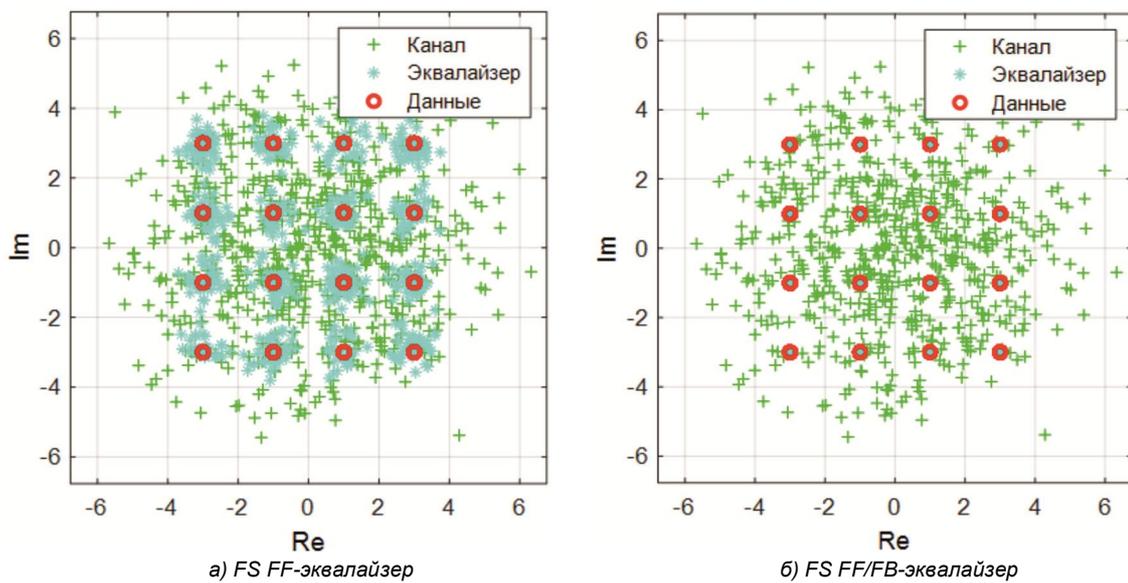


Рис. 6. Созвездия

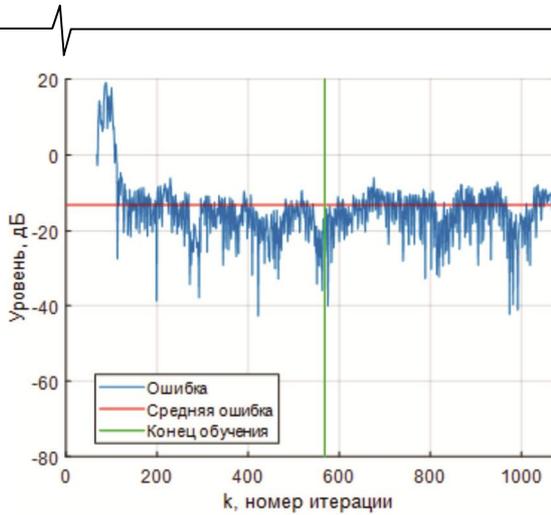
нала эквалайзера  $F_D = L \cdot F_S$ , а затем прореживается как  $\downarrow L$ . Полученные таким образом свёртки затем используются для построения совместной АЧХ канала связи и эквалайзеров (см. рис. 5) в полосе частот, определяемой частотой следования информационных символов  $F_S$ .

Рис. 6 также подтверждает лучшее качество FS FF/FB-эквалайзера в терминах созвездий информационных символов в установившемся состоянии. Здесь зеленым цветом обозначены информационные символы на выходе канала связи/входе эквалайзера, голубым – на выходе эквалайзера, а красным – символы переданного сообщения (его алфавит). Из рис. 6 б) видно, что в случае FS FF/FB-эквалайзера информационные символы на его выходе практически совпадают с переданными символами. Разброс элементов созвездий на выходе FS FF/FB-эквалайзера лишь при ОСШ на входе, равном 20 дБ, соответствует аналогичному разбросу FS FF-эквалайзера при практически полном отсутствии шума на его входе (см. рис. 6 а). При этом

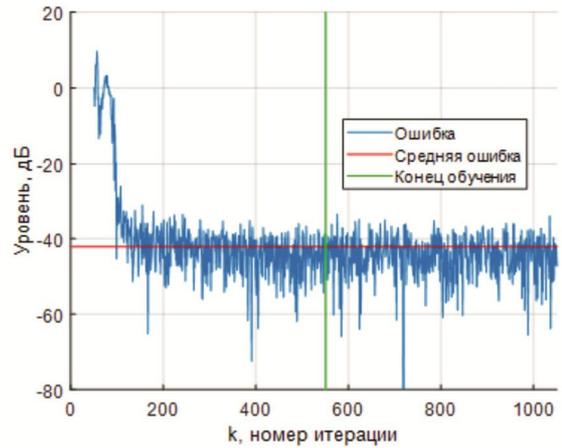
в совместной АЧХ при использовании FS FF/FB-эквалайзера полностью отсутствует глубокий провал, а ее неравномерность составляет около 2,5 дБ, в то время как при использовании FS FF-эквалайзера такой провал (см. рис. 5 а), равен примерно 40 дБ даже при ОСШ = 50 дБ.

Рис. 7 показывает переходные процессы в терминах ошибок в выходных сигналах адаптивных фильтров рассматриваемых эквалайзеров. Видно, что длительность переходных процессов в обоих эквалайзерах примерно одинаковая и в рассматриваемом случае составляет около 200 итераций на символьной скорости. Однако значение ошибок в установившемся состоянии разное, что объясняет разные результаты, представленные на рис. 5 и рис. 6.

При использовании сигналов с низкой плотностью созвездий, например 4-QAM, FS FF/FB-эквалайзер демонстрирует работоспособность и удовлетворительное качество работы даже при довольно низких значениях ОСШ. Примеры выровненных АЧХ в указанных режимах приведены на рис. 8.

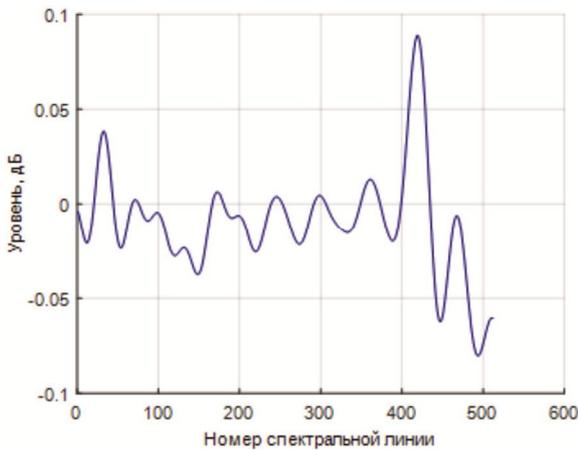


а) FS FF-эквайзер

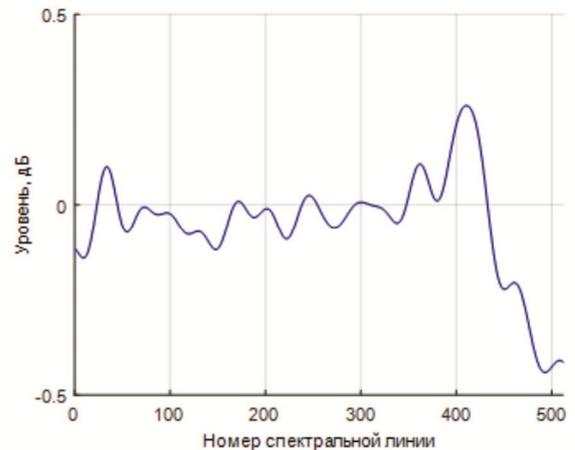


б) FS FF/FB-эквайзер

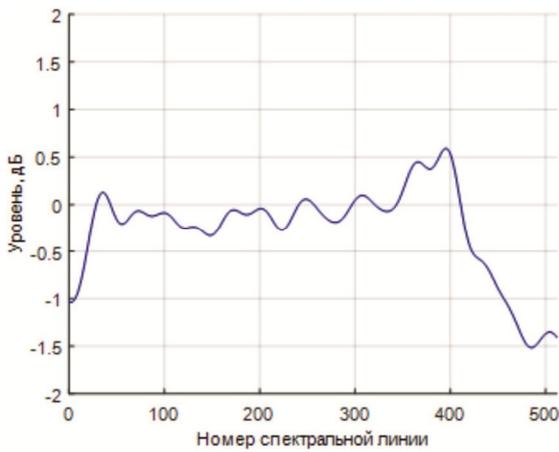
Рис. 7. Нормализованный квадрат ошибки



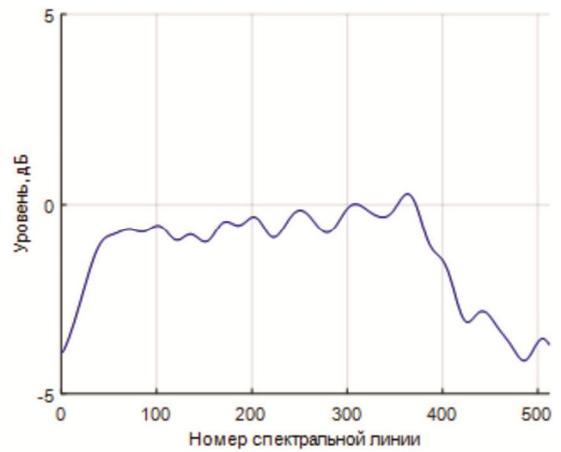
а) ОСШ=40 дБ



б) ОСШ=30 дБ



в) ОСШ=20 дБ



г) ОСШ=10 дБ

Рис. 8. Совместная АЧХ канала связи и FS FF/FB-эквайзера в установившемся состоянии

### Заключение

Таким образом, результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного FS FF/FB-эквайзера на базе быстрых RLS-алгоритмов, а также его более высокую эффективность в сравнении с аналогичным FS FF-эквайзером. В силу линейной арифметической сложности такой эквалайзер может быть использован в приложениях с ограниченными вычислительными ресурсами. Предложенное решение может быть использовано в связанной аппаратуре раз-

личного назначения, элементом которой является эквалайзер.

### Литература

1. Sayed A.H. Fundamentals of adaptive filtering. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc., 2003. – 1125 p.
2. Diniz P.S.R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation, 4-th ed. Springer Science + Business Media, 2013. – 652 p.
3. Farhang-Boroujeny B. Adaptive filters theory and applications, 2-nd ed. John Wiley & Sons, 2013. – 778 p.

- 
- 
4. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов. Теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013. – 528 с.
  5. Haykin S. Adaptive filter theory, 5-th ed. Pearson Education Inc., 2014. – 889 p.
  6. Benesty J., Huang Y., Eds. Adaptive signal processing: applications to real-world problems. Springer-Verlag., 2003. – 356 p.
  7. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 1 // Современная электроника. – 2009. – № 9. – С. 56-63.
  8. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 2 // Современная электроника. – 2010. – № 1. – С. 72-77.
  9. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 3 // Современная электроника. – 2010. – № 2. – С. 70-77.
  10. Monzingo R.A., Haupt R.L., Miller T.W. Introduction to adaptive arrays, 2nd ed. SciTech Publishing, 2011. – 510 p.
  11. Kuo S.M., Morgan D.S. Active noise control // Proceedings of the IEEE. – 1999. Vol. 87, № 6. – Pp. 943-973.
  12. Messerschmitt D. Echo cancellation in speech and data transmission // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1984. – Vol. 2. – № 2. – Pp. 283-297.
  13. Nezami M.K. Fundamentals of power amplifier linearization using digital pre-distortion // High Frequency Electronics, 2004. – Vol. 3. – № 8. – Pp. 54-59.
  14. Qureshi S. Adaptive equalization // IEEE Communications Magazine. – 1982. – Vol. 20. – № 2. – P. 9-16.
  15. Proakis J.G., Salehi M. Digital communications, 5-th ed. McGraw Hill, 2007. – 1170 p.
  16. Lucky R.W. Automatic equalization for digital communication // Bell System Technical Journal. – 1965. – Vol. 44. – № 2. – Pp. 547-588.
  17. Becker F.K., Holzman L.N., Lucky R.W., Port E. Automatic equalization for digital communication // Proceedings of the IEEE. – 1965. – Vol. 52. – № 1. – Pp. 96-97.
  18. Qureshi S. Adaptive equalization // Proceedings of the IEEE. – 1985. Vol. 73. – № 9. – Pp. 1349-1387.
  19. Lucky R.W. The adaptive equalizer // IEEE Signal Processing Magazine. – 2006. – Vol. 23. – № 3. – Pp. 104-107.
  20. Belfiore C.A., Park J.H. Decision feedback equalization // Proceedings of the IEEE. – 1979. – Vol. 67. – № 8. – Pp. 1143-1156.
  21. George D., Bowen R., Storey J. An adaptive decision feedback equalizer // IEEE Transactions on Communications. – 1971. – Vol. 19. – № 3. – Pp. 282-293.
  22. Gitlin R.D., Weinstein S.B. Fractionally-spaced equalization: an improved digital transversal equalizer // The Bell System Technical Journal. 1981. Vol. 60. № 2. – Pp. 275-296.
  23. Treichler J.R., Fijalkow I., Johnson C.R. Fractionally spaced equalizers // IEEE Signal Processing Magazine. – 1996. – Vol. 13. – № 3. – Pp. 65-81.
  24. Bayoumi M.A. VLSI design methodologies for digital signal processing architectures. Springer, 1994. – 399 p.
  25. Kuo S.M., Gan W.-S. S. Digital signal processors: architectures, implementations and applications. Prentice Hall, 2004. – 624 p.
  26. Welch T.B., Wright H.G., Morrow M.G. Real-time digital signal processing from MATLAB to C with the TMS320C6x DSPs, 3rd ed. CRC Press, 2017. – 480 p.
  27. Woods R., McAllister J., Lightbody G., Ying Yi. FPGA-based implementation of signal processing systems, 2nd ed. Willey, 2017. – 360 p.
  28. Витязев С.В. Цифровые процессоры обработки сигналов. М.: Горячая линия – Телком, 2017. – 100 с.
  29. Giordano A.A., Hsu F.M. Least square estimation with application to digital signal processing. – Canada, Toronto: John Wiley and Sons, Inc., 1985. – 412 p.
  30. Djigan V.I. Recursive least squares – an idea whose time has come // Proceedings of the 7-th International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing Moscow, 2007. – Pp. 255-260.

УДК 621.391+519.6 + 534.44

## СРАВНЕНИЕ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ФУРЬЕ АНАЛИЗ, ВЕЙВЛЕТЫ И БАНКИ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ФАЗОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*Вашкевич М.И., к.т.н., доцент кафедры электронных вычислительных средств Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, e-mail: vashkevich@bsuir.by;*

*Азаров И.С., д.т.н., доцент, заведующий кафедрой электронных вычислительных средств Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, e-mail: azarov@bsuir.by.*

## COMPARISON OF TIME-FREQUENCY TRANSFORMS: FOURIER ANALYSIS, WAVELETS AND ALLPASS TRANSFORMED FILTER BANKS

*Vashkevich M.I., Azarov I.S.*

*The article presents a comparative analysis of three time-frequency signal representation methods including 1) short-time Fourier transform, 2) wavelet transform, 3) decomposition based on allpass transformed filter bank. Attention is given to study time-frequency tiling associated with these methods. In order to consider the methods within an integrated framework we treat time-frequency transform as a filter bank. We also give attention to explaining the basic principle of allpass transform by showing its relation to decomposition of the signal into discrete orthonormal Laguerre sequences. In order to visualize configuration of time-frequency tiling for considered transforms Heisenberg rectangles were calculated using numerical integration of the corresponding expressions.*

**Key words:** time-frequency transform, filter bank, allpass transform, constant Q analysis.

**Ключевые слова:** частотно-временное преобразование, банк фильтров, фазовое преобразование, анализ с постоянной добротностью.

### Введение

Практический анализ сигналов различной природы часто приводит к необходимости использования частотно-временных преобразований. Это объясняется нестационарной природой большинства сигналов, и как следствие, для корректного отображения содержащейся в них информации необходимо преобразование, позволяющее локализовать энергию сигнала на частотно-временной плоскости.

В данной работе рассмотрены три подхода к частотно-временному разложению сигнала:

- кратковременное преобразование Фурье [1];
- вейвлет-преобразование [2];
- банк фильтров на основе фазового преобразования [3, 4].

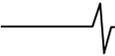
Целью статьи является сравнительный анализ особенностей и специфики данных подходов. Для этого в работе приводятся основные математические выкладки, позволяющие понять теоретическую основу указанных методов частотно-временного анализа. Чтобы рассмотреть все методы с единых позиций был выбран подход, интерпретирующий частотно-временное преобразование, как результат работы банка фильтров.

Кратковременное преобразование Фурье (КВПФ) исторически явилось одним из первых методов, использованных для частотно-временного представления сигнала [1]. В соответствие с принципом неопределенности нельзя иметь неограниченно хорошее разрешение и во временной и в частотной областях [2]. Поэтому, если в КВПФ использовать короткие окна анализа, то можно

*Представлен сравнительный анализ трех методов частотно-временного представления сигналов: 1) кратковременное преобразование Фурье; 2) вейвлет-преобразование; 3) декомпозиция с использованием банка фильтров на основе фазового преобразования. Внимание уделено изучению частотно-временного покрытия, которое получается при использовании данных методов. Чтобы рассмотреть методы с единых позиций выбрана точка зрения на частотно-временное преобразование, как на результат работы банка фильтров. Особое внимание уделено объяснению механизма работы фазового преобразования, показана его связь с разложением сигнала на ортогональные дискретные последовательности Лагерра. Для визуализации конфигураций частотно-временного покрытия, получающихся при использовании указанных частотно-временных преобразований, рассчитывались прямоугольники Гейзенберга при помощи численного интегрирования соответствующих выражений.*

достичь хорошего временного разрешения, теряя при этом в частотном разрешении. При длинных окнах анализа ситуация меняется на противоположную. В любом случае, особенностью КВПФ является равномерное покрытие частотно-временной области. Однако такое представление сигнала не всегда эффективно отображает информацию, содержащуюся в сигнале.

Вейвлет-преобразование [2] широко распространилось в 80-90-х годах XX столетия и явилось шагом в сторону более гибкого частотно-временного разрешения. В частности, при его использовании достигается разрешение с постоянной добротностью  $Q$  (англ. *Constant-Q resolution*) [5], при котором временное разрешение возрастает, а частотное уменьшается по мере увеличения частоты. Анализ сигнала с постоянной добротностью имеет большое значение, поскольку моделирует работу периферийной части слуховой системы человека.



Третье из анализируемых направлений – банки фильтров, основанные на фазовом преобразовании, были впервые предложены в начале 80-х годов XX столетия [3, 4]. Они сочетают в себе преимущества КВПФ, а также вейвлет-преобразования. Как и при практической реализации КВПФ в них можно использовать эффективные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). При этом в них также достижимо разрешение с постоянной добротностью  $Q$ . Важной их особенностью является гибкость – настраивая всего один параметр, отвечающий за степень деформации частотной оси, можно получать различные конфигурации покрытия частотно-временной плоскости. Этим они отличаются от банков фильтров на основе вейвлет-преобразования, где структура частотно-временное покрытие полностью определяется структурой банка фильтров.

Последующее изложение организовано следующим образом. В первом разделе рассмотрены основы КВПФ, при этом приводится его интерпретация как банка фильтров. Во втором разделе рассматриваются основы вейвлет-анализа и иллюстрируются его интерпретации в виде банка фильтров с древовидной структурой. В третьем разделе рассматриваются математические основы построения неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров. В четвертом разделе выполняется анализ частотно-временных покрытий, рассмотренных трех видов банков фильтров, и производится их сравнение.

### 1. Кратковременное преобразование Фурье

Для непрерывного временного сигнала  $x(t)$  кратковременное преобразование Фурье (КВПФ) можно записать как

$$\text{STFT}_x(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt, \quad (1)$$

где  $w(t)$  – временная оконная функция, имеющая конечную длительность  $T$ . Умножение исходного сигнала на  $w(t - \tau)$  локализует интеграл Фурье в окрестности  $t = \tau$ . Оконная функция, как правило, является вещественной и симметричной.

Рассмотрим вопрос, как происходит локализация энергии сигнала по времени и по частоте при использовании КВПФ. Для этого введем в рассмотрение семейство функций, называемых частотно-временными атомами Габора [2]:

$$w_{\omega, \tau}(t) = w(t - \tau)e^{-j\omega t}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), легко заметить, что атомы Габора являются теми «кирпичиками», на которые КВПФ раскладывает исходный сигнал  $x(t)$ .

Поскольку функция  $w(t)$  является четной, то атомы Габора имеют центр в  $\tau$ . Протяженность функции  $w_{\omega, \tau}(t)$  во времени не зависит от  $\omega$  и от  $\tau$ , а её энергия сосредоточена в окрестности  $\tau$  на интервале, измеряемом стандартным отклонением  $\sigma_t$ :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |w_{\omega, \tau}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt. \quad (3)$$

Поскольку  $w(t)$  вещественна и симметрична, то её

преобразование Фурье обладает теми же свойствами. В свою очередь преобразование Фурье  $w_{\omega, \tau}(t)$  есть

$$W_{\omega, \tau}(v) = W(v - \omega)e^{-j\tau(v - \omega)}, \quad (4)$$

где  $v$  – частота, а  $W(v)$  преобразование Фурье оконной функции  $w(t)$ . Таким образом,  $W_{\omega, \tau}(v)$  есть сдвинутое на  $\omega$  по частоте окно  $W(v)$ . Его частотная протяженность около  $\omega$  не зависит от  $\omega$  и от  $\tau$  и может быть вычислена как

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - v)^2 |W_{\omega, \tau}(v)|^2 dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 |W(v)|^2 dv. \quad (5)$$

Таким образом, энергия атома Габора  $w_{\omega, \tau}(t)$  локализована как по времени (3), так и по частоте (5). Графическим представлением энергии атома на частотно-временной плоскости  $(t, v)$  служит прямоугольник Гейзенберга, как это показано на рис. 1.

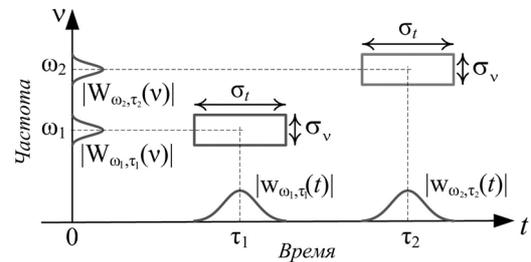


Рис. 1. Графическое представление протяженности энергии двух атомов Габора («прямоугольники Гейзенберга»)

Из представленного рисунка видно, что  $w_{\omega, \tau}(t)$  соответствует прямоугольнику Гейзенберга, имеющий площадь  $\sigma_t \sigma_v$  и центр в  $(\tau, \omega)$ . Приведенное изображение явно показывает, что КВПФ имеет одинаковое разрешение во всей частотно-временной плоскости.

Применительно к дискретным сигналам КВПФ, описываемое выражением (1), записывается следующим образом [6]:

$$\text{STFT}_x[k, t] = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+t)e^{-j\omega_k n}, \quad (6)$$

где  $\omega_k = 2\pi k/M$  – сетка частот на которой выполняется анализ,  $k$  – индекс частоты (или частотный бин),  $M$  – количество частот на которых производится анализ. Двумерное представление (6) одномерного сигнала  $x(n)$  весьма избыточно поскольку для каждого нового момента времени производится вычисление дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поэтому, чтобы уменьшить избыточность, вводят параметр временного шага (англ. hop size)  $L$ , который определяет временной сдвиг между соседними окнами анализа. В этом случае (6) можно воспринимать, как частный случай, когда  $L = 1$ . В общем же случае КВПФ для дискретных сигналов с временным шагом  $L$  записывается как

$$\text{STFT}_x[k, l] = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+lL)e^{-j\omega_k n}. \quad (7)$$

С одной стороны, значения  $\text{STFT}_x[k, l]$  характеризуют локальное частотно-временное поведение сигнала вблизи момента времени  $lL$  на  $k$ -й частоте. В этом смысле,

выражение (7) часто называют преобразованием со скользящим окном (англ. *sliding-window transform*) [6].

С другой стороны,  $STFT_x[k, l]$  можно интерпретировать, как набор временных последовательностей, т.е. как функцию от  $l$  для каждого частотного бина  $k$ . В этом случае преобразование (7) соответствует *банку фильтров*, который выполняет декомпозицию сигнала на частотные каналы или субполосы. Обе упомянутые интерпретации схематично представлены относительно частотно-временной плоскости на рис. 2.

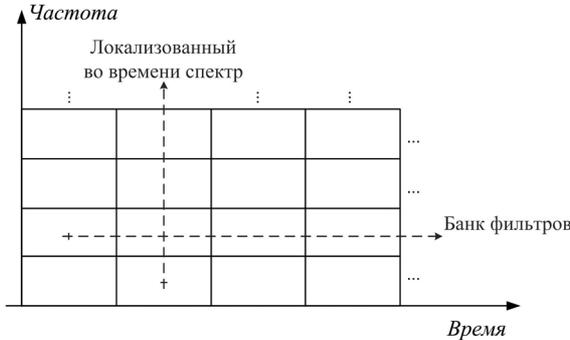


Рис. 2. Интерпретации кратковременного преобразования Фурье как ряда локализованных во времени спектров (вертикальная линия) и как банка полосовых фильтров (горизонтальная линия)

Рассмотрим более подробно интерпретацию КВПФ как банка фильтров. Получаемый в данном случае банк фильтров называется *модулированным* и играет важную роль во многих практических приложениях. Рассмотрим общую структуру модулированного банка фильтров анализа, показанную на рис. 3.

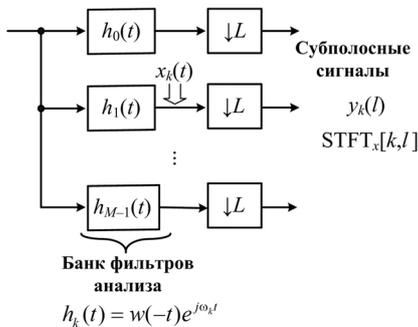


Рис. 3. Представление кратковременного преобразования Фурье в виде банка фильтров

Если фильтры анализа определить, как

$$h_k(t) = w(-t)e^{j\omega_k t}, \tag{8}$$

то структура, приведенная на рис. 3, реализует КВПФ (6). Данный вывод можно получить непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_n h_k(n)x(t-n) = \sum_n w(-n)x(t-n)e^{j\omega_k n} = \\ &= \sum_n w(n)x(t+n)e^{-j\omega_k n} = STFT_x[k, t]. \end{aligned} \tag{9}$$

Децимация выходов банка фильтров в  $L$  раз позволяет получить субполосные сигналы, которые соответствуют кратковременному преобразованию Фурье, описываемому выражением (7):

$$y_k(l) = x_k(Ll) =$$

$$= \sum_n w(n)x(n+Ll)e^{-j\omega_k n} = STFT_x[k, l]. \tag{10}$$

Таким образом, выражения (8)-(10) позволяют интерпретировать кратковременное преобразование Фурье, как банк фильтров. Причем получающееся представление сигнала соответствует однородному, равномерному покрытию (от англ. *tiling*) частотно-временной плоскости, как показано на рис. 2.

## 2. Вейвлет-преобразование (ВП)

В качестве альтернативы КВПФ для спектрального анализа сигнала выступает вейвлет-преобразование, которое является мощным средством для представления локальных особенностей сигнала. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала  $x(t)$  определяется как [2]:

$$WT_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt, \tag{11}$$

где вейвлет  $\psi((t-\tau)/s)$  является результатом масштабирования вещественного базисного вейвлета  $\psi(t)$  на величину  $s$  и временного сдвига на  $\tau$ ; нормирующий множитель  $1/\sqrt{s}$  – необходим для сохранения единичной энергии для масштаба  $s$ , поскольку изначально функция  $\psi(t)$  нормирована, т.е.  $\|\psi(t)\| = 1$ . На функцию  $\psi(t)$  также накладываются несколько дополнительных ограничений [2].

Если КВПФ представляет сигнал в виде разложения на атомы Габора (2), то вейвлет-преобразование раскладывает сигнал на частотно-временные атомы вида

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right). \tag{12}$$

Обычно базисный вейвлет  $\psi(t)$  имеет центр в нуле, из чего следует, что  $\Psi_{s,\tau}(t)$  имеет центр при  $t = \tau$ .

Частотно-временное разрешение вейвлет-преобразования (11) определяется частотно-временной протяженностью вейвлет-атомов (12). В [2] доказывается, что временная протяженность  $\Psi_{s,\tau}(t)$ , по аналогии с (3), равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 |\Psi_{s,\tau}(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2, \tag{13}$$

где  $\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$ . В тоже время, частотная протяженность  $\Psi_{s,\tau}(v)$  равна  $\sigma_v^2/s^2$ , где  $\sigma_v^2$  есть частотная протяженность Фурье-образа базисного вейвлета  $\Psi(v)$ . Частотный центр  $\Psi_{s,\tau}(v)$  есть  $\omega_0/s$ , где  $\omega_0$  – частотный центр базисного вейвлета  $\Psi(v)$ . Таким образом, энергия частотно-временного вейвлет-атома  $\Psi_{s,\tau}(v)$  соответствует прямоугольнику Гейзенберга с центром в  $(\tau, \omega_0/s)$  и размером  $s\sigma_t$  по времени и  $\sigma_v/s$  – по частоте. На рис. 4 схематично показан пример прямоугольника Гейзенберга для двух вейвлетов. Нужно отметить, что при любом масштабе  $s$  площадь прямоугольника остается равной  $\sigma_t\sigma_v$ .

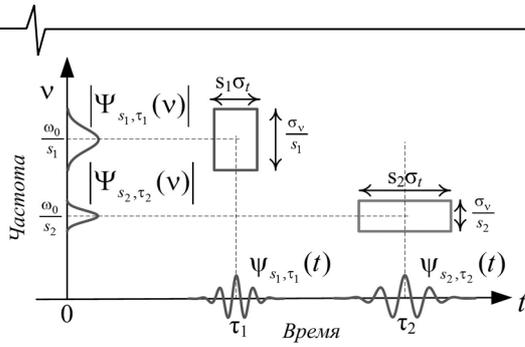


Рис. 4. Графическое представление протяженности энергии двух вейвлетов

Таким образом, для больших значений  $s$  функция  $\Psi_{s,\tau}(t)$  становится низкочастотной и растянутой во времени версией  $\psi(t)$ . При малых значениях  $s$  функция  $\Psi_{s,\tau}(t)$  становится сжатой версией  $\psi(t)$ , чья энергия концентрируется в высокочастотной области. Это приводит к тому, что покрытие частотно-временной плоскости не является регулярным, как в случае КВПФ. На высоких частотах ВП имеет хорошую локализацию по времени, но плохую по частоте, при этом на низких частотах ситуация изменяется – преобразование лучше локализовано в частотной области и плохо во временной.

Для конкретного значения  $s$  вейвлет-преобразование (11) можно интерпретировать, как результат фильтрации сигнала  $x(t)$  фильтром с импульсной характеристикой  $\bar{\Psi}_{s,\tau}(t)$ :

$$WT_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = x(t) * \bar{\Psi}_{s,\tau}(t), \quad (14)$$

где  $*$  – операция свертки,  $\bar{\Psi}_{s,\tau}(t) = \Psi_{s,\tau}(-t)$  – обращенная во времени функция частотно-временного атома.

Если рассмотреть совокупность различных значений  $s$ , то выражение (11) можно интерпретировать как банк фильтров. На рис. 5 сравниваются разрешение КВПФ и вейвлет-преобразования в частотно-временной плоскости. Используя представление, показанное на рис. 5, и интерпретируя вейвлет-преобразование как банк фильтров, можно выделить его характерную особенность. Полосы пропускания банка фильтров  $\Delta\omega_i$  монотонно увеличиваются по мере увеличения центральной частоты  $\omega_{0_i}$ . Таким образом, можно показать, что относительная полоса частот отдельного фильтра (или добротность)  $Q = \Delta\omega_i / \omega_{0_i}$  не зависит от параметра  $s$ . Вследствие этого вейвлет-преобразование часто назы-

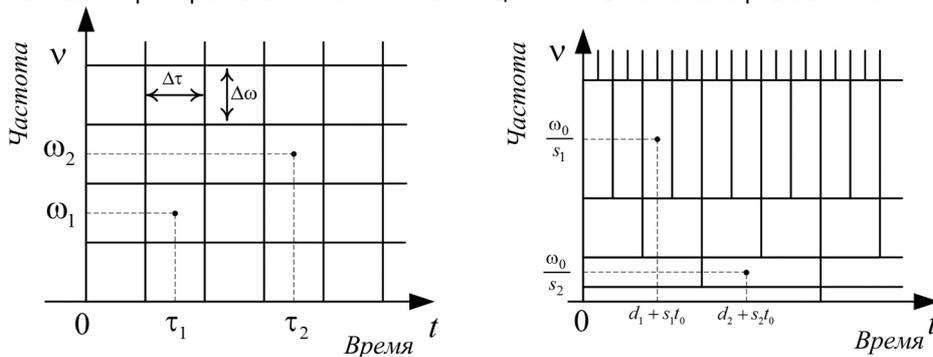


Рис. 5. Частотно-временное разрешение: кратковременного преобразования Фурье (слева) и вейвлет-преобразования (справа)

вают анализом с постоянной добротностью. Это очень похоже на частотный анализ выполняемый человеческим ухом [5].

Когда вейвлет-преобразование (11) известно только для  $s < s_0$ , то для полного восстановления  $x(t)$  необходима дополнительная информация, которая соответствует  $WT_x(s, \tau)$  при  $s > s_0$ . Этого достигают введением масштабирующей функции  $\varphi(t)$ , которая представляет собой объединение вейвлетов с масштабами, большими  $s_0$ . Модуль её преобразования Фурье равен [2]:

$$|\Phi(v)|^2 = \int_{s_0}^{+\infty} |\Psi(sv)|^2 \frac{ds}{s}, \quad (15)$$

где  $\Psi(v)$  – Фурье-образ вейвлета  $\psi(t)$ .  $\Phi(v)$  – Фурье-образ масштабирующей функции  $\varphi(t)$ .

Таким образом, масштабирующую функцию можно интерпретировать, как импульсную характеристику низкочастотного фильтра. Если обозначить

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (16)$$

то низкочастотная аппроксимация  $x(t)$  с масштабом  $s$  есть

$$L_x(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = x(t) * \bar{\varphi}_{s,\tau}(t), \quad (17)$$

где  $\bar{\varphi}_{s,\tau}(t) = \varphi_{s,\tau}(-t)$  – обращенная по времени масштабирующая функция.

Вейвлет-преобразование сигнала (11) является избыточным и поэтому редко применяется на практике. Существует дискретная версия (11) называемая дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП). Для его получения на первом этапе производят дискретизацию параметра масштаба  $s$  в логарифмической шкале. На втором этапе производят дискретизацию параметра времени относительно параметра масштаба таким образом, что на каждом масштабном уровне используется различная частота дискретизации. Предположим, что параметр масштаба  $s$  выбирается равным положительной степени фиксированного числа  $s_0$ , а  $\tau$  зависит от  $s$ , таким образом, что

$$s_m = s_0^m, \quad \tau_{ml} = s_m^l \tau_0 T, \quad (18)$$

где  $s_0 > 1$ ,  $\tau_0 > 0$ ,  $m, l \in \mathbb{Z}$ , а  $T$  – интервал дискретизации. Чтобы минимизировать число операций в ДВП, его

параметры выбирают лежащими на диадической сетке. Для этого полагают  $s_0 = 2$ , а  $\tau_0 = 1$ , в результате чего вейвлет-преобразование (11) с учетом (18) приобретает вид:

$$WT_x(s_m, \tau_m) = 2^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(2^{-m}t - lT) dt, \quad (19)$$

а само преобразование выполняет октавный анализ (англ. *octave analysis*). Поскольку ДВП применяется к дискретному сигналу  $x(n)$ , то необходимо перейти от непрерывного временного параметра  $t$  к его дискретной версии, в результате чего (19) преобразуется к виду (полагается, что интервал дискретизации  $T = 1$ ):

$$WT_x(2^m, 2^m l) = 2^{-m/2} \sum_n x(n) \psi(2^{-m}n - l) = \sum_n x(n) g(l - 2^{-m}n), \quad (20)$$

где  $g(l - 2^{-m}n) = \psi(-(2^{-m}n - l))$ .

ДВП (20) реализует октавный анализ с различной частотой дискретизации в каждой октаве. Необходимо заметить, что ДВП (20), вычисленное до масштаба  $2^M$ , не дает полной информации о сигнале. Её необходимо дополнить низкими частотами (см. (17)), которые соответствуют масштабам, большим, чем  $2^M$ . Переходя к дискретной версии выражения (17), получаем:

$$L_x(2^M, 2^M l) = \sum_n x(n) \varphi(2^M n - l) = \sum_n x(n) f(l - 2^M n). \quad (21)$$

где  $f(l - 2^M n) = \varphi(-(2^M n - l))$ .

Дискретное вейвлет-преобразование (20)-(21) можно представить в виде дерева, состоящего из фильтров низкой и высокой частоты. Такая реализация двоичного (англ. *diadic*) дискретного вейвлет-преобразования обрывается при помощи алгоритма с «дырами» (фр. *algorithme a trous*) [7]. На рис. 6 показана схема получения такого банка фильтров.

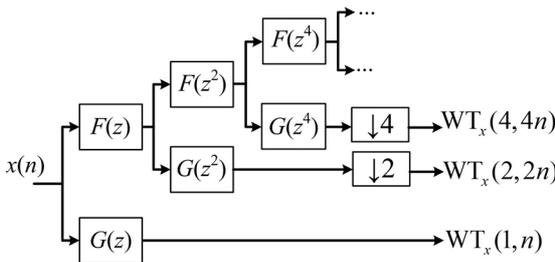


Рис. 6. Реализация дискретного вейвлет-преобразования в виде древовидной структуры

Через  $G(z)$  обозначено  $z$ -преобразование базисного вейвлета, а через  $F(z)$  – передаточная функция интерполяционного фильтра, который соответствует масштабирующей функции.

Таким образом показано, что хотя по сути вейвлет-преобразование является примером кратно-масштабного анализа, его можно интерпретировать и как частотно-временное преобразование. При этом, как и в случае с КВПФ, вейвлет-преобразование представимо в виде банка фильтров. Важной особенностью получаемой структуры банка фильтров является то, что он раскла-

дывает сигнал на частотные компоненты, имеющие различную ширину частотных полос, что приводит к неравномерному покрытию частотно-временной плоскости (см. рис. 5). Такое покрытие является важным в контексте многих задач, например, при моделирование частотного разрешения слуховой системы человека [5].

### 3. Банк фильтров на основе фазового преобразования

В предыдущих разделах, приступая к описанию частотно-временного преобразования, давалось его формулировка для случая непрерывного сигнала. После чего осуществлялся переход к дискретной версии частотно-временного преобразования, после чего выводилась его интерпретация как банка фильтров. В данном разделе мы приступаем к описанию частотно-временного преобразования, которое изначально имеет вид банка фильтров.

Процесс построения банка фильтров на основе фазового преобразования главным образом состоит из двух этапов: 1) получение полифазной структуры ДПФ-модулированного банка фильтров и 2) замена элементов задержки в полифазной структуре на фазовые звенья (второй этап и является собственно фазовым преобразованием).

Данный раздел организован следующим образом. Вначале рассмотрен процесс получения равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров, который является обобщением идеи кратковременного преобразования Фурье. Показывается также, как ДПФ-моделированный банк фильтров может быть эффективно реализован в виде полифазной структуры. Далее рассматриваются математические основы фазового преобразования, показывается его связь с разложением сигнала в базисе дискретных последовательностей Лагерра. Описывается процесс деформации частотной оси, происходящей в результате фазового преобразования. В заключении раздела описывается структура неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров на основе фазового преобразования.

#### Равнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров

Выражение (8) иллюстрирует идею получения банка фильтров, основанного на модуляции. Действительно, если необходимо получить  $M$ -канальный банк фильтров, то для этого достаточно рассчитать КИХ-фильтр-прототип нижних частот  $h(n)$  с частотой среза  $\pi/M$  (см. рис. 7); после чего импульсные характеристики банка фильтров определяются путем модуляции:

$$h_k(n) = h(n)W^{-nk}, \quad 0 \leq k < M, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

где  $W = \exp(-j2\pi/M)$ ,  $N = mM$  – порядок фильтра-прототипа, а  $m$  – натуральное число.

Если обозначить Фурье-образ фильтра-прототипа с коэффициентами  $h(n)$  как  $H(e^{j\omega})$ , то используя свойство частотного сдвига, выражение (22) можно переписать следующим образом:

$$H_k(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M}k)}). \quad (23)$$

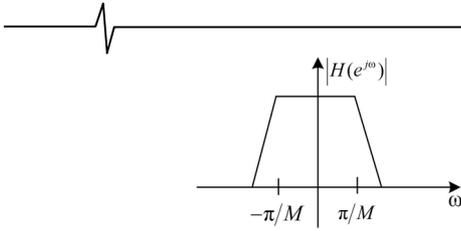


Рис. 7. Схемное представление АЧХ фильтра-прототипа

Из выражения (23) следует, что частотные характеристики фильтров  $H_k$  являются сдвинутыми версиями фильтра-прототипа. Схемное изображение покрытия банком фильтров частотного диапазона показано на рис. 8. Поскольку банк фильтров состоит из равномерно сдвинутых копии фильтра-прототипа, то он называется **равнополосным**.

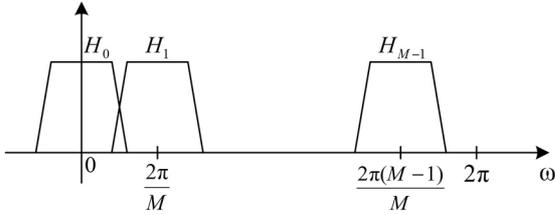


Рис. 8. Схемное представление АЧХ банка фильтров

Эффективная реализация банка фильтров (22) основывается на полифазной реализации фильтра-прототипа  $H(z)$ , которая заключается в его разбиении на сумму  $M$  полифазных компонент  $E_l(z)$  [8]:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M), \quad 0 \leq l < M, \quad (24)$$

где  $E_l(z) = \sum_{n=0}^{N/M-1} e_l(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/M-1} h(l + Mn) \cdot z^{-n}$ . Другими словами, импульсная характеристика  $h(n)$  перегруппирована в  $M$  подпоследовательностей  $e_l(n)$ .

Исходя из (22), можно записать  $Z$ -образ банка фильтров

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W^{-kn} z^{-n} = H(z W^k) \quad (25)$$

Далее, подставляя выражение (24) в (25), получаем:

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} W^{-lk} E_l(z^M W^{kM}) = \sum_{l=0}^{M-1} W^{-lk} z^{-l} E_l(z^M). \quad (26)$$

При выводе последнего выражения использовалось тождество  $W^{kM} = 1$ . Выражение (26) удобно переписать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ H_2(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(M-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & W^{-(M-1)} & W^{-2(M-1)} & \dots & W^{-(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\text{ОДПФ}} \times \begin{bmatrix} E_0(z^M) \\ z^{-1} E_1(z^M) \\ z^{-2} E_2(z^M) \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} E_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Легко заметить, что матрица  $M \times M$  в правой части выражения является матрицей обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ), умноженная на константу  $M$ . Выражение (27) позволяет получить эффективную структуру банка фильтров, показанную на рис. 9 и называемую **ДПФ-модулированным банком фильтров**.

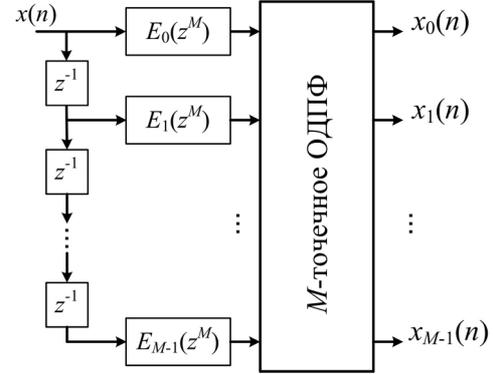


Рис. 9. Полифазная реализация ДПФ-модулированного банка фильтров

Эффективность данной структуры основывается на том, что для реализации обратного ДПФ могут быть использованы быстрые алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье [9].

Представление сигнала, получаемое при помощи банка фильтров, показанного на рис. 9, является избыточным в том же смысле в каком избыточно КВПФ, описываемое выражением (6). Вообще можно заметить, что ДПФ-модулированный банк фильтров полностью соответствует КВПФ (6) в том случае, когда длина фильтра прототипа  $h(n)$  равна числу каналов банка фильтров  $M$ . Поэтому ДПФ-модулированный банк фильтров является обобщением идеи КВПФ, поскольку включает КВПФ, как частный случай.

Для уменьшения избыточности субполосных сигналов операция децимации может быть внесена и в структуру равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров. При этом коэффициент децимации играет ту же роль, что и параметр временного шага  $L$  для КВПФ (7).

### Дискретные последовательности Лагерра и фазовое преобразование

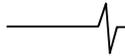
Появление фазового преобразования связано с исследованием дискретных ортонормированных последовательностей и способов их генерации. В частности, в работе [10] рассмотрен важный способ получения ортонормированных последовательностей  $\{\phi_n^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Известно, что последовательности  $\{\phi_n^{(k)}\}$  являются ортонормированными, если скалярное произведение любой последовательности на саму себя дает единицу, а произведение любых двух различных последовательностей равно нулю. В краткой форме это требование записывается следующим образом:

$$\{\phi_n^{(m)}\} \cdot \{\phi_n^{(k)}\} = \sum_n \phi_n^{(m)} \phi_n^{(k)} = \delta_{mk}, \quad (28)$$

где  $\delta_{mk} = 1$ , если  $m = k$  и  $\delta_{mk} = 0$  для  $m \neq k$ .

Если в выражении (28) от последовательностей перейти к их  $Z$ -преобразованиям, то операцию скалярного



произведения можно заменить контурным интегралом вдоль единичной окружности в Z-плоскости [10]:

$$\{\phi_n^{(m)}\} \cdot \{\phi_n^{(k)}\} = \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi^{(m)}(1/z) \Phi^{(k)}(z) dz / z = \delta_{mk}, \quad (29)$$

$$\{\phi_n^{(m)}\} \cdot \{\phi_n^{(m)}\} = \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi^{(m)}(1/z) \Phi^{(k)}(z) dz / z = \delta_{mk},$$

где  $\Phi^{(k)}(z) = \sum_n \phi_n^{(k)} z^{-n}$ ,  $\Phi^{(m)}(1/z) = \sum_n \phi_n^{(m)} z^n$ .

Поскольку элементы последовательности  $\phi_n^{(k)}$  можно восстановить из  $z$ -образа  $\Phi^{(k)}(z)$ , то задача нахождения  $\{\phi_n^{(k)}\}$ ,  $k=1,2,\dots$  сводится к поиску таких  $\Phi^{(k)}(z)$ , которые удовлетворяют (29).

Одним из возможных решений (29) является [11]

$$\Phi^{(k)}(z) = \Lambda^{(k)}(z) = \sqrt{1-\alpha} \frac{(z^{-1}-\alpha)^k}{(1-\alpha z^{-1})^{k+1}}, \quad |\alpha| < 1. \quad (30)$$

Этот случай соответствует дискретным последовательностям Лагерра, которые формируют полный ортонормированный базис в пространстве  $\ell^2$  причинных последовательностей с конечной энергией. Последовательность Лагерра  $k$ -го порядка в явной форме выражается следующим образом [11]:

$$\lambda^{(k)}(n) = \sqrt{1-\alpha^2} \sum_{m=0}^{\min(k,n)} (-1)^{m+k} \frac{(n+k-m)!}{m!(n-m)!(k-m)!} \alpha^{k+n-2m},$$

$k, n = 0, 1, \dots$

На рис. 10 представлены примеры нескольких последовательностей Лагерра.

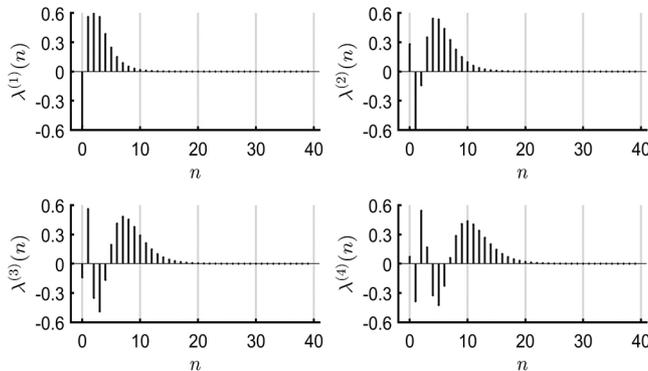


Рис. 10. Первые четыре последовательности Лагерра, значение параметра  $\alpha = 0,5$

Z-преобразование последовательностей Лагерра (30) удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$\Lambda^{(k+1)}(z) = A(z)\Lambda^{(k)}(z) = A(z)^k \Lambda^{(0)}(z), \quad (31)$$

где

$$A(z) = \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \quad (32)$$

передаточная функция устойчивого, детерминированного всепропускающего фильтра первого порядка. Иногда фильтр, описываемый передаточной функцией  $A(z)$ , называют *фазовым звеном*. Частотная характеристика фазового звена равна  $A(e^{j\omega}) = e^{-j\theta(\omega)}$ , где

$$\theta(\omega) = \omega + \arctg\left(\frac{\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos \omega}\right). \quad (33)$$

Для дискретного временного сигнала  $x(n)$  его представление в базисе последовательностей Лагерра имеет вид:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^{(k)}(n), \quad (34)$$

где

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \lambda^{(k)}(n). \quad (35)$$

Выражение (35) можно интерпретировать как линейную неинвариантную во времени операцию фильтрации сигнала  $x(n)$  импульсной характеристикой, которая в соответствии с (31) обладает важным свойством

$$h(k+1, n) = h(k, n) * a(n), \quad (36)$$

где  $a(n)$  – импульсная характеристика фазового звена (32).

Вспомним, что для обычной линейной инвариантной во времени системы уравнение свертки имеет вид

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(m-n). \quad (37)$$

Если мы хотим воспользоваться (37) для вычисления (35), то необходимо на вход подавать обращенный во времени сигнал  $x(-n)$  и использовать импульсную характеристику  $h(k, n)$ :

$$y_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) h(k, m-n). \quad (38)$$

Вычисляя (38) в момент времени  $m = 0$ , получаем

$$y_k(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) h(k, -n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h(k, n) = u_k. \quad (39)$$

Таким образом, устанавливается, что вычислить коэффициенты Лагерра  $u_k$  из выражения (35) можно при помощи операции линейной фильтрации (37), если подать на вход обращенную во времени последовательность  $x(n)$  и зафиксировать выход фильтра в нулевой момент времени.

Схема для итеративного вычисления коэффициентов Лагерра, основанная на выражениях (35), (39) и рекурсии (31), (36), показана на рис. 11.

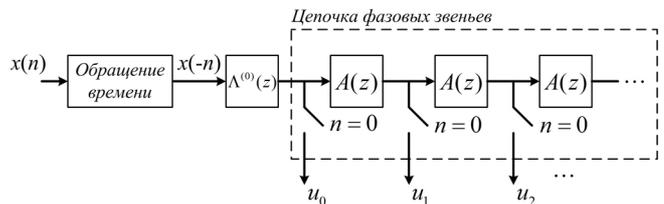


Рис. 11. Структура для вычисления коэффициентов Лагерра

Поскольку последовательности Лагерра образуют полную систему, исходный сигнал всегда можно восстановить по коэффициентам Лагерра. Структура системы синтеза, реализующая выражение (34), показана на рис. 12.

В приведенной схеме на вход цепочки фазовых звеньев подается дельта-импульс, при этом на  $k$ -м по счету выходе цепочки происходит формирование последовательности Лагерра  $k$ -го порядка  $\lambda^{(k)}(n)$ . Далее в соответствии с выражением (34) производится умножение каждой последовательности на соответствующий коэффициент разложения, после чего все последовательности суммируются.

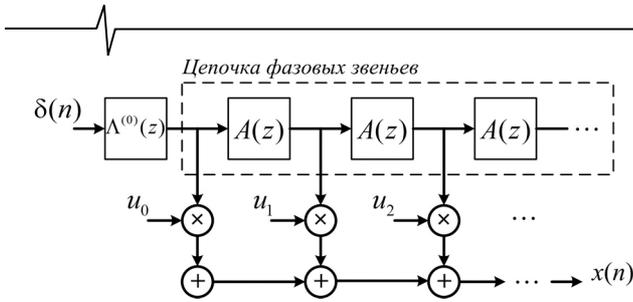


Рис. 12. Структура для восстановления исходного сигнала по коэффициентам Лагерра

Поскольку структура, показанная на рис. 11, является антикаузальной системой (англ. *anticausal system*), то её реализация возможна только в случае, когда входной сигнал ограничен фиксированным числом отсчетов, т.е.  $x(n) \neq 0$  только для  $n = 0, 1, \dots, N$ . В этом случае возможно выполнение операции обращения времени путем введения конечной задержки; получаемый при этом сигнал  $y(n) = x(N - n)$  подается на фильтр  $\Lambda^{(0)}(z)$ , выход которого подается в цепочку фазовых звеньев. При этом переключатели в цепочке фазовых звеньев на рис. 11 замыкаются в момент времени  $n = N$ .

При практическом использовании схемы синтеза на рис. 12 цепочка фазовых звеньев ограничивается конечным числом элементов, которое должно быть равно

числу коэффициентов Лагерра  $u_k$ . В работе [11] произведена оценка числа коэффициентов разложения Лагерра  $K$  в зависимости от длины входного сигнала  $N$  и от коэффициента  $\alpha$  в формуле передаточной функции фазового звена (32):

$$K \geq \frac{N(1+|\alpha|)}{1-|\alpha|}. \quad (40)$$

Из приведенного выражения легко заметить, что чем больше значение  $|\alpha|$ , т.е. чем ближе полюс всепропускающего фильтра к единичной окружности, тем больше коэффициентов Лагерра требуется для представления сигнала. Минимальное значение (40) достигается при  $\alpha$  равном нулю, когда фазовое звено вырождается в простой элемент задержки, при этом  $K = N$ .

Приведем несколько примеров представления сигналов в виде коэффициентов Лагерра. На рис. 13 представлен ступенчатый сигнал длины  $N = 100$ . Выбирая значение  $\alpha = 0,5$  по формуле (40) получаем, что необходимое число коэффициентов Лагерра равно  $K = 300$ . Из приведенных на рис. 13 графиков видно, что аппроксимация ступенчатого сигнала, состоящего из 100 отсчетов, при помощи 300 коэффициентов Лагерра дает ошибку реконструкции менее, чем 0,01.

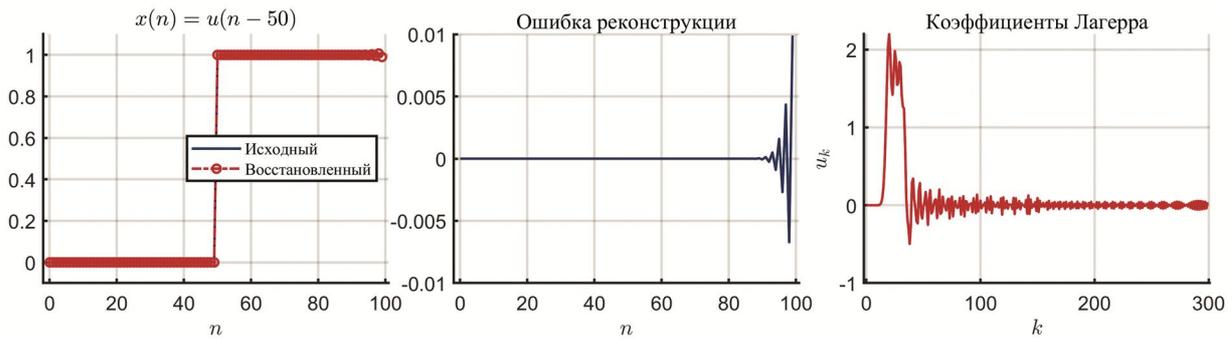


Рис. 13. Разложение ступенчатого сигнала по коэффициентам Лагерра

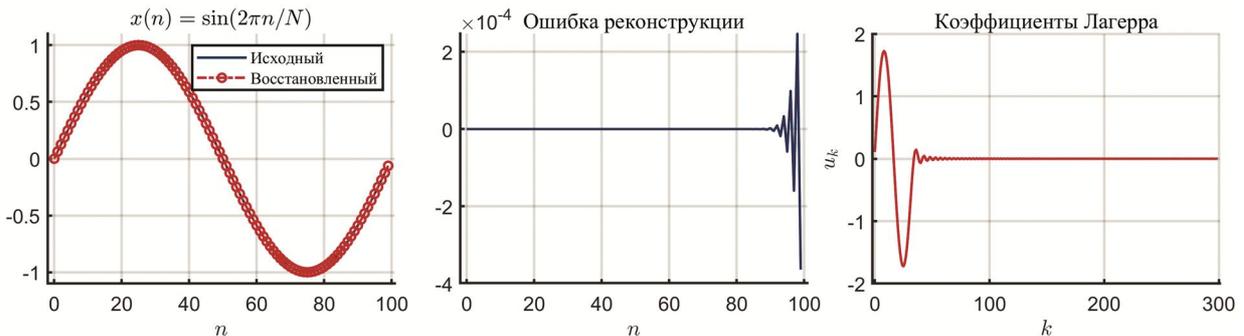


Рис. 14. Разложение низкочастотного синусоидального сигнала по коэффициентам Лагерра

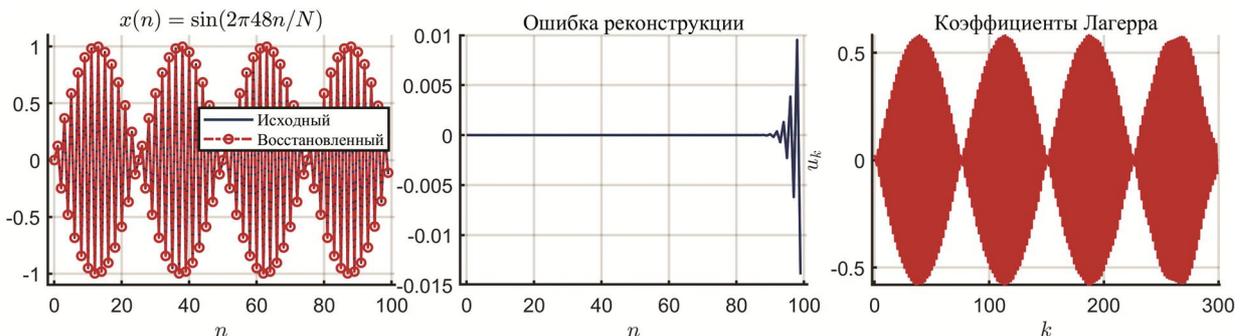


Рис. 15. Разложение высокочастотного синусоидального сигнала по коэффициентам Лагерра

На рис. 14 показан пример представления низкочастотного синусоидального сигнала в виде коэффициентов Лагерра. Получающаяся ошибка реконструкции в данном примере имеет уровень меньше  $5 \cdot 10^{-4}$ . Примечательно, что последовательность коэффициентов Лагерра в этом случае также имеют форму синусоиды.

На рис. 15 показан пример представления высокочастотного синусоидального сигнала в виде коэффициентов Лагерра. Ошибка реконструкции имеет в данном случае такой же уровень, как и в примере со ступенчатым сигналом. Внешний вид последовательности коэффициентов Лагерра повторяют форму анализируемой синусоиды, являясь при этом «растянутой» версией исходного сигнала.

Сравнивая представления сигналов, показанные на рис. 14 и 15, можно сделать вывод, что в случае низкочастотных сигналов происходит их «сжатие» в области коэффициентов Лагерра, в том время, как для высокочастотных сигналов происходит их «растяжение». Как будет показано в дальнейшем степень данного эффекта зависит от значения коэффициента  $\alpha$ .

**Деформация частотной оси**

Разложение Лагерра связано с особым видом деформации частотной оси [11], [12]. Рассмотрим Z-преобразование от правой и левой части выражения (34)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Lambda^{(k)}(z). \tag{41}$$

Далее, применяя рекурсивное соотношение (31) к выражению (41), получаем

$$X(z) = \Lambda^{(0)}(z) \sum_{k=0}^{\infty} u_k A(z)^k = \Lambda^{(0)}(z) U(A(z)^{-1}). \tag{42}$$

Поскольку частотная характеристика фазового звена равна  $A(e^{j\omega}) = e^{-j\theta(\omega)}$ , то

$$X(e^{j\omega}) = \Lambda^{(0)}(e^{j\omega}) U(e^{j\theta(\omega)}), \tag{43}$$

где

$$U(e^{j\theta(\omega)}) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-jk\theta(\omega)}, \tag{44}$$

а  $\theta(\omega)$  задается выражением (33).

Анализируя (43), можно прийти к простой интерпретации, что частотный спектр последовательности коэффициентов Лагерра  $u_k$  является частотной деформированной версией исходного частотного спектра  $X(e^{j\omega})$  взвешенного на частотную характеристику обратную к  $\Lambda^{(0)}(e^{j\omega})$ . Сама деформация частотной оси  $\Omega = \theta(\omega)$  управляется параметром  $\alpha$  фазового звена (32). В Z-области это отображение описывается заменой

$$z^{-1} \rightarrow A(z), \tag{45}$$

которое является уникальным однозначным отображением единичной окружности на себя, чей модуль равен единице [12]. На рис. 16 показано семейство кривых, описывающих деформацию частотной оси, происходящую вследствие отображения (45).

Отметим, что предложенное в начале 1970-х А. Оппенгеймом и др. отображение (45) изначально использовалось как способ преобразования сигнала к та-

кому представлению, чтобы можно было использовать обычный алгоритм быстрого преобразования Фурье для оценки спектра исходного сигнала в точках единичной окружности расположенных нерегулярно [12], [13].

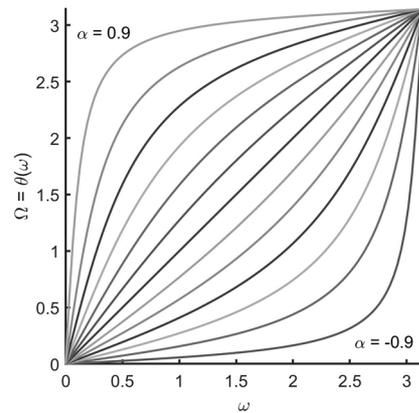


Рис. 16. Семейство кривых описывающих деформацию частотной оси, значение параметра  $\alpha$  пробегает значения от  $-0,9$  до  $0,9$  с шагом  $0,15$

Поэже, в конце 1970-х, П. Вари [3, 4] рассмотрел структуру неравнополосного банка фильтров, получающегося путем простой замены элементов задержки полифазной структуры (см. рис. 9) на фазовые звенья. Другими словами, он предложил использовать отображение (45) не к сигналу, а к дискретной системе. Такая замена элементов в системе получила название – *фазовое преобразование* (англ. allpass transform). Подобная смена парадигмы открыла путь к обработке сигнала с использованием деформации частотной оси в реальном времени, поскольку фазовое преобразование не требует выполнения операции обращения времени (см. рис. 11). На рис. 17 схематично показано применение фазового преобразования к полифазной структуре банка фильтров.

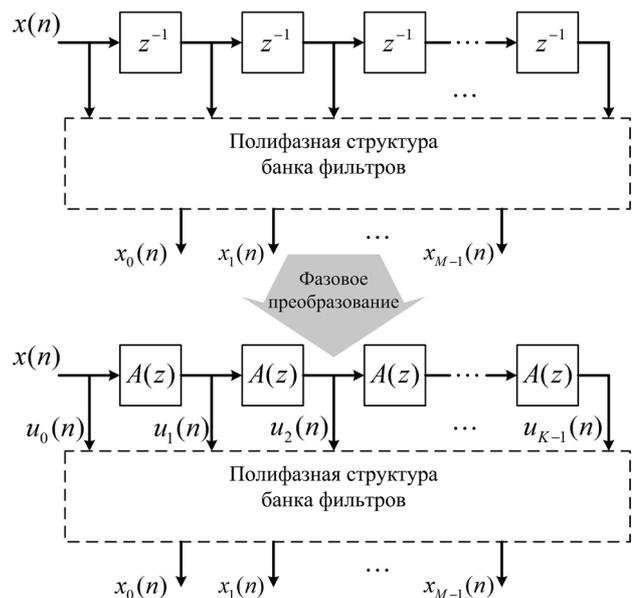


Рис. 17. Фазовое преобразование

Для лучшего понимания процессов, происходящих в дискретной системе под действием фазового преобразования, рассмотрим прохождение сигнала (состоящего

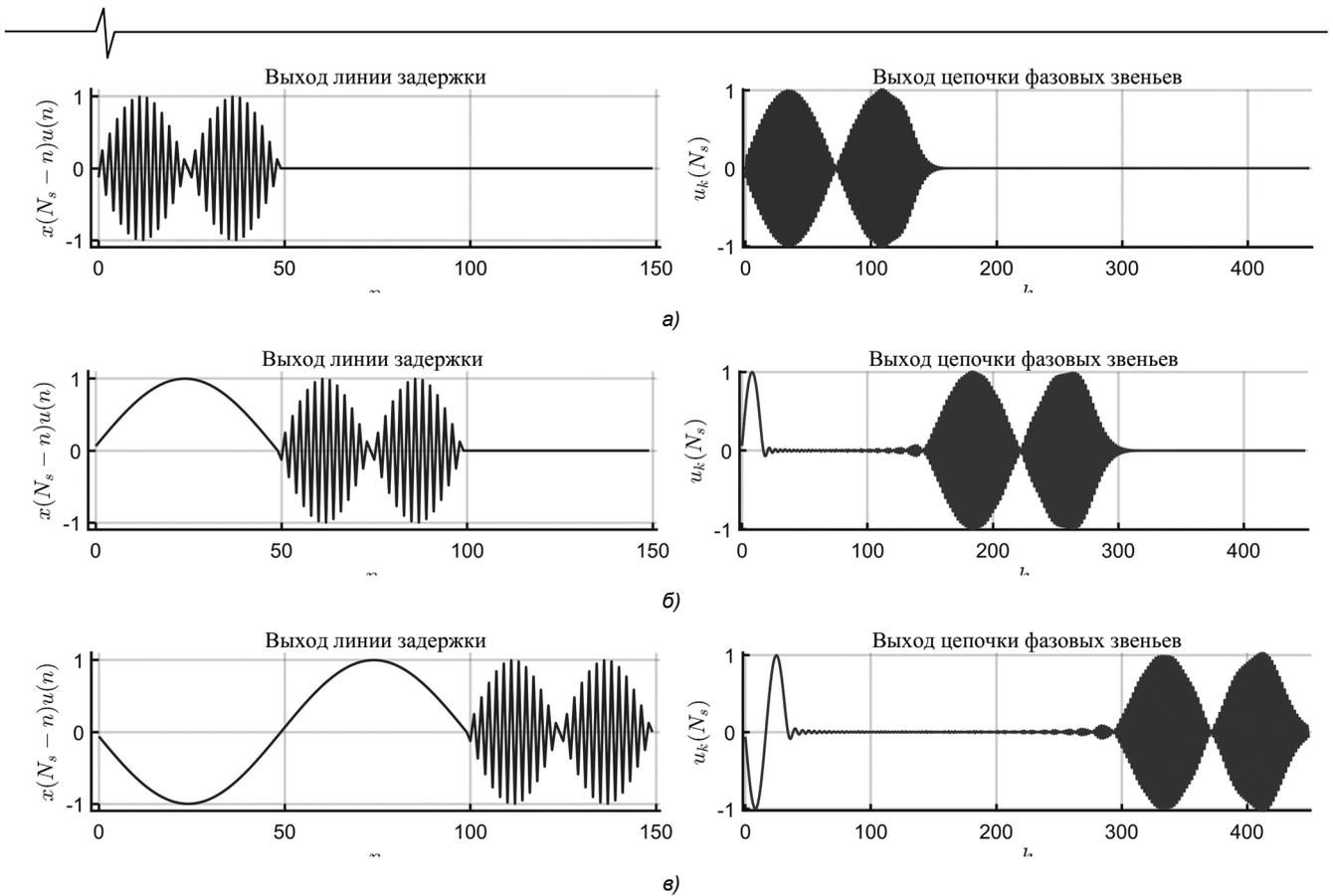


Рис. 18. Прохождение сигнала  $x(n) = \sin(2\pi \cdot 0,48n)(u(n) - u(n - 50)) + \sin(2\pi \cdot 0,01n)(u(n - 50) - u(n - 150))$  через линию задержки и через цепочку фазовых звеньев  $\alpha = 0,5$ : а) задержка  $N_s = 50$ ; б) задержка  $N_s = 100$ ; в) задержка  $N_s = 150$

из двух синусоидальных компонент следующих одна за другой) через обычную линию задержки и через цепочку фазовых звеньев (рис. 18).

Поведение сигнала в линии задержки вполне ясно: по мере увеличения времени сигнал равномерно сдвигается вправо. Процесс распространения сигнала в цепочке фазовых звеньев гораздо менее очевидный. Высокочастотная компонента сигнала «растягивается» в пространстве выходов цепочки фазовых звеньев, в то время, как низкочастотная компонента наоборот «сжимается». Также можно легко заметить, что скорость распространения высокочастотной компоненты в цепочке фазовых звеньев выше, чем скорость низкочастотной компоненты. Так происходит, поскольку цепочка фазовых звеньев является дисперсной системой. Вообще отображение частот исходного сигнала  $\omega$  в область деформированных частот  $\Omega$  описывается фазочастотной характеристикой фазового звена (33):

$$\theta : \omega \rightarrow \Omega. \quad (46)$$

Далее более подробно рассмотрим применение фазового преобразования к полифазной структуре ДПФ-модулированного банка фильтров.

#### Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров на основе фазового преобразования

Целью применения фазового преобразования к полифазной структуре банка фильтров является получение неравнополосной версии банка фильтров. Такие банки востребованы в приложениях, где необходимо моделировать восприятие звуковой информации слухо-

вой системой человека. На рис. 19 показана полифазная структура ДПФ-модулированного банка фильтров аналогичная той, что показана на рис. 9, но к которой применено фазовое преобразование (см. рис. 17).

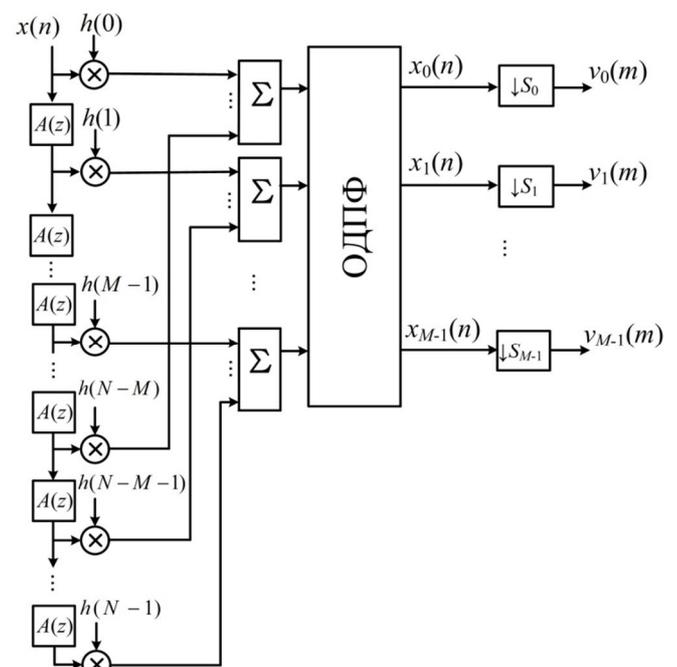


Рис. 19. Структура полифазного неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров полученного путем фазового преобразования

В отличие от структуры банка фильтров на рис. 9 в данном случае полифазные компоненты показаны в развернутом виде. Каждый сумматор отвечает за формирование выхода соответствующей полифазной компоненты фильтра-прототипа. После блока, обратного ДПФ, следуют блоки, выполняющие децимацию. Поскольку ширина полосы каждого канала банка фильтров отлична, то в каждом канале применяется свой коэффициент децимации  $S_k$ .

Уже отмечалось, что операция децимации может быть внесена и в структуру равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров (рис. 9). В этом случае во всех каналах необходимо использовать один и тот же коэффициент децимации, поскольку все полосы имеют равную ширину. Неодинаковые значения коэффициентов  $S_k$  в структуре неравнополосного банка фильтров вызывают небольшое неудобство с точки зрения аппаратной или программной реализации, зато позволяют значительно снизить число операций, выполняемых при последующей обработке канальных сигналов. В некоторых случаях [14] удается использовать один и тот же коэффициент децимации во всех каналах банка фильтров. Эффективность такого подхода заключается в том, что в этом случае блоки децимации можно перенести внутрь полифазной структуры банка фильтров, поставив их сразу после цепочки фазовых звеньев. Это позволяет значительно уменьшить число операций, необходимых для реализации банка фильтров.

На рис. 20 показан процесс деформации частотной оси под действием фазового преобразования (45) и получение неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров.

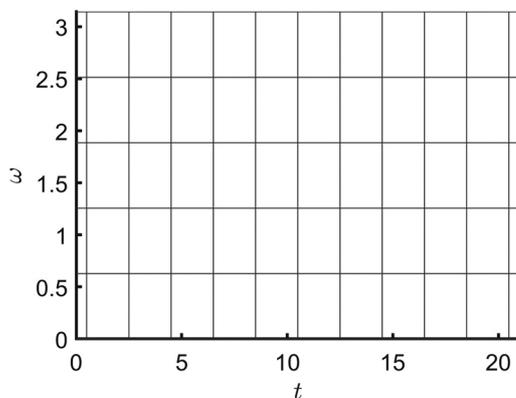
Из приведенного рисунка видно, что банк фильтров является равнополосным относительно деформированной частотной оси  $\Omega$ , однако если при помощи обратной функции

$$\theta^{-1} : \Omega \rightarrow \omega, \tag{47}$$

перейти к исходной оси частот, то ширина полос фильтров трансформируется, образуя неравнополосный банк фильтров.

На рис. 21 сравниваются разрешение ДПФ-модулированного банка фильтров и его неравнополосной версии, полученной при помощи фазового преобразования.

Можно заметить, что в результате фазового преоб-



разования изменяется не только частотные, но и временные границы частотно-временного покрытия. Этот эффект объясняется тем, что в результате фазового преобразования изменяется ФЧХ дискретной системы (в данном случае банка фильтров), которая наследует форму ФЧХ фазового звена (33). Как следствие этого, изменяется и групповая задержка, которая для фазового звена равна [11]:

$$\tau_A(\omega) = \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}. \tag{48}$$

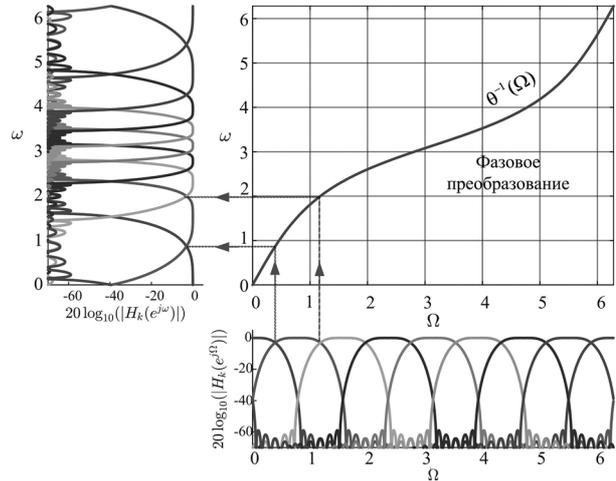


Рис. 20. Процесс получения неравнополосного банка фильтров с использованием фазового преобразования, коэффициент определяющий степень деформации частотной оси  $\alpha = -0,4$

Если исходный банк фильтров имел фиксированную групповую задержку  $D$  для всех частот, то после фазового преобразования групповая задержка банка фильтров станет зависимой от частоты и равной  $D\tau_A(\omega)$ .

Особенностью неравнополосного банка фильтров является и то, что его полосы пропускания  $\Delta\omega_k$  монотонно увеличиваются по мере увеличения центральной частоты  $\omega_{0_k}$ . Таким образом, получается, что неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров позволяет получить разложение близкое к анализу с постоянной добротностью  $Q$ , которое играет важную роль во многих приложениях связанных с обработкой звука.

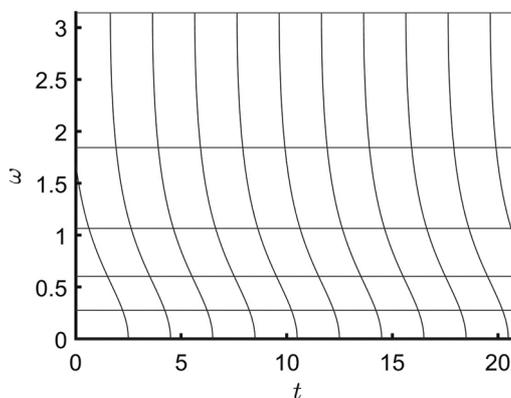


Рис. 21. Схематичное представление частотно-временного разрешения исходного ДПФ-модулированного банка фильтров (слева) и после фазового преобразования (справа),  $\alpha = -0,4$

#### 4. Анализ частотно-временного разрешения банков фильтров

В данном разделе рассматриваются конфигурации частотно-временного покрытия, получающиеся при использовании рассмотренных выше банков фильтров. С этой целью, используя импульсные и частотные характеристики фильтров, входящих в состав банка, рассчитываются прямоугольники Гейзенберга при помощи численного интегрирования выражений для временной и частотной протяженности, полученные на основе (3) и (5).

Частотную протяженность предлагается вычислять как:

$$\sigma_{\omega}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\omega - \omega_0)^2 |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (49)$$

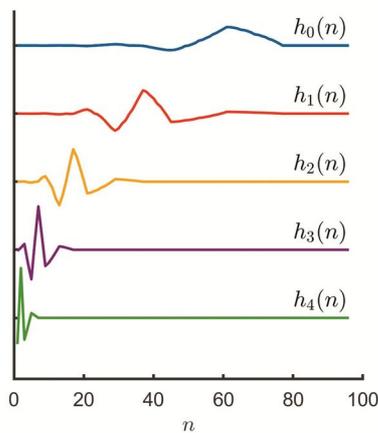
где  $\omega_0$  – центральная частота полосы пропускания фильтра  $H_k(e^{j\omega})$ .

В отличие от (5) в выражении (49) интегрирование ведется на интервале от  $-\pi$  до  $\pi$  поскольку рассматриваемые банки фильтров являются системами дискретного времени и, следовательно, их частотные характеристики являются  $2\pi$ -периодическими функциями.

Временную протяженность предлагается вычислять как:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau_0)^2 |h_k(t)|^2 dt \quad (50)$$

где  $\tau_0$  – групповая задержка  $k$ -го фильтра на частоте  $\omega_{0_k}$ .



В отличие от (3) в выражении (50) фигурирует параметр групповой задержки на частоте  $\omega_{0_k}$  поскольку рассматриваемые в нашей работе импульсные характеристики банков фильтров  $h_k(t)$  не обязательно являются симметричными четными функциями (как  $w(t)$  в выражении (3)). Поэтому предлагается считать, что «центр» импульсной характеристики фильтра совпадает с групповой задержкой фильтра на центральной частоте  $\omega_{0_k}$ .

В качестве банка фильтров, основанного на вейвлет-преобразовании, рассматривался 5-канальный диадический банк фильтров, структура которого приведена на рис. 22.

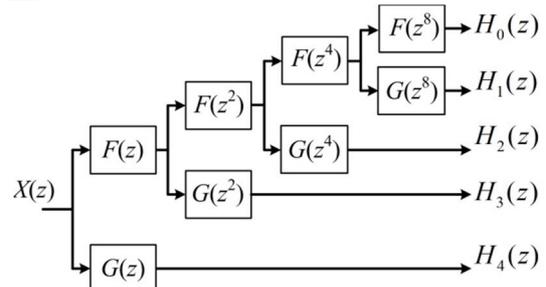


Рис. 22. Диадический банк фильтров

Для получения импульсных характеристик банка фильтров использовались вейвлет-функции Фейера-Коровкина шестого порядка [15]. На рис. 23 приведены импульсные характеристики банка, а также его частотное представление.

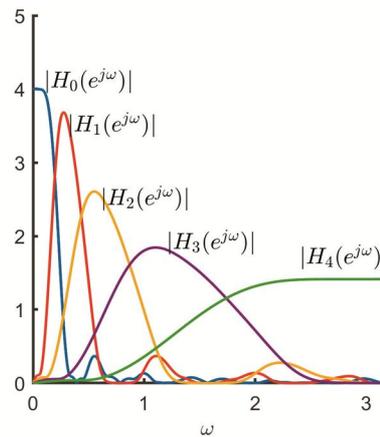


Рис. 23. Диадический банк фильтров: представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

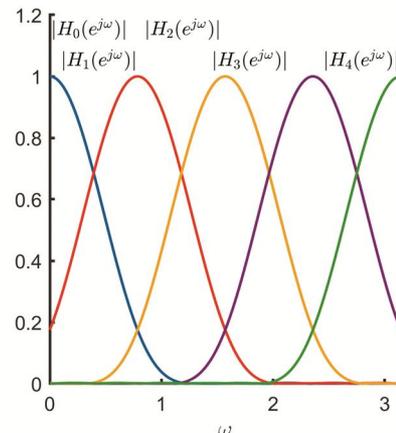
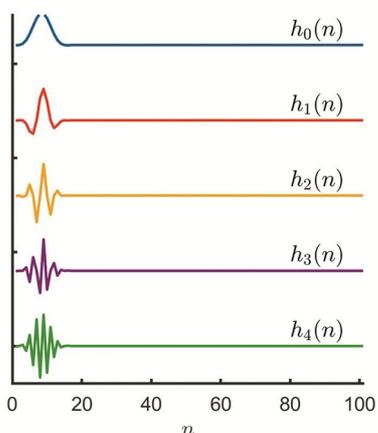


Рис. 24. ДПФ-модулированный банк фильтров: представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

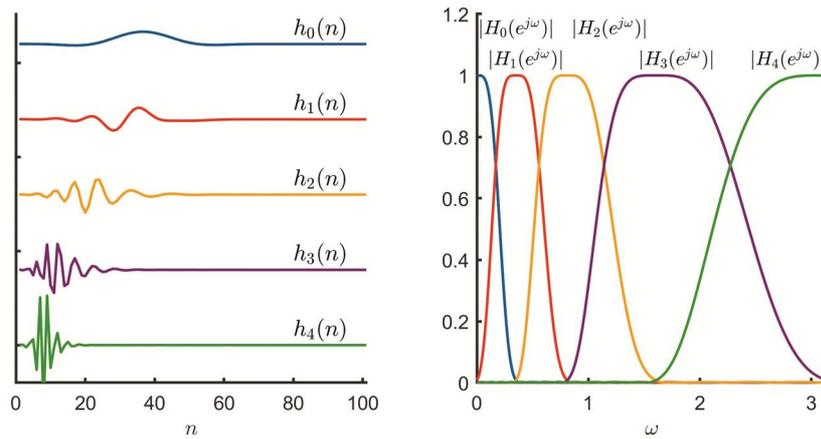


Рис. 25. Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров ( $\alpha = -0,4$ ): представление во временной (слева) и в частотной области (справа)

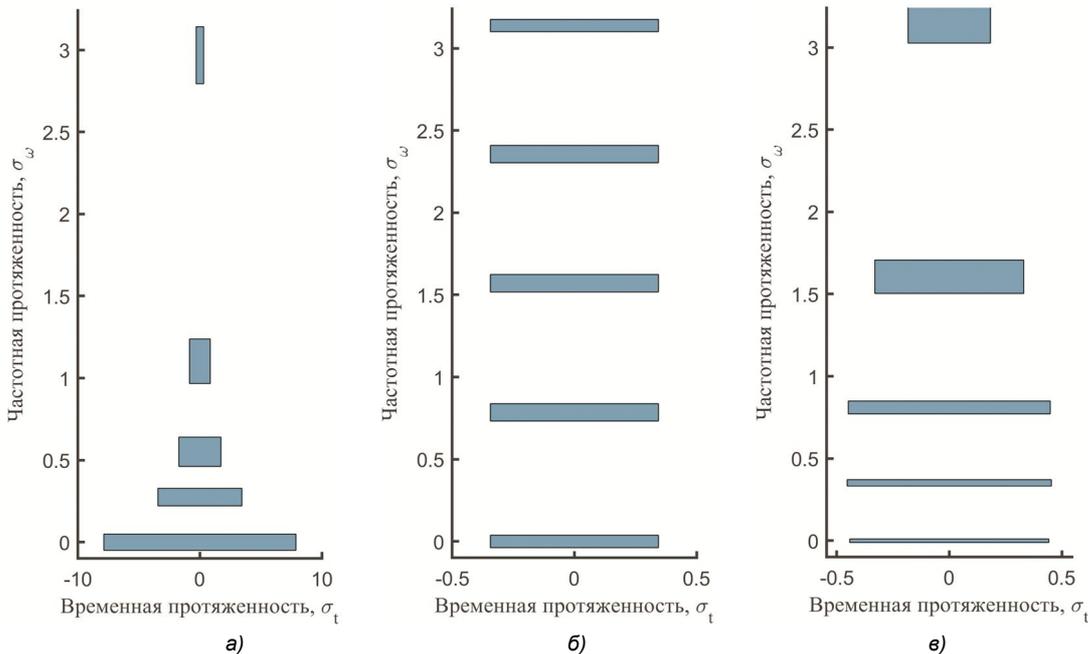


Рис. 26. Частотно-временное покрытие: а) банка фильтров на основе вейвлет преобразования;

б) ДПФ-модулированного банка фильтров; в) неравнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров ( $\alpha = -0,4$ )

Вторым был рассмотрен 5-канальный ДПФ-модулированный. Получаемая в данном случае частотная декомпозиция сигнала соответствует кратковременному преобразованию Фурье. Импульсные характеристики, а также АЧХ банка фильтров приведены на рис. 24.

Также рассматривался 5-канальный неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров, полученный применением фазового преобразования к банку фильтров, показанному на рис. 24. Результирующие импульсные и частотные характеристики приведены на рис. 25.

Можно заметить, что под действием фазового преобразования импульсные характеристики банка фильтров стали больше напоминать импульсные характеристики вейвлет-банка фильтров (см. рис. 23). Низкочастотный фильтр имеет наибольшую временную протяженность, в то время как высокочастотный фильтр, наоборот, имеет самую лучшую временную локализацию. Однако в отличие от вейвлет-банка фильтров ДПФ-модулированный банк на основе фазового преобразования имеет лучшую частотную селективность, которую

он наследует от равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров (см. рис. 24).

Результат вычисления частотной и временной протяженности (49)-(50) для рассматриваемых банков фильтров показан на рис. 26. Для каждого банка фильтров получены 5 прямоугольников Гейзенберга, которые отражают частотную и временную локализацию, достигаемую при помощи соответствующего фильтра, входящего в состав банка.

На рис. 26, а изображено частотно-временное покрытие, получающееся при использовании вейвлет-банка фильтров. Можно заметить, что временная протяженность уменьшается вдвое при переходе от одного канала к другому. Частотная протяженность возрастает с увеличением центральной частоты, что соответствует принципу анализа сигналов с постоянной добротностью  $Q$ .

Частотно-временное покрытие равнополосного ДПФ-модулированного банка фильтров, показанное на рис. 26, б вполне ожидаемо имеет регулярную структуру. Частотная и временная протяженность не зависят от номера центральной частоты фильтра.



Неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров отличается нерегулярной структурой частотно-временного покрытия (рис. 26, в). В области низких частот временная протяженность фильтров приблизительно равна, но уменьшается по мере увеличения центральной частоты фильтра. Также с ростом центральной частоты фильтра наблюдается увеличение частотной протяженности, что как и в случае с вейвлет-банком фильтров, соответствует принципу анализа с постоянной добротностью  $Q$ . Кроме того, надо отметить, что частотно-временное покрытие зависит от параметра  $\alpha$  и может гибко изменяться, в то время как покрытие, получающееся в вейвлет-банке фильтров, зависит от структуры банка фильтров (см. рис. 22).

### Заключение

В работе подробно рассмотрены три метода частотно-временной декомпозиции сигнала: кратковременное преобразование Фурье, вейвлет-преобразование и использование неравнополосного банка фильтров, полученного путем фазового преобразования. Показано, что кратковременное преобразование Фурье, а также вейвлет-преобразование можно рассматривать как декомпозицию сигнала с помощью банка фильтров. Дана характеристика указанных методов относительно получаемого в результате частотно-временного покрытия. С использованием предложенных выражений для вычисления временной и частотной протяженности характеристик фильтров, входящих в состав банка получены оценки прямоугольников Гейзенберга для трех видов банков фильтров. На основе полученных данных можно сделать вывод, что кратковременное преобразование Фурье и соответствующий ему ДПФ-моделированный банк фильтров следует применять в том случае, когда требуется разложить сигнал на «атомы» равномерно покрывающие частотно-временную плоскость. Банк фильтров на основе вейвлет-преобразования, а также ДПФ-модулированный банк фильтров, получающийся путем фазового преобразования, хорошо подходят для выполнения анализа с постоянной добротностью  $Q$ . Такой анализ особенно важен в приложениях, где необходимо моделировать восприятие звуковой информации слуховой системой человека. Однако неравнополосный ДПФ-модулированный банк фильтров имеет некоторое преимущество над вейвлет-банком фильтров в том, что позволяет получить лучшую частотную локализацию в области нижних частот. Кроме того, следует отметить гибкость подхода, основанного на использовании фазового преобразования. Степень деформации частотной оси зависит от одного параметра  $\alpha$ , изменяя который, можно плавно управлять частотно-временным покрытием.

### Литература

1. Рабинер Л.Р. Цифровая обработка речевых сигналов / Л.Р. Рабинер, Р.В. Шафер. – М.: Радио и связь, 1981. – 496 с.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
3. Vary P. Digital filter banks with unequal resolution // Short Communication Digest of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 1980. – Pp. 41-42.
4. Vary P. «Ein Beitrag zur Kurzzeitspektralanalyse mit digitalen Systemen» (PhD thesis), [Electronic resource]. 1978. Mode of access: [https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIB-KAT%3A02\\_0659989](https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIB-KAT%3A02_0659989).
5. Quatieri T.F. Discrete-time speech signal processing: principles and practice / Prentice Hall Signal Processing Series. – Prentice Hall PTR, 2002. – 781 p.
6. Goodwin M.M. The STFT, sinusoidal models, and speech modification // Springer Handbook of Speech Processing. – Springer, 2008. – Pp. 229-258.
7. Shensa, M. J. The discrete wavelet transform: wedding the a trous and mallat algorithms // IEEE Transactions on signal processing. –1992. – Vol. 40, no. 10. – Pp. 2464-2482.
8. Vaidyanathan P.P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial // Proceedings of the IEEE. –1990. – Vol. 78, no. 1. – Pp. 56-93.
9. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
10. Broome P.W. Discrete orthonormal sequences / P.W. Broome // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1965. – Vol. 12, no. 2. – Pp. 151-168.
11. Evangelista G. Frequency-warped filter banks and wavelet transforms: a discrete-time approach via laguerre expansion / G. Evangelista, S. Cavaliere // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998, vol. 46, no. 10, pp. 2638-2650.
12. Оппенгейм А. Вычисление спектров с неравномерным разрешением посредством быстрого преобразования Фурье / А. Оппенгейм, Д. Джонсон, К. Штейглиц // ТИИЭР: пер. с англ. 1971. – Т. 59, № 2. – С. 138-139.
13. Oppenheim A. Discrete representation of signals. A. Oppenheim, D. Johnson, K. Steiglitz // Proceedings of the IEEE. 1972, vol. 60, pp. 681-691.
14. Gülzow T. Comparison of a discrete wavelet transformation and a nonuniform polyphase filterbank applied to spectral-subtraction speech enhancement / T. Gülzow, A. Engelsberg, U. Heute // Signal processing.– 1998. – Vol. 64, no. 1. – pp. 5-19.
15. Nielsen M. On the construction and frequency localization of finite orthogonal quadrature filters / M. Nielsen // Journal of Approximation Theory. 2001, vol. 108, Pp. 36-52.

УДК 621.391.13

## ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ В СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ СВЯЗИ

*Быховский М.А., доктор технических наук, профессор МТУСИ, e-mail: bykhmark@gmail.com*

### EFFECTIVE SIGNAL TRANSMISSION METHODS IN SATELLITE COMMUNICATIONS SYSTEMS

*Bykhovskiy M.A.*

*The article is devoted to the study of the characteristics of satellite communications systems (SCS) that use multidimensional surface-spherical signal ensembles (SSSE) to transmit messages. It is shown that such systems are significantly superior to systems created in accordance with the DVB-S2 standard, providing high reliability of the reception of transmitted messages with the highest possible spectral and energy efficiency.*

*It was noted that SSSE systems are simpler in technical implementation compared to SCS of the DVB-S2 standard. The use of multidimensional SSSE also simplifies the implementation of different operating modes, allowing you to adapt the transmission of messages with high reliability to possible changes in the propagation conditions of radio waves in the satellite communication channel. This is due to the fact that in systems with SSSE there is no need to use error correction codes of large length and very complex decoders.*

*It is shown that in systems with SSSE the length of transmitted signals is significantly less than the length of code combinations in SCS standard DVB-S2. Therefore, the use of communication systems with SSSE is especially attractive in cases where it is necessary to transmit short informational messages and the transmission time should be minimally possible.*

**Key words:** Satellite communications, signal transmission methods, spectral and energy efficiency, message coding.

**Ключевые слова:** метод цифровой модуляции, перестановочная модуляция, энергетическая эффективность систем связи, спутниковая связь.

#### Введение

В [1] был дан анализ систем спутниковой связи, построенных по стандарту DVB-S2 [2]. В этих системах для повышения надежности связи применяются низкоплотностные коды (коды LDPC) [3], кодовые комбинации которых имеют большую длину ( $N_b = 16000$  или  $64000$  бит) и которые имеют разную кодовую скорость ( $R_c$ ). В них используются двумерные ансамбли сигналов, позволяющие передавать сообщения с разной удельной скоростью ( $R_f$ ). Для этого применяются сигналы QPSK ( $R_f = 2$ ), 8-PSK ( $R_f = 3$ ), 16-APSK ( $R_f = 4$ ) и 32-APSK ( $R_f = 5$ ) бит/сек·Гц, а кодовая скорость кода LDPC составляет  $R_c = 1/4, 3/4, \dots, 5/6, \dots, 9/10$ .

Шенноном было показано [4], что системы связи, в которых для передачи сообщений используются оптимальные многомерные ПСАС, позволяют обеспечить высокие спектральную и энергетическую эффективность. В [5...8] подробно описаны методы модуляции и демодуляции для таких ансамблей сигналов.

В данной статье исследуются характеристики ССС, в которых сообщения передаются с использованием оптимальных ПСАС, и дано их сравнение с характеристиками систем связи, построенными на основе стандарта DVB-S2 [2]. Результаты данного исследования показали, что такие ансамбли сигналов позволяют существен-

*Статья посвящена исследованию характеристик систем спутниковой связи, использующих для передачи сообщений многомерные поверхностно-сферические ансамбли сигналов (ПСАС). Показано, что такие системы существенно превосходят по своим характеристикам системы, создаваемые в соответствии со стандартом DVB-S2, обеспечивая высокую достоверность приема переданных сообщений с максимально возможной спектральной и энергетической эффективностью.*

*Отмечено, что системы ПСАС более просты в технической реализации по сравнению с системами спутниковой связи (ССС) стандарта DVB-S2. Применение многомерных ПСАС упрощает также реализацию разных режимов работы, позволяющих адаптировать передачу сообщений с высокой надежностью к возможным изменениям условий распространения радиоволн в канале спутниковой связи. Это связано с тем, что в системах с ПСАС нет необходимости применения помехоустойчивых кодов большой длины и весьма сложных декодеров.*

*Показано, что в системах с ПСАС длина передаваемых сигналов существенно меньше, чем длина кодовых комбинаций в ССС стандарта DVB-S2. Поэтому применение систем связи с ПСАС особенно привлекательно в тех случаях, когда необходимо передавать короткие информационные сообщения и время их передачи должно быть минимально возможным.*

но улучшить характеристики ССС. Это указывает на целесообразность доработки стандарта DVB-S2 в части, касающейся методов передачи сигналов и сообщений.

#### **Энергетические потери систем связи, в которых применяются оптимальные АС, и нормированная длительность оптимальных сигналов**

Знаменитая теорема Шеннона [4] устанавливает со-

отношение между основными параметрами систем связи  $\rho_s$  (или  $\rho_b$ ) – минимально возможным отношением сигнал/шум на входе демодулятора (или отношением сигнал/шум, приходящимся на один информационный бит сообщения), и удельной скоростью передачи сообщений  $R_f$  бит/сек/Гц. Это соотношение имеет следующий вид

$$R_f = \log_2(1 + \rho_s), \text{ где } \rho_s = \rho_b R_f. \quad (1)$$

Из (1) следуют формулы, определяющие зависимости  $\rho_s(R_f)$  и  $\rho_b(R_f)$ :

$$\rho_b(R_f) = (2^{R_f} - 1)/R_f \text{ и } \rho_s(R_f) = (2^{R_f} - 1), \quad (2)$$

которые представлены на рис. 1. Согласно Шеннону [4], значения  $\rho_s$  и  $\rho_b$  из (2) являются предельными (их часто называют также «пределом Шеннона»): если на входе демодулятора обеспечено отношение сигнал/шум, равное  $\rho_s$  (или  $\rho_b$ ), то, в принципе, может быть создана система связи, в которой сообщения будут передаваться с максимально возможной удельной скоростью (или, что то же самое, с максимальной спектральной эффективностью), равной  $R_f$ . Причем в такой системе будет обеспечена абсолютная надежность приема сообщений (т.е. вероятность ошибки при демодуляции принятых сигналов равна 0).

Шенноном было также показано [4], что пределы (1) и (2) могут быть достигнуты в том случае, если для передачи сообщений применяются объемно-сферические или поверхностно-сферические ансамбли сигналов. Следуя Шеннону, будем называть систему связи, в которой для передачи сообщений применяются оптимальные ПСАС большой длительности, «идеальной». Из рис. 1 видно, что при  $R_f < 1$  безошибочно передавать сообщения по каналу связи возможно даже в тех случаях, когда  $\rho_s < 1$ , т.е. когда на входе демодулятора мощность принимаемого сигнала меньше мощности шума, причем при  $R_f \rightarrow 0$  предельное отношение сигнал/шум, приходящееся на один информационный бит сообщения, при котором возможно обеспечить абсолютно надежную связь, равно  $10 \cdot \lg(\rho_b) = -1,6$  дБ.

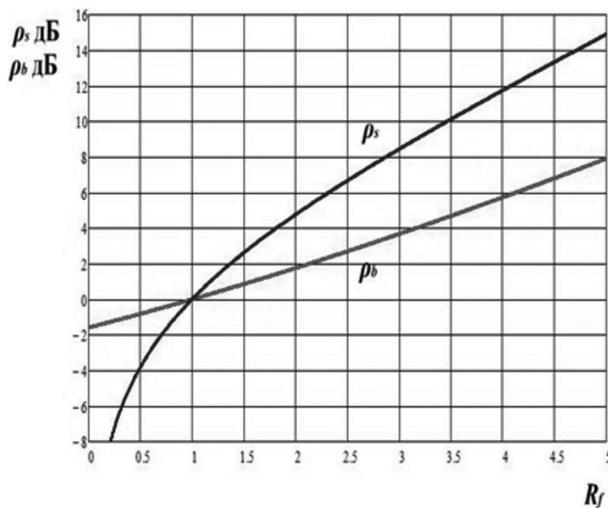


Рис. 1. Пределы Шеннона для  $\rho_s$  – отношения сигнал/шум на входе демодулятора и  $\rho_b$  – отношения сигнал/шум, приходящегося на один информационный бит сообщения

Отметим, что оптимальным АС, позволяющим реализовать систему связи с весьма низкой скоростью передачи сообщений, является ансамбль ортогональных

сигналов, основные характеристики которого были определены еще в 1947 г. в работе В.А. Котельникова. Они описаны во многих публикациях, в частности, в [9].

Из рис. 1 также видно, что если  $R_f > 1$ , то для того, чтобы увеличить в системе связи удельную скорость  $R_f$  на 1 бит/сек/Гц, сохраняя при этом ее абсолютную надежность, энергетику линии ( $\rho_s$ ) связи необходимо повысить на  $\approx 3$  дБ.

В [8] получена обобщенная формула Шеннона, которая имеет вид

$$R_f = \log_2(1 + \rho_s 10^{-0,1\Delta\rho}). \quad (3)$$

В (3) параметр  $\Delta\rho$  (дБ) определяет энергетические потери системы связи, использующей для передачи оптимальные АС конечной длительности, по сравнению с «идеальной» системой, в которой применяются оптимальные сигналы весьма большой длительности. Эти потери зависят как от значения вероятности ошибки ( $P_{ser}$ ) при демодуляции сигналов используемого АС, так и их нормированной длительности (FT) [8]. При этом в (3)

$$\Delta\rho_b = 10 \lg[F(\gamma)], \text{ где } F(\gamma) = (1 + \gamma)e^{w(\gamma)}. \quad (4)$$

В (4)  $w(\gamma) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^2 + \frac{2 \ln(1+\gamma)}{1+\gamma}} - \frac{\gamma}{1+\gamma}$ , а параметр  $\gamma$  равен  $\gamma = \ln(1/P_{ser})/(FT)$ . Следует иметь в виду, что если  $(FT) \gg 1$ , то параметр  $\gamma \ll 1$ . При этом

$$w(\gamma) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^2 + \frac{2 \ln(1+\gamma)}{1+\gamma}} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cong \sqrt{2\gamma} \text{ и } F(\gamma) \cong 1 + \sqrt{2\gamma}. \quad (5)$$

Отметим, что количество информационных бит, которые передаются с помощью одного из сигналов, входящих в оптимальный АС, равно  $N_I = R_f(FT)$ . Из (4) и (5) следует, что при заданном значении  $P_{ser}$  между  $R_f$  и  $N_I$  имеет место следующее соотношение

$$R_f = \frac{(10^{0,1\Delta\rho} - 1)^2 N_I}{2 \ln(1/P_{ser})}. \quad (6)$$

На рис. 2 приведены зависимости  $R_f$  от  $N_I$  при  $P_{ser} = 10^{-7}$  для значений  $\Delta\rho = 0,5; 1$  и  $1,5$  дБ. При проектировании систем связи исходными данными являются требования по обеспечению в ней надежности связи (указывается допустимое значение вероятности ошибки при приеме сообщений –  $P_{ser}$ ), а также к удельной скорости передачи сообщений ( $R_f$ ). Приведенные на рис. 2 зависимости позволяют выбрать один из основных параметров ПСАС – нормированную длительность входящих в этот ансамбль сигналов, которые следует использовать для передачи сообщений. Анализ зависимостей рис. 2 показывает, что нормированная длительность этих сигналов, выраженная в количестве информационных битов ( $N_I$ ), должна быть тем больше, чем меньше допустимые энергетические потери ( $\Delta\rho$ ) проектируемой системы по отношению к «идеальной». Так, например, если  $P_{ser} = 10^{-7}$ ,  $R_f = 3$  бит/сек/Гц, то, как видно из рис. 2,  $N_I = 1750$  бит при  $\Delta\rho = 1$  дБ, и  $N_I = 8350$  бит при  $\Delta\rho = 0,5$  дБ.

Из графиков рис. 2 следует, что при  $\Delta\rho = const$  величина  $N_I$  растет линейно с увеличением параметра  $R_f$ . Так, например, при  $\Delta\rho = 0,5$  дБ в низкоскоростных системах связи при  $R_f = 0,5$  бит/сек/Гц имеем  $N_I \approx 1200$  ( $FT = 2400$ ), а в высокоскоростных системах связи при  $R_f = 3$  бит/сек/Гц имеем  $N_I \approx 8400$  ( $FT = 16800$ ).

Отметим, что с повышением требований к надежности приема сообщений в системе связи (с уменьшением допустимого значения  $P_{ser}$ ) количество битов в пакете,

передаваемом сигналами, входящими в оптимальный ПСАС, и нормированная длительность сигналов также увеличиваются. Кроме того, из (6) и графиков рис. 2 следует, что, допуская большую величину энергетических потерь  $\Delta\rho$  проектируемой системы связи по отношению к системе, «идеальной» по Шеннону, возможно, сохранив требуемую надежность связи, существенно сократить длину пакета битов, передаваемых сигналами, входящими в оптимальный ПСАС. Так, например, если при  $P_{ser} = 10^{-7}$  в системе связи вместо энергетических потерь  $\Delta\rho = 0,5$  дБ допустить потери  $\Delta\rho = 1$  дБ (или  $\Delta\rho = 1,5$  дБ), то длина пакетов битов, передаваемых одним сигналом оптимального АС существенно уменьшится, в 4,6 (или в 14 раз). Следует отметить, что при сокращении длины передаваемых пакетов, надежность приема которых удовлетворяет заданным требованиям, существенно упрощается техническая реализация системы связи, создаваемой для передачи сообщений.

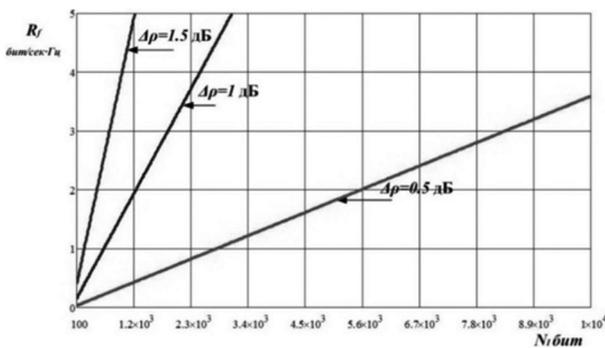


Рис. 2. Зависимость  $N_1$  – количества информационных бит, передаваемых одним сигналом ПСАС, от  $R_f$  при разных значениях энергетических потерь  $\Delta\rho$  (дБ)

Выше были рассмотрены вопросы, связанные с выбором системных параметров сигналов оптимального ПСАС, который должен обеспечить заданную надежность приема в «идеальной» системе Шеннона. Важно иметь в виду, что, как показано в [8], при использовании для передачи сообщений оптимальных ПСАС применение помехоустойчивого кодирования для обеспечения высокой надежности приема сообщений оказывается нецелесообразным.

### Сравнение систем связи стандарта DVB-S2 с системами, в которых могут применяться оптимальные АС

В данном разделе обсуждаются вопросы, связанные с возможностью совершенствования стандарта для систем DVB-S2 в части, касающейся выбора параметров модуляции сигналов, передаваемых по каналу связи, и помехоустойчивых кодов.

Выполненный в [1] анализ позволяет отметить следующие недостатки систем спутниковой связи, создаваемых на основе стандарта DVB-S2. Основным недостаток этих систем, как, впрочем, и многих других современных систем связи, является то, что в них для передачи сигналов по каналу связи с удельной скоростью  $R_f$  применяются двумерные сигналы, такие, как M-QAM (M-позиционная амплитудно-квадратурная модуляция), M-APSK (M-позиционная амплитудно-фазовая модуляция) и иногда M-HEX (M-позиционная гексоганальная модуляция). При низких скоростях передачи сообщений

применяются также M-позиционные ортогональные или биортогональные сигналы, а также перестановочная модуляция [8]. Для M-позиционных двумерных сигналов  $R_f = \log_2(M)$ . В системах связи, в которых такие сигналы используются, значение  $R_f$  может достигать до 12 бит/сек/Гц. Ансамбль двумерных сигналов часто представляется на двумерной сигнальной диаграмме, на которой каждому из  $M$  входящих в АС сигналов соответствует одна сигнальная точка ( $CT_s$ ).

Важным обстоятельством, делающим применение двумерных сигналов в системах связи нерациональным, является то, что при ограниченной средней мощности сигналов евклидово расстояние между соседними  $CT_s$ , соответствующими соседним сигналам многомерного оптимального АС [8], при увеличении  $M$  уменьшается. Так как прием сигналов осуществляется в условиях действия гауссовского шума, который изменяет координаты каждой  $CT_s$ , то при уменьшении расстояния между  $CT_s$  уменьшается также и зона правильного приема. Если смещение координат  $CT_s$  из-за действия шума не приводит к тому, чтобы  $CT_s$  вышла из этой зоны, то при демодуляции сигнала ошибка не происходит.

При использовании двумерных сигналов увеличить размер зоны правильного приема (и повысить помехоустойчивость приема при демодуляции сигналов) можно только, повышая уровень сигнала, поступающего на вход приемника. Однако, это увеличивает энергетические потери системы связи с двумерными сигналами по отношению к «идеальной» системе Шеннона.

Поэтому разработчики современных системах связи не стремятся к достижению высокой надежности приема при демодуляции сигналов. В разделе 2 статьи [1] было показано, что в CCC, создаваемых согласно DVB-S2, вероятность ошибочного приема сигналов на выходе демодулятора составляет величину  $10^{-2} \leq p_{mod} \leq 0,2$ . При столь значительной величине  $p_{mod}$  снижается пропускная способность дискретного канала связи, равная, как известно [4],  $C_m = 1 - p_{mod} \log_2(p_{mod}) - (1 - p_{mod}) \times \log_2(1 - p_{mod})$ . Это снижает предельную скорость передачи сообщений по дискретному каналу. Кроме того, для того, чтобы исправить большое количество ошибок, возникающих при демодуляции сигналов, становится необходимым применять помехоустойчивые коды, содержащие не только информационные символы, но и значительное количество проверочных, которые вносятся в кодовые комбинации для исправления возникающих в них ошибок. Эффективные помехоустойчивые коды должны иметь, как установлено Шенноном [4], большую длину. Конструкции длинных эффективных кодов достаточно сложны и их демодуляция требует выполнения большого количества операций. Так, например, при декодировании кодов LDPC, которые в соответствии со стандартом [2] используются в системах спутниковой связи, применяют до 50 итераций.

Следует подчеркнуть, что эффективность системы связи определяется не только ее спектральной и энергетической эффективностью, но и сложностью обработки сигналов при формировании информационной последовательности, которая поступает на выход системы. Сложность обработки непосредственно связана с длительностью принимаемых сообщений. В спутниковых системах, создаваемых в соответствии со стандартом

DVB-S2, длительность обработки принимаемых сообщений (измеряемая в количестве обрабатываемых при декодировании двоичных символов) во всех режимах работы не зависит от количества информационных символов, которые должны быть переданы по каналу связи. Эта длительность весьма значительна и составляет  $N_{LDSP} = 64800$  или  $16200$  бит.

Представляется нерациональным, что в CCC, созданной по стандарту DVB-S2, в режиме, в котором  $R_c=1/4$ , при декодировании принятой последовательности символов отбрасываются три четверти двоичных символов, на передачу которых была затрачена энергия. Это, естественно, снижает энергетическую эффективность системы связи. Заявления, которые нередко делаются в ряде современных работ о том, что рекомендуемые в них коды, позволяют достичь предела Шеннона по энергетической эффективности, носят рекламный характер. Как показано в разделе 1 статьи [1], реальные энергетические потери спутниковых систем, создаваемых в соответствии со стандартом DVB-S2 на 2...3 дБ превышают те, которые в этом стандарте объявлены. Реализация системы CCC стандарта DVB-S2 усложняется также из-за того, что в ней предусмотрено значительное количество режимов ее работы (29 режимов).

Рассмотрим возможности применения многомерных сигналов для создания систем спутниковой связи. Отметим, что в системах при передаче каждой кодовой комбинации кода LDPC, имеющего длину  $N_{LDPC}$  двоичных символов, в канал связи передаются  $N_S = (N_{LDPC} R_f)$  двумерных сигналов, если для передачи сообщений применяются  $M$ -позиционные сигналы, каждый из которых является носителем  $R_f = \log_2(M)$  двоичных знаков. Таким образом, на передающем конце линии связи при формировании последовательность из  $N_{LDPC}$  двоичных символов разбивается на  $N_S$  последовательностей, имеющих длину  $R_f$  двоичных символов, и двоичное число, имеющее  $R_f$  разрядов, поступает на вход модулятора, определяя тот сигнал, который соответствует номеру определенной  $CT_s$  на сигнальной диаграмме.

Так как каждый передаваемый символ является двумерным, то сигнал, состоящий из  $N_S$  таких символов, может рассматриваться как  $2N_S$ -мерный. Во всех современных системах связи процесс модуляции каждого двумерного символа осуществляется независимо от остальных, при этом конкретный передаваемый символ (сигнальная точка на сигнальной диаграмме) определяется своим номером, состоящим из небольшого количества ( $R_f$ ) двоичных символов. Именно с этим связано то, что расстояние между любыми двумя разными  $2N_S$ -мерными сигналами в современных системах связи не отличаются от минимального расстояния между двумя разными символами, принадлежащими одному и тому же двумерному сигналу.

Однако, в отличие от систем связи, в которых применяются двумерные сигналы, в системе, использующей многомерные сигналы, сигнальные точки расположены на поверхности  $N$ -мерной сферы. Их координаты - значения амплитуд ( $A_i, i=1...N$ ) всех ЭОС, должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие  $\sum_{i=1}^N A_i^2 = \text{const}$ . Шеннон показал [4], что для таких АС минимальное расстояние между соседними  $CT_s$ , соответствующими принимаемым сигналам, принадлежащим

оптимальному  $N$ -мерному АС, с ростом  $N = 2(FT)$  увеличивается по закону

$$d_{\min} = 2(\sqrt{(FT)P_s}) \cdot \sin(0,5\Delta\varphi_1), \quad (7)$$

где  $P_s$  – средняя мощность сигнала, поступающего на вход демодулятора, а  $\Delta\varphi_1$  – параметр, связанный с  $R_f$  – удельной скоростью передачи сообщений, связанной с параметром  $\Delta\varphi_1$ , как показано в [4], соотношением  $R_f(\Delta\varphi_1) = 2\log_2[1/\sin(0,5\Delta\varphi_1)]$ .

Из (7) следует, что в отличие от традиционных двумерных сигналов, в которых для увеличения  $d_{\min}$  необходимо повышать уровень сигнала на входе демодулятора, при использовании  $N$ -мерных ПСАС параметр  $d_{\min}$  может быть увеличен при ограниченной средней мощности принимаемого сигнала ( $P_s = \text{const}$ ), если параметр  $N$  выбран достаточно большим ( $N \gg 1$ ). Величины  $A_i$  могут принимать, как положительные и отрицательные значения, зависящие только от двух величин: значения  $N$  и параметра  $\Delta\varphi_1$  (рад).

На рис. 3 представлены зависимости  $R_f(\Delta\varphi_1)$  [6, 8]. Приведенная на рис. 3 зависимость позволяет при заданном значении  $R_f$  найти значения  $\Delta\varphi_1$  и  $N$ , которые определяют алгоритм вычисления всех значений  $A_i$  для  $m$ -го сигнала – одного из  $M = 2^{(FT)R_f}$  ( $1 \leq m \leq M$ ) сигналов, принадлежащих оптимальному АС. Эти значения используются для формирования  $m$ -го сигнала путем амплитудной модуляции всех  $N$  элементарных ортогональных сигналов [5-8], из которых состоит оптимальный ПСАС.

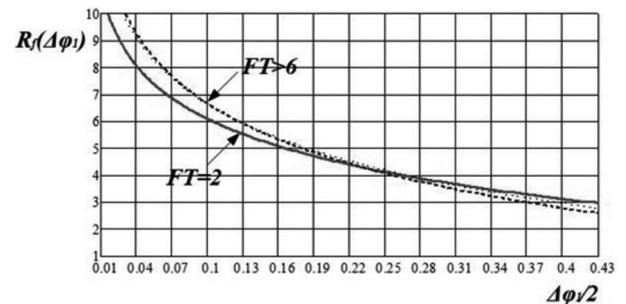


Рис. 3. Зависимости  $R_f$  – удельной скорости передачи сообщений, от  $\Delta\varphi_1$

В [8] получена формула  $\mu(R_f, N) = 10\lg(d_{\min}^2/d_{QAM}^2)$ , в которой  $d_{\min}^2$  определяется в (7), а  $d_{QAM}^2 = (\frac{6P_s}{2^{R_f-1}})$  – квадрат минимального расстояния между сигнальными точками двумерных сигналов QAM. Коэффициент  $\mu(R_f, N)$  определяет тот энергетический выигрыш, который может быть получен, если в системе связи вместо двумерных сигналов QAM применить сигналы оптимального  $N$ -мерного ПСАС. Зависимость этого выигрыша от  $(FT)$  при одинаковых значениях параметра  $R_f$  для  $N$ -мерного АС и сигналов QAM и приведена на рис. 4.

Из графиков, представленных на рис. 4, видно, что при достаточно больших значениях  $(FT)$  энергетический выигрыш от применения в системах связи  $N$ -мерных ПСАС вместо двумерных сигналов может быть весьма значителен. Как видно из рис. 4, при  $R_f \leq 6$  бит/сек·Гц он может составить более 13 дБ, если  $(FT) = N/2 \geq 30$ . С увеличением  $N$  энергетический выигрыш увеличивается. Значительный выигрыш систем связи, в которых применяются ПСАС, позволяет обеспечить высокую надежность приема последовательности символов сообщения,

которые формируются на выходе демодулятора. Поэтому в системе связи, в которой применяются оптимальные ПСАС, отпадает необходимость, как показано в [7, 8], в применении помехоустойчивых кодов большой длительности для исправления ошибок, возникающих при демодуляции принятых сигналов.

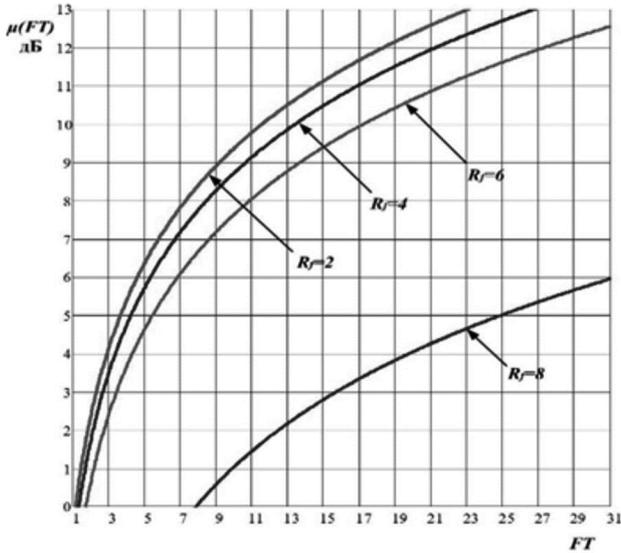


Рис. 4. Зависимость  $\mu(R_f, N)$  от  $(FT)$  при разных значениях параметра  $R_f$

Как уже отмечалось, такие коды снижают пропускную способность канала связи, усложняют систему связи, так как требуют применения весьма сложных в техническом отношении декодеров. Отметим также, что при декодировании кодов большой длительности, возникает значительная задержка при формировании информационных сообщений, поступающих на выход системы связи. Это может оказаться недопустимым, в тех случаях, когда система связи должна обеспечивать быструю и надежную передачу коротких пакетов информационных символов.

Определим длительность сигналов в системе спутниковой связи с оптимальным ПСАС, имеющей ту же надежность передачи сообщений с надежностью, которая обеспечивается в системе, построенной в соответствии со стандартом [2]. Режимы работы такой системы определяются единственным параметром  $R_f$  – удельной скоростью передачи сообщений. Значение  $R_f$  может лежать в интервале  $R_{fmin} \leq R_f \leq R_{fmax}$ , где  $R_{fmin}$  и  $R_{fmax}$  определяются режимами работы системы связи стандарта DVB-S2 [2].

Как следует из формулы (12) статьи [1] допустимая вероятность ошибочного приема одного двоичного символа в системе спутниковой связи равна  $p_b \cong P_k/N_k$ , где  $P_k = 10^{-7}$  – допустимая вероятность ошибки при приеме одного пакета данных, длиной 188 байт ( $N_k = 1504$  бит). Если в системе спутниковой связи данные передаются с удельной скоростью, равной  $R_f$ , и каждый из сигналов оптимального АС является переносчиком  $N_1$  двоичных информационных символов, то система спутниковой связи должна быть спроектирована так, чтобы вероятность ошибки при демодуляции любого из сигналов оптимального АС не превышала значения

$$P_{ser} = 1 - (1 - P_k/N_k)^{N_1}. \quad (8)$$

Формула (8) следует из формулы (1) статьи [1], в которой приведен метод Л.М. Финка, устанавливающий соотношение между вероятностью правильного приема отдельных символов, входящих в последовательность, определяющую сигнал ПСАС, с вероятностью правильного приема этого сигнала.

При передаче сообщений в системе связи с удельной скоростью  $R_f$  предел Шеннона для отношения сигнал/шум на входе демодулятора в соответствии с (2) равен  $\rho_s = (2^{R_f} - 1)$ . Если в системе связи допустимы энергетические потери по отношению к «идеальной» системе Шеннона, равные  $\Delta\rho$  дБ, то в такой системе на входе демодулятора требуется обеспечить отношение сигнал/шум, равное  $\rho_{sd} = (2^{R_f} - 1) \cdot 10^{0,1\Delta\rho}$ . При этом соотношение между  $R_f$  и  $N_1$  будет иметь, с учетом (6), следующий вид:

$$R_f = \frac{(10^{0,1\Delta\rho} - 1)^2 N_1}{2 \ln\{1/[1 - (1 - P_k/N_k)^{N_1}]\}}. \quad (9)$$

На рис. 5 представлены зависимости  $R_f$  от  $N_1$  при  $P_k = 10^{-7}$ ,  $N_k = 1504$  и  $\Delta\rho = 0,5$  и 1 дБ. Эти зависимости позволяют для каждого значения  $R_f$  определить длину последовательности двоичных знаков, которая передается каждым сигналом оптимального ПСАС, если энергетические потери создаваемой системы связи относительно «идеальной» системы Шеннона равны  $\Delta\rho = 0,5$  или 1 дБ.

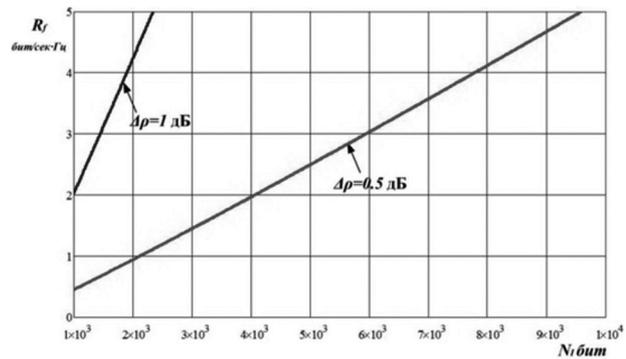


Рис. 5. Зависимости  $R_f$  от  $N_1$  при  $P_k = 10^{-7}$ ,  $N_k = 1504$  и  $\Delta\rho = 0,5$  и 1 дБ

Если, например,  $\Delta\rho = 0,5$  дБ и  $R_f = 0,5$  бит/сек/Гц, то длина передаваемой двоичной информационной последовательности, которая будет передана с требуемой надежностью по каналу связи, равна, как видно из рис. 5,  $N_1 = 1000$  бит.

Отметим, что в системах, создаваемых по стандарту [2], самая малая длина декодируемой последовательности символов составляет  $N_{LDSP} = 16000$  бит, а наиболее часто в них используется режим, когда  $N_{LDPC} = 64800$  бит, т.е. применение оптимальных ПСАС позволяет уменьшить длину обрабатываемого в приемнике системы связи сигнала минимум в 16 раз. В случае, когда  $\Delta\rho = 0,5$  дБ и  $R_f = 5$  бит/сек/Гц, из зависимостей на рис. 5 видно, что  $N_1 = 9500$  бит, что в полтора раза меньше длины самого короткого кода LDPC и почти в 9 раз меньше длины длинного кода LDPC из стандарта [2]. Если принять, что в создаваемой системе связи допустимы энергетические потери относительно предела Шеннона, равные,  $\Delta\rho = 1,5$  дБ, то длина  $N_1$  последовательности символов, передаваемых сигналами оптимального ПСАС, сокра-

Таблица 1. Параметры оптимального ПСАС при разных значениях  $R_f$

$R_f$ бит/сек·Гц	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$0,5 \cdot \Delta\varphi_1$ (рад)	0,999	0,785	0,637	0,524	0,434	0,361	0,302	0,253	0,212	0,178
$\rho_s$ дБ	-3,83	0	2,62	4,77	6,68	8,45	10,14	11,76	13,35	14,92
$\Delta\rho = 0,5$ дБ	$N_I$ бит	1000	2050	3000	4000	5000	6000	6900	7800	8500
	(FT)	2000	2050	2000	2000	2000	2000	1971	1950	1733
$\Delta\rho = 1,5$ дБ	$N_I$ бит	280	500	720	1000	1250	1500	1650	1800	2100
	(FT)	560	500	480	500	500	500	472	450	467

Таблица 2. Параметры CCC стандарта DVB-S2

$R_f$ бит/сек·Гц	2		3		4		5	
$R_c$	3/4	9/10	3/4	9/10	3/4	9/10	3/4	9/10
$R_\theta$ бит/сек·Гц	1,5	1,8	2,43	2,68	3	3,5	3,7	4,45
$\rho_{DVB-S2}$ дБ	4,03	6,42	7,9	10,98	10,21	13,13	12,73	16,05
$\Delta\rho$ дБ	1,47	2,52	2,25	3,66	1,88	2,78	1,94	2,86

щается по сравнению с их длиной при  $\Delta\rho = 0,5$  дБ почти в четыре раза.

Таким образом, применение в спутниковых системах связи оптимальных многомерных ПСАС позволяет существенно сократить длину передаваемых информационных последовательностей и, следовательно, уменьшить задержку между моментом передачи сообщений и моментом их появления на выходе системы связи, обеспечивая при этом высокую надежность приема сообщений. Это может иметь особое значение в том случае, если система создается специально для передачи с высокой надежностью коротких сообщений.

В табл. 1 с помощью приведенных выше формул рассчитаны основные параметры систем связи с многомерными ПСАС. В этих системах, как и в CCC стандарта DVB-S2 [2], сообщения могут передаваться с удельной скоростью  $R_f = 0,5 \dots 5$  бит/сек/Гц. Изменяя в системе с ПСАС только один параметр – скорость передачи сообщений в указанном выше интервале с шагом  $\Delta R_f = 0,5$  бит/сек·Гц, можно в ней реализовать 10 разных режимов работы.

В табл. 1 приведены также данные о нормированной длине многомерных сигналов  $(FT) = N_I / R_f$ . Из этой таблицы видно, что  $(FT) \approx 2000$  при  $\Delta\rho = 0,5$  дБ, и  $(FT) \approx 500$  при  $\Delta\rho = 1$  дБ, т.е. с увеличением допустимых энергетических потерь в рассматриваемом случае можно почти в четыре раза уменьшить длину сигналов в оптимальном ПСАС.

Для сравнения систем связи с оптимальными ПСАС и CCC стандарта DVB-S2 [2], приведем табл. 2, составленную на основе данных о параметрах CCC, представленных в табл. 6 и 7 из [1].

В данной таблице приведены данные о параметрах  $R_f$ ,  $R_c$ ,  $R_\theta$  и  $\Delta\rho$ , смысл которых пояснялся выше, а также данные об отношении сигнал/шум ( $\rho_{DVB-S2}$ ) на входе демодулятора в CCC стандарта DVB-S2, при котором обеспечивается требуемая надежность связи. Данные приведены только для значений  $R_c = 3/4$  и  $9/10$ , когда спектральная эффективность CCC составляет  $\mu_s = 3/4$  и  $\mu_s = 0,9$ . Эта эффективность оказывается, соответственно, на 25 % и на 10 % меньше той, которая обеспечивается в системе ПСАС при удельной скорости передачи сообщений, равной  $R_f = 2, 3, 4$  и  $5$  бит/сек·Гц.

Энергетические потери  $\Delta\rho$  систем CCC стандарта DVB-S2 по отношению к «идеальной» системе Шеннона, при  $\mu_s = 0,9$  составляют от 2,52 до 3,66 дБ, что существенно больше, чем в системе с ПСАС, в которой, как это видно из табл. 1, энергетические потери  $\Delta\rho$  при  $\mu_s = 1$  составляют  $\Delta\rho = 0,5$  или  $1,5$  дБ.

Кроме того, из этой таблицы видно, что максимальная длина сигналов ПСАС, определяемая количеством переносимых каждым сигналом бит, составляет при  $R_f = 5$  бит/сек·Гц максимум  $N_I = 9500$  бит, если  $\Delta\rho = 0,5$  дБ, и  $N_I = 2300$  бит, если  $\Delta\rho = 1,5$  дБ. При  $R_f \leq 5$  бит/сек·Гц эта длина может быть существенно меньше. Отметим, что в CCC стандарта DVB-S2 для всех режимов работы длина кодовой комбинации кода LDPC существенно больше и равна  $N_I = 64000$  или  $16000$  бит.

Таким образом, выполненное исследование указывает на целесообразность применения ПСАС в системах связи и доработки стандарта [1] в части, касающейся методов передачи сигналов и сообщений.

### Заключение

Выполненное в данной работе исследование показало, что по своим характеристикам системы спутниковой связи, использующие для передачи сообщений многомерные ПСАС, существенно превосходят системы, создаваемые в соответствии со стандартом [2]. Они обеспечивают высокую достоверность приема переданных сообщений с максимально возможной спектральной и энергетической эффективностью.

Кроме того, они более просты в технической реализации по сравнению с CCC стандарта DVB-S2. Применение многомерных ПСАС упрощает также реализацию разных режимов работы, позволяющих адаптировать передачу сообщений с высокой надежностью к возможным изменениям условий распространения радиоволн в канале спутниковой связи. Это связано с тем, что в системах с ПСАС нет необходимости применения помехоустойчивых кодов большой длины и весьма сложных декодеров.

Следует также отметить, что в системах с ПСАС длина передаваемых сигналов существенно меньше, чем длина кодовых комбинаций в CCC стандарта DVB-S2. Поэтому применение систем связи с ПСАС особенно при-

влекательно в тех случаях, когда необходимо передавать короткие информационные сообщения и время передачи должно быть минимально возможным.

### Литература

1. Быховский М.А. Анализ международного стандарта DVB-S2, определяющего параметры современных систем спутниковой связи. Цифровая обработка сигналов. № 1, 2020

2. European standard. ETSI EN 302 307-1 V1.4.1 (2014-11). Digital Video Broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications; Part 1: DVB-S2

3. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976

4. Shannon C. Probability of error for optimal codes in Gaussian channel. Bell System Techn. J., May, 1959. (Пере-

вод на русский язык статьи «Вероятность ошибки для оптимальных кодов в гауссовском канале», опубликована в книге Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Из-во иностранной литературы // Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова, 1963

5. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи цифровых сообщений (Часть 1). Цифровая обработка сигналов. № 1, 2018

6. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи цифровых сообщений (Часть 2). Цифровая обработка сигналов. № 2, 2018

7. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи цифровых сообщений (Часть 3). Цифровая обработка сигналов. № 2, 2018

8. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи сообщений в гауссовских каналах связи. М.: Техносфера, 2018

9. Прокис Дж. Цифровая связь. //Перевод с английского под ред. Д.Д. Кловского. //М.: Советское радио, 2000.

## АЛГОРИТМ СИНХРОНИЗАЦИИ СОТОВОЙ БАЗОВОЙ СТАНЦИИ С МОБИЛЬНЫМ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕМ ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПЕРВИЧНОГО СИНХРОСИГНАЛА В ТЕХНОЛОГИИ LTE

*Киселева Т.П., аспирант кафедры радиотехнических систем Московского технического университета связи и информатики (МТУСИ), e-mail: golzev2011@yandex.ru*

### ALGORITHM FOR SYNCHRONIZING A CELLULAR BASE STATION WITH A MOBILE USER BASED ON THE CORRELATION FUNCTION OF THE PRIMARY SYNC SIGNAL IN LTE TECHNOLOGY

*Kiseleva T.P.*

*The article provides a brief algorithm for synchronizing the base station with a mobile user when the user first connects to the station. The structure of the algorithm covers the synchronization stage along the correlation curve of the primary synchro signal (PSS) transmitted by the base station in the direction of the user when it is initialized. In contrast to the classical algorithm for FFT processing and frequency alignment of the accepted PSS, it is proposed to synchronize the PSS correlation curve only in the time domain without switching to the frequency domain. The algorithm is based on preliminary simulation in the MATLAB operating environment using a channel model with additive white Gaussian noise and Doppler carrier frequency offset.*

**Key words:** Zadoff-Chu sequence (ZC), primary synchronization signal (PSS), LTE OFDMA technology, intercorrelation function (VCF), additive Gaussian noise, Doppler frequency offset.

**Ключевые слова:** последовательность Задова-Чу (ZC), первичный сигнал синхронизации (PSS), технология LTE OFDMA, взаимокорреляционная функция (VCF), аддитивный гауссовский шум, доплеровское смещение частоты.

#### Введение

Для реализации процедуры синхронизации с пользователем (UE) в стандарте LTE базовая станция (eNodeB) передает специальные синхронизирующие сигналы: первичный (PSS) и вторичный (SSS). Комбинация используемых синхросигналов определяется номером сотового идентификатора  $N_{ID}^{cell}$ . Всего определено 504 сотовых идентификатора, которые распределены в 168 групп по 3 идентификатора в каждой. Значение сотового идентификатора вычисляется следующим образом [1]:

$$N_{ID}^{cell} = 3N_{ID}^{(1)} + N_{ID}^{(2)},$$

где  $N_{ID}^{(1)}$  – номер группы сотовых идентификаторов от 0 до 167,  $N_{ID}^{(2)}$  – номер сотового идентификатора в пределах группы от 0 до 2. Для каждого значения  $N_{ID}^{(2)}$  определён один PSS и  $2 \times 168$  SSS. Каждая станция eNodeB в итоге передает три вида PSS и 1008 различных SSS. В сигнале от базовой станции одинаковый PSS передаётся с периодом в половину стандартного кадра, как и SSS, но в первом и втором полукадрах каждого кадра передаются различные SSS, что позволяет пользователю синхронизироваться с началом кадра во временной области. Для формирования PSS используются последовательности Задова-Чу с хорошими корреляционными характеристиками  $-ZC(u, n)$ , где  $u$  – индексы (корни) последовательностей ( $u = 25, 29, 34$ ),  $n = 62$  – число

*Приведен алгоритм синхронизации базовой станции с мобильным пользователем при первичном подключении пользователя к станции. Структура алгоритма охватывает этап синхронизации по корреляционной кривой первичного синхросигнала (PSS), транслируемого базовой станцией в направлении к пользователю при его инициализации. В отличие от классического алгоритма обработки с применением БПФ и частотного выравнивания принятого PSS, предлагается синхронизация по корреляционной кривой PSS только во временной области без перехода в частотную. Построение алгоритма основано на предварительном имитационном моделировании в операционной среде MATLAB с использованием модели канала с аддитивным белым гауссовским шумом и доплеровским смещением несущей частоты.*

элементов. Для формирования SSS используются M-последовательности длиной 31 элемент, конкатенированные попарно, т.е. с результирующим числом элементов, равным 62.

В частотной области для различных пользователей и операторов связи выделяются полосы от 1,4 МГц до 18 МГц. Полоса 18 МГц соответствует максимальной стандартизированной частоте дискретизации 30,72 МГц и размерности преобразования Фурье 2048 элементов. Независимо от значения выделенной для операторов полосы частот передачи информации, для синхросигналов PSS, SSS выделяется минимальная полоса частот 1,08 МГц в центральной части рабочего диапазона частот. В стандарте LTE регламентируется технология OFDM, и для распределения элементов последовательностей, формирующих синхросигналы, выделены 62 центральных поднесущих для размещения элементов соответствующих последовательностей. Синхросигналы передаются в нулевом и 10-м слотах кадра в 7-м OFDM-символе для PSS и в 6-м для SSS при частотном разделении (FDD). Длительность OFDM-символа [1]

$$T_{SYMB} = \frac{1}{\Delta f_{sc}}, \text{ где } \Delta f_{sc} = 15 \text{ кГц} - \text{ ширина полосы под-}$$

несущей на уровне 3 dB;  $T_{SYMB} = 66,67 \text{ мкс}$

Число отсчетов быстрого преобразования Фурье (БПФ) на длительности символа – 2048.

Сокращение рабочей полосы сигналов синхронизации в более, чем 16 раз от максимальной по стандарту, позволяет сократить число выборок с максимально возможным (2048) до числа 128, т.е. провести децимацию выборок дискретизации OFDM – символа с коэффициентом КД = 16, что позволит значительно сократить вычислительную нагрузку на процессоры. Это особенно важно для процессора мобильного пользователя.

В технологии LTE определены несколько длительностей циклического префикса (ЦП) OFDM-символов в зависимости от размеров и назначения соты, но PSS и SSS всегда передаются с фиксированным ЦП длиной 9 (144) отсчетов в зависимости от числа отсчетов информационной части символа (128 либо 2048) [2].

### Синхронизация по корреляционной функции первичного синхросигнала PSS

До начала синхронизации по корреляционной кривой PSS проводится этап синхронизации по корреляционной кривой ЦП, в результате которого достигается состояние грубой временной привязки к началу слота и границам OFDM-символов. Это позволяет компенсировать дробную часть фазовых отстроек поднесущих центральных ресурсных блоков (RB), выделяемых для передачи синхросигналов. Структура кадра (frame) и состав RB для передачи в направлении от eNodeB к UE – направление DownLink – подробно описаны в [1, 2].

Одна из 3-х последовательностей ZC, упоминавшихся выше, является основой для построения тестового PSS для UE. С тестовым PSS сравнивается принятый первичный синхросигнал. При использовании алгоритма оптимального приема и критерия максимального правдоподобия для определения первичного синхросигнала, идентичного тестовому для UE, необходимо выполнить следующие действия:

- определить величину нормированного порога без учета влияния канала связи для приема PSS по критерию максимального правдоподобия;
- разработать алгоритм построения модели взаимокорреляционной функции принятого и тестового PSS в координатах: временная задержка  $x$  смещение частоты;
- определить область достоверных значений пиков  $VCF_{PSS}$  при различных значениях величины порога ( $H$ ) и установленного в модели отношения С/Ш ( $SNR$ ) – 0 децибел (dB);
- провести имитационное моделирование прохождения PSS через канал с БГШ и доплеровским смещением частоты и определить область достоверных значений корреляционных пиков  $VCF_{PSS}$  для заданных параметров канала связи.

Для определения величины нормированного порога при оптимальном приеме PSS необходимо построить 9 видов корреляционных функций первичных синхросигналов:

$$ACF_{PSS_{25_{25}}} - \text{ автокорреляционная функция } PSS[ZC(25, 62)] \otimes PSS[ZC(25, 62)];$$

$$ACF_{PSS_{29_{29}}} - \text{ автокорреляционная функция } PSS[ZC(29, 62)] \otimes PSS[ZC(29, 62)];$$

$$ACF_{PSS_{34_{34}}} - \text{ автокорреляционная функция } PSS[ZC(34, 62)] \otimes PSS[ZC(34, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{25_{29}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(25, 62)] \otimes PSS[ZC(29, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{29_{25}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(29, 62)] \otimes PSS[ZC(25, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{25_{34}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(25, 62)] \otimes PSS[ZC(34, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{34_{25}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(34, 62)] \otimes PSS[ZC(25, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{29_{34}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(29, 62)] \otimes PSS[ZC(34, 62)];$$

$$VCF_{PSS_{34_{29}}} - \text{ взаимокорреляционная функция } PSS[ZC(34, 62)] \otimes PSS[ZC(29, 62)].$$

В обозначении корреляционной функции, например,  $VCF_{PSS_{34_{25}}$  первый индекс –  $u = 34$  – корень последовательности  $ZC(u, n)$ , на которой построен тестовый синхросигнал PSS; второй индекс  $u = 25$  – корень последовательности  $ZC(u, n)$ , на которой построен принятый синхросигнал PSS.

Моделирование проводилось для OFDM-символов PSS для случаев дискретизации символа с числом выборок 2048 (период дискретизации  $T_S = 3,255 \cdot 10^{-8}$  с) и децимации выборок с коэффициентом  $K_D = 16$ , т.е. 128 выборок на символ (период дискретизации  $T_S = 5,21 \cdot 10^{-7}$  с). Математическая модель передаваемого многочастотного OFDM-символа первичного синхросигнала PSS, сформированного на основе последовательности  $ZC_i(u, n)$ , согласно стандарту [1]. Для  $k$ -й выборки:

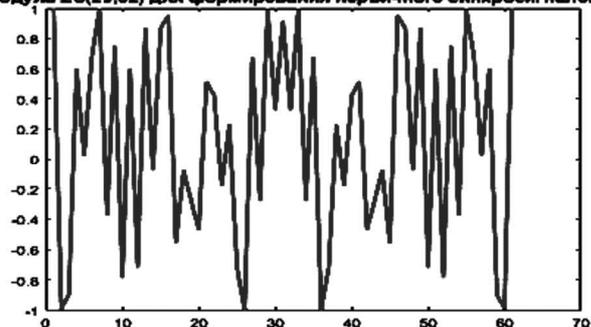
$$PSS_k[ZC_i(u, n)] = \sum_{n=0}^N [\exp(-j\pi \cdot u \cdot n \cdot (n+1) / 62)] \times \exp(-j2\pi \Delta f_{sc} \cdot n \cdot \Delta t \cdot k), \quad (1)$$

где индекс  $u = 25, 29, 34$ ; длина последовательности  $N = 62$ ;  $i = 0, 1, 2$  – три последовательности  $ZC_i(u, n)$ ;  $k$  – выборки символа во временной области  $0 \leq k \leq 127$ ; период дискретизации при децимации с  $K_D = 16$   $\Delta t = \frac{T_{SYMB}}{128} = 0,521 \text{ мкс}$ ;  $0 \leq \Delta t \cdot k \leq T_{SYMB}$ .

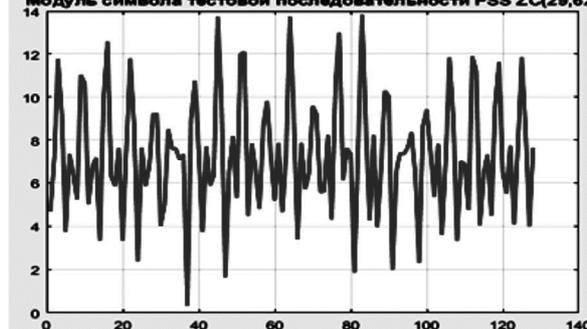
Результаты моделирования всех комбинаций нормированных корреляционных функций сведены в табл. 1. Все  $ACF_{PSS_{i_i}}$  определяют «свою» последовательность  $ZC_i(u, n)$  для пользователя и позволяют определить идентификатор  $N_{ID}^{(2)}$

В табл. 1 приняты следующие обозначения:  $n = 2048$  – число выборок дискретизации OFDM-символа без децимации;  $n = 128$  число выборок дискретизации OFDM-символа при децимации с  $K_D = 16$ ;  $VCF_{PSS_{i_j}}$  – авто-взаимокорреляционная функция PSS ( $ZC$ ),  $PSS(ZC)_j$ ;  $MaxVCF$  – максимальное значение пика

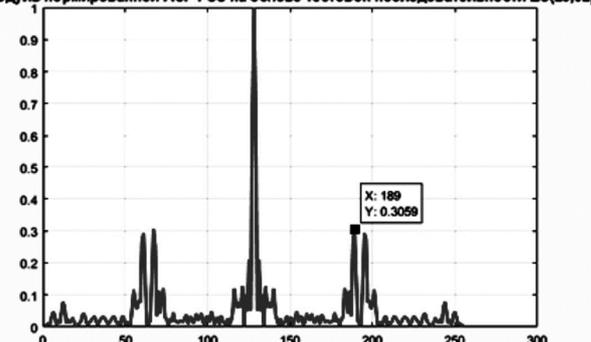
$VCF_{PSS_{i,j}}$ $ACF_{PSS_{i,j}}$	MaxVCF $n = 2048$	Max BL $n = 2048$	$(VCF_m)^2 / M[BL^2]$ (dB) $n = 2048$	MaxVCF $n = 128$	Max BL $n = 128$	$(VCF_m)^2 / M[BL^2]$ (dB) $n = 128$
$ACF_{PSS_{25,25}}$	1	0,3001	22,4559	1	0,2863	20,6781
$ACF_{PSS_{29,29}}$	1	0,3162	22,7047	1	0,3059	20,8316
$ACF_{PSS_{34,34}}$	1	0,3149	22,8805	1	0,3060	20,9426
$VCF_{PSS_{25,29}}$	--	--	--	0,2000	0,1983	--
$VCF_{PSS_{29,25}}$	--	--	--	0,1999	0,1983	--
$VCF_{PSS_{25,34}}$	--	--	--	0,2115	0,2062	--
$VCF_{PSS_{34,25}}$	--	--	--	0,2115	0,2061	--
$VCF_{PSS_{29,34}}$	--	--	--	0,2080	0,2017	--
$VCF_{PSS_{34,29}}$	--	--	--	0,2060	0,2017	--

Модуль  $ZC(29,62)$  для формирования первичного синхросигнала PSS

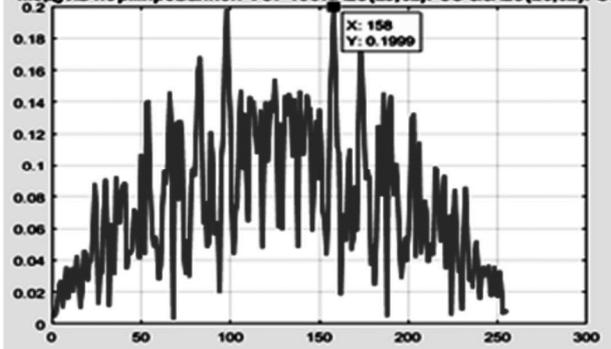
а)

Модуль символа тестовой последовательности PSS  $ZC(29,62)$ 

б)

Модуль нормированной ACF PSS на основе тестовой последовательности  $ZC(29,62)$ 

в)

Модуль нормированной VCF теста  $ZC(29,62)$  PSS &  $ZC(25,62)$  PSS

г)

Рис. 1. Осциллограммы: а – модуль последовательности  $ZC(29,62)$ ;б – модуль первичного многочастотного синхросигнала PSS на основе последовательности  $ZC(29,62)$ ;в – модуль нормированной ACF PSS на основе  $ZC(29,62)$ ;г – модуль нормированной VCF PSS на основе  $ZC(29,62)$  и PSS на основе  $ZC(25,62)$ 

корреляционной функции  $PSS_{ij}(ZC(u,n))$ ;  $Max BL$  – максимальное значение боковых лепестков корреляционной функции  $PSS_{ij}(ZC(u,n))$ ;  $(VCF_m)^2 / M[BL^2]$  (dB) – отношение квадрата модуля пика корреляционной функции  $PSS_{ij}$  к среднеквадратическому значению боковых лепестков (BL).

По результатам моделирования величина порога, определяемая максимальными значениями пиков  $VCF_{PSS_{i,j}}$  и максимальными значениями боковых лепестков исследуемых  $VCF_{PSS_{i,j}} - ACF_{PSS_{i,j}}$ , не превышает нормализованного значения 0,4. Максимальное значение боковых лепестков – у  $ACF_{PSS_{29,29}}$  составит 0,3162 (табл.1) Моделирование проводилось без учета влияния характеристик канала связи для получения «чистого» результата. На рис. 1 представлены осциллограммы модуля последовательности  $ZC(29,62)$ , первичного синхросигнала PSS (1), модуля нормированной ACF PSS на основе  $ZC(29,62)$  и нормированной VCF PSS на основе

$ZC(29,62)$  и PSS на основе  $ZC(25,62)$ .

### Разработка алгоритма построения модели взаимнокорреляционной функции ( $VCF_{PSS}$ ) принятого и тестового PSS в координатах: временная задержка x смещение частоты

Первичный синхросигнал, как указано выше, передается в последнем OFDM- символе нулевого и десятого слота каждого кадра. В зависимости от номера идентификатора соты (БС), возможны три различных первичных синхросигнала:  $ZC(25,62)$ ,  $ZC(29,62)$ ,  $ZC(34,62)$ , что соответствует идентификатору сектора БС  $N_{ID}^{(2)}$ . Временная синхронизация по корреляционной кривой PSS определяет «привязку» к границам полукадра. Поиск «своего» сектора и синхронизация по границе 0-го или 10-го слота в классическом варианте алгоритма обработки принятых OFDM – символов предполагает структуру, приведенную на рис. 2.



Рис. 2. Функциональная схема канала передачи – приема OFDM-символов

На передающей стороне формируется в частотной области многочастотный OFDM-символ (БПФ-преобразование исходной информационной последовательности), перестраиваемый параллельно-последовательным модулем (P/S) в цифровой поток во временной области. Затем в защитный интервал добавляется циклический префикс (ЦП) и с помощью цифро-аналогового преобразователя информационный символ обретает аналоговое представление и модулирует высокочастотную центральную несущую частоту, излучаемую в канал связи.

На приемной стороне, после фильтрации несущей, удаления ЦП и последовательно-параллельного преобразования с помощью операции обратного преобразования Фурье (ОБПФ) получаем частотно-временную ресурсную сетку передаваемого кадра OFDM-символов и служебной информации. С помощью операции «эквалайзирования» производится амплитудное и фазовое выравнивание принятой ресурсной сетки кадра, затем – параллельно-последовательное преобразование, демодуляция и декодирование принятой информации (не показано на рисунке) и получение полезного сигнала во временной области  $y(t)$ .

Обработанный таким образом синхросигнал  $PSS$  на выходе преобразуется в последовательность  $ZC(u, n)$  для получения корреляционной функции с тестовой последовательностью  $ZC$  из памяти системы пользователя.

В настоящей работе, для сокращения аппаратно-вычислительной нагрузки, предлагается проводить корреляционный анализ принятого синхросигнала  $PSS$  во временной области после фильтрации несущей и удаления ЦП без перехода в частотную область (без эквалайзера и частотно-временных преобразований Фурье).

Для построения корреляционной функции  $PSS$  определим следующие положения:

Синхросигнал  $PSS$  (рис. 3) формируется по стандартному алгоритму построения многочастотных OFDM-символов [1] для последовательности  $ZC(25, 62)$  на основе формулы (1), но с учетом Допплеровского смещения частоты с шагом  $dF_D$

$$PSS(n, t, r) = \sum_{n=0}^{61} \sum_{t=1}^{128} [\exp(-j\pi \cdot u \cdot n \cdot (n+1) / 62)] \times \exp[2\pi(\Delta f_{sc} \cdot n + dF_D \cdot r) \cdot t], \quad (2)$$

где  $0 < n < 61$  – число элементов  $ZC(25, 62)$ ;  $1 < t < 128$  – число временных выборок на длительности OFDM-символа  $T_S$ ;  $-10 < r < 10$  – число выборок в частотной области;  $\Delta f_{sc} = 15$  кГц – ширина полосы поднесущих.

При построении  $PSS$  учитывается доплеровское смещение частоты для принимаемого символа  $PSS$  и смещение частоты опорного генератора приемника (частотная отстройка) для тестового сигнала  $PSS$ , т.е. график взаимокорреляционной функции ( $VCF_{PSS}$ ) принятого и тестового синхросигнала строится в координатах 3D: время  $x$  частота  $x$  нормированная амплитуда.

При расчете максимальной частотной отстройки, составляющей  $0,1$  ppm ( $1$  ppm – миллионная доля, равная  $1 \cdot 10^{-6}$  от базового показателя. Обозначается сокращением ppm – от англ. *parts per million* – <https://ru.wikipedia.org/wiki/>) ( $0,1 \cdot 10^{-6}$ ) от несущей частоты [3] для  $dF_D = 50$  Гц и  $-10 < r < 10$  частотная отстройка –  $500$  Гц  $< dF_D \cdot r < 500$  Гц соответствует величине несущей частоты  $5000$  МГц и максимальному доплеровскому смещению  $\pm 500$  Гц, что предполагает максимальную скорость движения пользователя порядка  $140$  км/час, что вполне соответствует возможным реальным значениям в условиях городской застройки.

При построении  $VCF_{PSS}$  предполагается нормирование и усреднение значений функции по  $5 \dots 10$  кадрам. При децимации с  $K_D = 16$  точность синхронизации по пику  $VCF_{PSS} \pm (66,67 \cdot 10^{-6}) / 128 = 0,52 \cdot 10^{-6}$  с. Это достаточно грубая точность, для такой точности достаточно усреднение по  $10-20$  значениям функции. Более точная временная настройка предполагается по корреляционному пику вторичного синхросигнала  $VCF_{SSS}$ , что достигается, в том числе и возможным уменьшением  $K_D$  при построении  $VCF_{SSS}$ .

В работе вычисление  $VCF_{PSS}$  принимаемого сигнала и эталонного  $PSS$  пользователя производится по формуле:

$$VCF_{PSSij}[k, r] = \frac{\left| \sum_{n=0}^{127} REC_j[k+n] * \exp[2\pi * (\Delta f_{sc} * n + dF_{DREC}) * \Delta t] * PSS_i^*[i, n] \right|}{\sqrt{\sum_{n=0}^{127} |REC_j[k+n]|^2 * \sum_{n=0}^{127} |PSS_i^*[i, n]|^2}} \quad (3)$$

где  $i, j = 0, 1, 2$  – номер тестового  $PSS_i$  и номер принятого  $REC_j$ , построенных на одной из последовательностей  $ZC(u = 25, 29, 34; n = 62)$ ;  $-127+9 < k < 128$  – переменная сдвига по оси времени;  $r$  – переменная по оси частоты,  $n$  – номер выборки по оси времени тестового  $PSS_i$  и принятого  $REC_j$ ;  $dF_{DREC}$  – частотное смещение принятого OFDM – символа  $PSS$ .

Оценка временного положения корреляционных пиков  $VCF_{PSS}$  производится по алгоритму максимального правдоподобия с методикой расчета нормированных пороговых значений, подробно описанных в [2].

На рис. 3 приведен график 3-х мерной  $VCF_{PSS}$ , построенной на основе  $ZC(25, 62)$ , в координатах: время  $x$  частота  $x$  нормированная амплитуда. В основе графика ресурсная матрица (256 x 20) элементов; шаг временной сетки –  $0,52 * 10^{-6}$  с, шаг частотной сетки – 50 Гц. Функция  $VCF_{PSS}$  получена при имитационном моделировании в операционной среде MATLAB. Поскольку матричные моделирующие программы не работают с нулевыми и отрицательными аргументами, график смещен в область положительных аргументов без изменения математической модели функционирования (3)

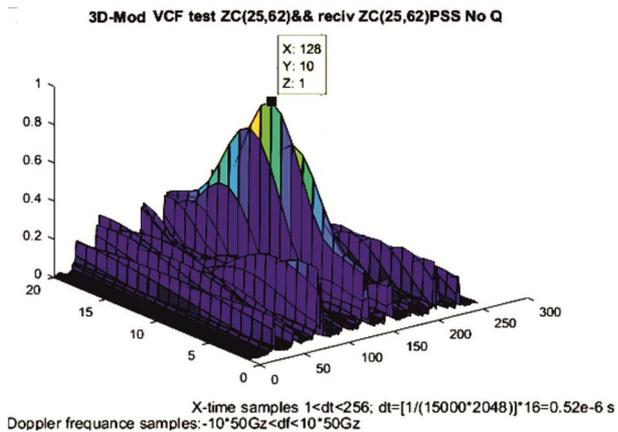


Рис. 3. Модуль  $VCF_{PSS}$  в координатах XYZ: время  $x$  частота  $x$  нормированная амплитуда

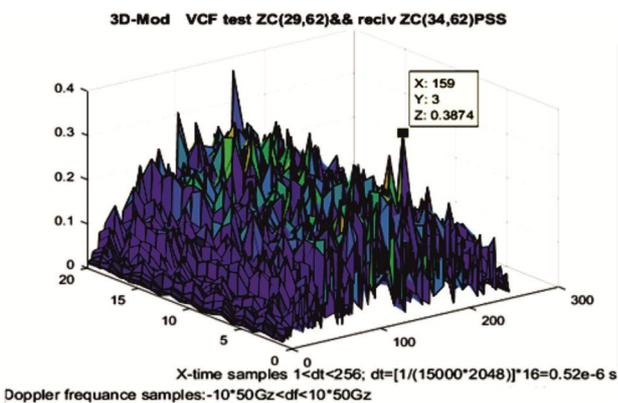


Рис. 4. Модуль  $VCF_{PSS}$  для  $PSS$  тестовой  $ZC(29, 62)$  и принятого из канала связи  $PSS ZC(34, 62)$  в координатах XYZ: время  $x$  частота  $x$  нормированная амплитуда

На рис. 4 – нормированная  $VCF_{PSS}$ , для случая различных последовательностей  $ZC(29, 62)$  и  $ZC(34, 62)$  в качестве последовательностей тестового  $PSS$  и принятого  $PSS$ .

Одна из основных задач проектирования систем мобильных пользователей – снижение аппаратно – программных ресурсов систем. В плане этой задачи проведено моделирование функции  $VCF_{PSS}$  для квантованной последовательности  $ZC(25, 62)$  с шагом квантования  $Q = 1/32$  (рис. 5).

В статье [4] обоснована возможность квантования  $ZC(u, n)$  без снижения корреляционных свойств последовательности при шаге квантования  $Q = 1/16, 1/32, 1/64$ .

Одним из критериев оценки качества синхронизации является исследование частоты попадания значений функции  $VCF_{PSS}$  в область достоверных значений при установлении какой – либо нормированной величины порога для случаев квантованной и неквантованной последовательности  $ZC(25, 62)$  в сравнении с тестовой  $VCF_{ZC\_test}$ , построенной на неквантованной  $ZC(25, 62)$  без учета доплеровского смещения частоты принятого  $PSS$  и частотной отстройки опорного генератора приемника, т.е. идеальной  $VCF_{ZC\_test}$ . Поскольку при прохождении входного полосового фильтра с полосой пропускания  $\Delta F_{PSS} = 1,08$  МГц, равной 6 ресурсным блокам (6RB), занимаемых  $PSS$  в частотной области, аддитивный гауссовский шум (БГШ) канала связи сохранится в этой частотной полосе, имитационное моделирование получения  $VCF_{PSS}$  и  $VCF_{ZC\_test}$  проводится с учетом влияния БГШ на синхросигнал  $PSS$ . При моделировании для определенности принята величина отношения сигнал / шум  $SNR = 0$  dB. Усреднение результатов производилось по 10 испытаниям.

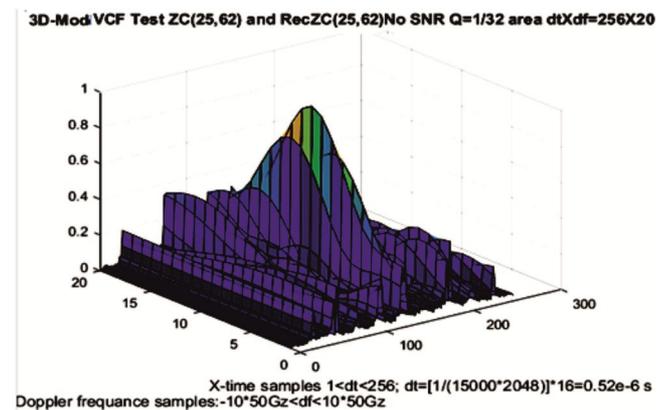


Рис. 5. Модуль  $VCF_{PSS}$  на основе квантованной  $ZC(25, 62)$  с шагом квантования  $Q = 1/32$  в координатах XYZ: время  $x$  частота  $x$  нормированная амплитуда

Частота попадания  $VCF_{PSS}$  в область достоверных значений ( $H$ )  $corr\_area$  определяется по формуле функции Лапласа [5]:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Аргумент  $x$  функции  $\Phi(x)$  вычисляется как отношение числа элементов нормированной функции  $VCF_{PSS}$  ( $VCF_{ZC\_test}$ ) с величиной выше порогового значения к общему числу элементов  $VCF_{PSS}$  ( $VCF_{ZC\_test}$ ). Следует отметить, что для  $VCF_{PSS}$  общее число элементов равно

Таблица 2

ПОРОГ норм (H)	P(H) corr_area VCF(ZC(25,62) no Q SNR = 0 dB	P(H) corr_area VCF(ZC(25,62) Q = 1/32 SNR = 0 dB	P(H) corr_area в лог.масштабе no Q SNR = 0 dB	P(H) corr_area в лог.масштабе Q = 1/32 SNR = 0 dB
0,1	0,2786	0,2494	-0,5550	-0,5596
0,3	0,02155	0,02381	-1,6666	-1,6232
0,4	0,0104	0,007673	-1,983	-2,115
0,5	0,004626	0,004853	-2,3348	-2,314
0,6	0,00395	0,004175	-2,4034	-2,3793
0,7	0,00282	0,003047	-2,5498	-2,5161
0,8	0,001805	0,00158	-2,7435	-2,8034
0,9	0,000882	0,000882	-3,0548	-3,0548

Таблица 3

ПОРОГ норм (H)	P(H) corr_area VCF(ZC(25,62) PSS no Q SNR = 0 dB	P(H) corr_area VCF(ZC(25,62) test ACF ZC(25,62) no Q SNR = 0 dB	P(H) corr_area в лог.масштабе PSS no Q SNR = 0 dB	P(H) corr_area в лог.масштабе test ZC(25,62) no Q SNR = 0 dB
0,1	0,2786	0,0485	-0,5550	-1,314
0,2	0,070255	0,0132	-1,1535	-1,879
0,3	0,02155	0,0044	-1,6666	-2,357
0,4	0,0104	0,0044	-1,983	-2,357
0,5	0,004626	0,0044	-2,3348	-2,357
0,6	0,00395	0,0044	-2,4034	-2,357
0,7	0,00282	0,0044	-2,5498	-2,357
0,8	0,001805	0,0044	-2,7435	-2,357
0,9	0,001102	0,0044	-3,9578	-2,357

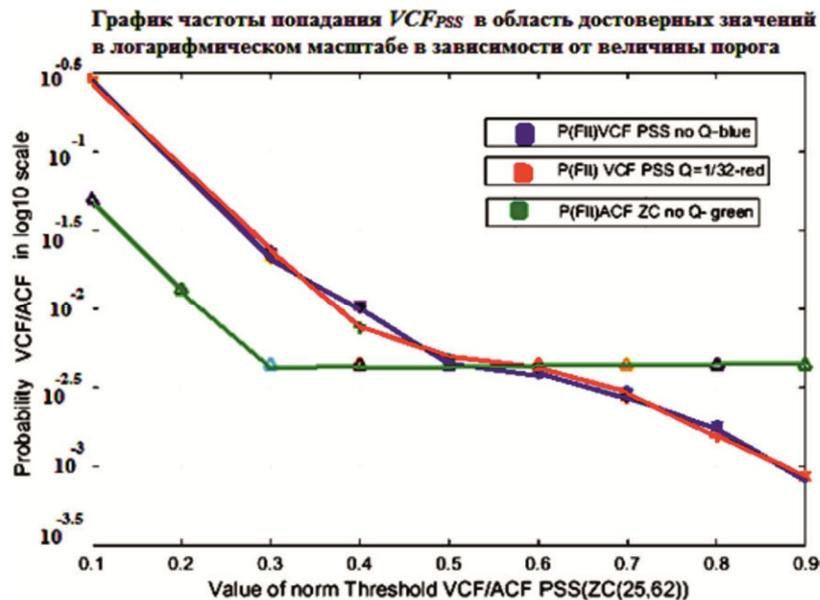


Рис. 7. Зависимость частоты попаданий корреляционных функций PSS для квантованной с  $Q = 1/32$  (красная линия) и неквантованной (синяя линия) последовательности ZC(25,62) от нормированной величины порога. Зеленая линия соответствует идеальной тестовой  $VCF_{ZC\_test}$ , описанной выше

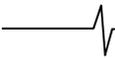
(256x20), а для  $VCF_{ZC\_test} - 256$ , т.к. считаем, что в процессе стандартных операций обработки принятого OFDM-символа PSS (БПФ, «эквалайзирование») проведено полное частотное выравнивание ресурсных элементов принятого символа PSS. Чем меньше область достоверных значений  $VCF_{PSS}$  относительно общей ресурсной матрицы элементов корреляционной функции, тем более острым является главный пик  $VCF_{PSS}$  и меньше величины ее боковых лепестков, что обеспечивает более высокую точность синхронизации.

Результаты исследований для  $SNR = 0$  dB отражены в табл. 2, и табл. 3: в табл. 2 – сравнительные результаты для  $VCF_{PSS}$  неквантованной последовательности ZC(25,62) и квантованной с шагом  $Q = 1/32$ ; в табл. 3 –

сравнительные результаты  $VCF_{PSS}$  неквантованной последовательности ZC(25,62) и  $VCF_{ZC\_test}$ . На рис. 7 приведены графики, отражающие поведение исследуемых корреляционных функций.

Для значения нормированного порога  $H = 0,9$  точность временной синхронизации, исходя из полученных данных имитационного моделирования, и для идеальной тестовой  $VCF_{ZC\_test}$ , и для  $VCF_{PSS}$ , квантованной с  $Q = 1/32$  и неквантованной последовательности ZC(25,62) одинакова: один период выборки дискретизации во времени многочастотного символа PSS, т.е.  $\pm 0,52 \cdot 10^{-6}$  с.

Прямая линия для  $VCF_{ZC\_test}$ , проходящая от величины порога  $H = 0,3$  до  $H = 0,9$  объясняется единственным главным пиком  $VCF_{ZC\_test}$ , являющимся для идеальной



тестовой корреляционной кривой  $\delta$ -функцией. Пересечение всех линий графика в окрестности нормализованной величины порога  $H = 0,55$  позволяет сделать вывод о минимальной величине порога при оптимальном приеме  $PSS$  по критерию максимального правдоподобия.

Точность частотной синхронизации для тестовой  $VCF_{ZC\_test}$ , т.е. остаточная величина частотного смещения  $\Delta f_{shift} = 0$ . Для  $VCF_{PSS}$  неквантованной  $ZC(25,62)$   $\Delta f_{shift} = \pm 1$  выборка дискретизации частотного доплеровского сдвига, т.е.  $\pm 50$  Гц, т.к. при превышении порога  $H = 0,9$  в область достоверных значений пиков  $VCF_{PSS}$  попадает в среднем 3 пика с  $r = 10$  – центральный пик, что соответствует  $\Delta f_{shift} = 0$  и с  $r = 9, r = 11$ , что соответствует  $\Delta f_{shift} = \pm 50$  Гц. Для  $VCF_{PSS}$  квантованной  $ZC(25,62)$  с шагом  $Q = 1/32$   $\Delta f_{shift} = \pm 100$  Гц, т.е. в среднем 5 пиков в области достоверных значений пиков  $VCF_{PSS}$ .

Как известно [6], для БПФ/ОБПФ преобразований общее количество операций умножений для  $n$  выборок:  $N = n * \log_2(n) * n * \log_2(n)$  [6]. Тогда, при стандартном количестве выборок на символ – 2048 [1], количество умножений  $N_1 = 22528$ . При децимации с коэффициентом 16 количество умножений  $N_1 = 896$ , т.е. уменьшается в 25 с лишним раз без снижения качества процедуры синхронизации. Операция компенсации частотного смещения (эквалайзер) для стандартной обработки  $PSS$  символа –  $N_2 = 2048$  операций умножения. Для классической корреляционной функции тестовой и принятой в виде  $PSS$  символа последовательности  $ZC(u, n)$  необходимо провести операцию обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ) и корреляционную функцию во временной области, что потребует  $N_1 = 22528$  умножений плюс  $N_3 = 4096$  умножений и сложений. Для 128 выборок на символ OFDM  $N_1 = 896$  (ОБПФ),  $N_2 = 128$   $N_3 = 256$ . Для предложенного алгоритма корреляционной функции  $PSS$  во временной области  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = 256$ . Общее число операций умножения / сложения для классического метода обработки принятого символа с числом выборок 2048  $N_{2048} = 2 * N_1 + N_2 + N_3 = 51200$  операций умножения; для символа с числом выборок 128  $N_{128} = 2176$  операций.

### Заключение

Анализ полученных данных для  $VCF_{ZC\_test}$  и для  $VCF_{PSS}$ , квантованной с шагом  $Q = 1/32$  и неквантованной последовательности  $ZC(25,62)$ , позволяет сделать вывод о возможности синхронизации по корреляцион-

ной кривой первичного многочастотного синхросигнала ( $PSS$ ) во временной области, не переходя в область частотной компенсации доплеровского сдвига. При этом точность синхронизации по функции корреляции  $VCF_{PSS}$ , в случае построения многочастотного  $PSS$ -символа как на неквантованной, так и на квантованной с шагом квантования  $Q = 1/32$  последовательности  $ZC(25,62)$  равна  $\pm 0,52 * 10^6$  с, как и для корреляционной кривой последовательности  $ZC(25,62)$ , полученной классической обработкой принятого  $PSS$ -символа, т.е. переходом в частотную область обработки с помощью БПФ и частотного выравнивания «эквалайзированием». При этом точность частотной синхронизации для  $PSS$ , построенной на неквантованной  $ZC(25,62)$  – порядка  $\pm 50$  Гц; для  $PSS$  на квантованной  $ZC(25,62)$  – порядка  $\pm 100$  Гц, что вполне допустимо для значений несущей частоты с  $f_0 = 100$  МГц и выше из расчета допустимой отстройки несущей частоты 0,1 ppm [3].

Алгоритм синхронизации по  $VCF_{PSS}$ , ограниченный временной областью реализации, позволяет снизить вычислительную нагрузку исключением БПФ-обработки и «эквалайзирования» с целью выравнивания принятой ресурсной матрицы  $PSS$ -символа.

### Литература

1. ETSI TS 136 211 V10.0.0 (2011-01). Technical Specification. – European Telecommunications Standards Institute, 2011 – 104 с.
2. Гельгор А.Л., Попов Е.А. Технология LTE мобильной передачи данных: учебное пособие. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2011 – 204 с.
3. 3GPP, «3GPP TS 36.104 V11.8.2. 3rd Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Base Station (BS) radio transmission and reception (Release 11)», 3rd Generation Partnership Project, Tech. Rep., April, 2014.
4. Киселева Т.П. Исследование свойств циклической автокорреляционной функции последовательности Задова-Чу в зависимости от характеристик квантования элементов последовательности. М.: Цифровая Обработка Сигналов, № 4, 2018, 40-44 с.
5. Функция ошибок. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://abakbot.ru/online-16/451-erf> (дата обращения: 10.02.2020).
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986, 386-390 с.

УДК 621.391.822.3

## О ВЛИЯНИИ КВАНТОВАНИЯ ПО УРОВНЮ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ ПОИСКА ШУМОПОДОБНОГО СИГНАЛА ПО ЗАДЕРЖКЕ НА ФОНЕ ШУМА И ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ

*Кузьмин Е.В., к.т.н., доцент, доцент кафедры радиотехники ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»; e-mail: EKuzmin@sfu-kras.ru ; kuzminev@mail.ru*

### EFFICIENCY OF THE SPREAD SPECTRUM SIGNAL SEARCHING PROCEDURE IN CASE OF CONTINUOUS WAVE INTERFERENCE AND QUANTIZATION EFFECT

*Kuzmin E.V.*

*This paper deals with the characteristics of the non-threshold spread spectrum signal searching by the delay procedure in case of continuous wave interference influence and quantization effect. This study applied the method of statistical modeling to obtain curves of correct searching probability vs. the reception conditions for various versions of the bit-width of the analog-to-digital conversion. The article presents estimation of possible losses in efficiency of the spread spectrum signal searching procedure occurring due to the quantization effect.*

**Key words:** spread spectrum signal, continuous wave interference, spread spectrum signal searching, correct searching probability, n-bit quantization, quantization noise, discrete Fourier transform.

**Ключевые слова:** шумоподобный сигнал, гармоническая помеха, поиск шумоподобного сигнала, вероятность правильного поиска, многоуровневое квантование, шум квантования, дискретное преобразование Фурье.

#### Введение

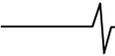
В радиоэлектронных системах широкое применение находят шумоподобные сигналы (ШПС), формируемые на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) [1-5]. Как правило, на начальном этапе приёма ШПС имеется неопределённость относительно времени запаздывания, оценка которого составляет так называемую задачу поиска сигнала по задержке [6]. На эффективность процедуры поиска способны оказывать влияние внешние воздействия, в простейшем случае представляющие собой гармоническую помеху [4; 5; 7-10]. Кроме того, безусловно, влияют особенности реализации цифровой обработки ШПС, и в первую очередь – эффект квантования по уровню из-за ограниченной разрядности аналого-цифрового преобразования (АЦП) [4; 5; 11]. Несмотря на сравнительно хорошую изученность вопросов, касающихся влияния квантования по уровню на качество обработки сигналов, интерес исследователей к этому направлению не ослабевает, о чём свидетельствуют многочисленные и регулярно появляющиеся научные публикации, к примеру [11-15]. Такой интерес объясняется, в частности, развитием направления реализации программных приёмников [16], где важность аналого-цифрового преобразователя переоценить сложно, поскольку он является «интерфейсом» между аппаратной и программной частью приёмника. Кроме того, исследовательский интерес к вопросам влияния АЦП возникает, когда условия приёма могут быть существенно различающимися с точки зрения количества и интенсивности

*Исследованы характеристики беспороговой процедуры поиска по задержке шумоподобного сигнала, обрабатываемого в смеси с шумом и гармонической помехой при учёте эффекта квантования по уровню. Методом статистического моделирования получены семейства зависимостей вероятности правильного выполнения поиска от условий приёма для различных вариантов разрядности аналого-цифрового преобразования. Дана оценка возможных потерь в эффективности процедуры поиска шумоподобного сигнала, обусловленных эффектом квантования по уровню.*

процессов, наблюдаемых на входе приёмника. В этом случае представляется важным вопрос рационального выбора параметров АЦП, гарантирующих приемлемую работоспособность при существенно отличающихся разумному балансу цены и качества.

В известных публикациях<sup>1</sup> приводятся модели аддитивной смеси входных воздействий, в которых полезный сигнал наблюдается на фоне шума и гармонической помехи (к примеру, [4; 5; 7-10; 17; 18]). При этом изучается влияние последней на качество обнаружения [9], синхронизации [17], демодуляции [18], предлагаются разнообразные методы борьбы с помехой [4; 7; 8; 10], а также приводятся аналитические и вычислительные оценки потерь в помехоустойчивости, связанных с квантованием сигналов по уровню [11; 19; 20]. Однако не демонстрируется влияние эффекта квантования по уровню (влияние АЦП, проявляемое возникновением шума квантования [19; 20]) на вероятность правильного выполнения беспорогового поиска, осуществляемого в условиях оговоренной модели воздействия. Данная ста-

<sup>1</sup> Полный перечень многочисленных известных публикаций по рассматриваемым в статье вопросам не представляется возможным привести в рамках пристатейного списка цитируемой литературы.



тья является продолжением работы [11] и посвящена исследованию влияния обозначенных факторов на эффективность беспороговой процедуры поиска ШПС.

**Цель статьи:** исследование влияния квантования по уровню наблюдаемых реализаций аддитивной смеси шумоподобного сигнала, гармонической помехи и шума на вероятность правильного выполнения поиска по задержке.

### Модель наблюдения и процедура поиска сигнала

Полагаем, что на входе приёмника действует аддитивная смесь шумоподобного сигнала  $y_s(t)$  [1, стр. 50], гармонической помехи  $y_i(t)$  (к примеру, [7; 9; 18]) и шума  $y_n(t)$ :

$$\begin{aligned} y_{\Sigma}(t) &= A_s y_s(t) + A_i y_i(t) + y_n(t), \\ y_s(t) &= g(t) \sin(2\pi f_s t + \varphi_s), \\ g(t) &= \sum_{l=1}^L g_l \operatorname{rect}(t - (l-1)T_g), \quad g_l = \{\pm 1\}_{l=1}^L, \\ y_i(t) &= \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_s = \sqrt{2P_s}$  – амплитуда сигнала,  $P_s$  – его мощность,  $f_s$  – центральная частота сигнала,  $\varphi_s$  – начальная фаза,  $g(t)$  – видеосигнал бинарной ПСП длины  $L$ ,  $\operatorname{rect}(t)$  – одиночный прямоугольный видеоимпульс с единичной амплитудой и длительностью  $T_g$ ;  $A_i = \sqrt{2P_i}$  – амплитуда гармонической помехи,  $P_i$  – её мощность,  $f_i$  – частота помехи,  $\varphi_i$  – начальная фаза помехи. Выполнение операций дискретизации по времени аддитивной смеси  $y_{\Sigma}(t)$  (1) с шагом  $T$  и квантования по уровню с округлением [11; 20] даёт отсчёты

$$y_{\Sigma_{\text{кв}}}(kT) = U \left\{ \left\lfloor \frac{y_{\Sigma}(kT)}{U} + 0.5 + \frac{m}{2} \left[ -\frac{m}{2} \right] \right\rfloor \right\}, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

которые при проведении исследования будем считать входными наблюдениями для процедуры поиска. В выражении (2) введены следующие обозначения:  $y_{\Sigma}(kT) = A_s y_s(kT) + A_i y_i(kT) + y_n(kT, \sigma_n^2)$  – выборки дискретизированной смеси (1);  $k$  – номер выборки;  $N$  – объём выборки;  $\sigma_n^2 = N_0/2T$  – дисперсия дискретизированного белого шума;  $N_0$  – спектральная плотность мощности; символ  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает выделение целой части числа;  $U = D_{\max}/m$  – шаг квантования по уровню;  $D_{\max}$  – максимальный диапазон изменения значений смеси (1);  $m = 2^{q_{\text{анн}}}$  – число уровней квантования;  $q_{\text{анн}}$  – разрядность АЦП.

Процедура поиска сигнала  $y_s(t-\tau)$  предполагает определение априорно неизвестной задержки  $\tau$  и выполняется на основе оптимального правила различения сигналов, предполагающего вычисление взаимных корреляционных функций (ВКФ)  $Z_r$  входных наблюдений  $y_{\Sigma}(t)$  и опорных сигналов  $s_{0r}(t-\tau_r)$  – копий полезного

сигнала, отличающихся устанавливаемыми задержками  $\tau_r$  [6]. Максимальное из определённых значений ВКФ является указателем на временную координату  $r$ , на основе которой вычисляется оценка задержки  $\hat{\tau}$  сигнала, содержащегося в смеси (1) и наблюдениях (2).

Проводя квадратурное преобразование отсчётов входных наблюдений  $\frac{I_{\Sigma}(kT)}{Q_{\Sigma}(kT)} = y_{\Sigma}(kT) \frac{\cos(2\pi f_s kT)}{\sin(2\pi f_s kT)}$  и несмещённого дискретизированного опорного сигнала  $\frac{I_0(kT)}{Q_0(kT)} = s_0(kT) \frac{\cos(2\pi f_s kT)}{\sin(2\pi f_s kT)}$ , что даёт комплексные векторы  $\dot{Y}_{\Sigma} = \{I_{\Sigma}(kT) + jQ_{\Sigma}(kT)\}_{k=1}^N$  и  $\dot{S}_0 = \{I_0(kT) + jQ_0(kT)\}_{k=1}^N$ , содержащие  $N$  отсчётов, а также применяя известный подход к вычислению ВКФ [21], основанный на преобразовании Фурье, выражение для выходного эффекта беспороговой процедуры поиска запишем аналогично [11]:

$$Z = \left| F^{-1} \left\{ F(\dot{Y}_{\Sigma}) \cdot F^*(\dot{S}_0) \right\} \right|, \quad (3)$$

где  $F^{-1}\{\cdot\}$  – оператор обратного преобразования Фурье;  $F\{\cdot\}$  – оператор прямого преобразования Фурье; символ  $|\cdot|$  означает вычисления модуля; звёздочка означает комплексное сопряжение; точка сверху означает комплексную величину. При решении задачи поиска факт присутствия полезного сигнала в смеси (1) полагается известным [6]. Частота сигнала считается известной, либо оценённой с приемлемой точностью.

### Результаты исследования

В работе проведено исследование влияния разрядности АЦП  $q_{\text{анн}}$  на качество процедуры поиска ШПС по задержке, основанной на выражении (3), при обработке наблюдений, формируемых по смеси (1) согласно (2). Эффективность процедуры поиска аттестовывалась вероятностью правильного выполнения поиска  $P$  [6; 10; 11], которая оценивалась на основе методики [10] при числе статистических испытаний  $10^5$ . Условия приёма полезного сигнала  $y_s(t-\tau)$  характеризовались следующими основными параметрами: неизменным энергетическим потенциалом  $q_{\text{зн}} = 10 \lg(P_s/N_0) = 45$  дБГц; изменяемым с шагом 1 дБ отношением «гармоническая помеха/сигнал»  $q_{\text{пс}} = 10 \lg(P_i/P_s)$ ; случайными равномерно распределёнными в каждом испытании задержкой ШПС  $\tau \in [0; LT_g)$  и фазой помехи  $\varphi_i \in [0; 2\pi)$ ; объёмом выборки  $N = 4096$ ; величиной  $(Tf_s)^{-1} = 4$ ; длиной ПСП  $L = 511$ . Максимальный диапазон изменения значений смеси (1)  $D_{\max} \approx 2A_{i\max}$  выбран таким образом, чтобы значения наблюдаемой реализации оказывались не выходящими за границы «раскрыва» квантователя при максимальном из рассматриваемых отношений «гармоническая помеха/сигнал»  $q_{\text{пс max}}$  – при максимальной амплитуде помехи  $A_{i\max}$ .

На рис. 1 и 2 представлены семейства зависимостей вероятности правильного выполнения поиска  $P$  от отношения «гармоническая помеха/сигнал»  $q_{\text{пс}}$ , полученные при различных значениях разрядности АЦП и для

произвольно выбранных частотных смещений  $0 \leq \Delta f < 1/T_g$  гармонической помехи относительно центральной частоты сигнала ( $\Delta f = |f_s - f_i|$ ). Кривые пронумерованы группами, причём для групп 1–6 сплошными линиями показаны зависимости, полученные без ограничения (б/о) разрядности, а примыкающими к ним пунктирными линиями показаны зависимости, соответствующие разрядностям  $q_{\text{анп}} = 8, 9, 10$ . На рис. 1 примыкающие к сплошным линиям пунктирные линии соответствуют  $q_{\text{анп}} = 8$ , а на рис. 2 группы кривых 1-3 показаны в укрупнённом масштабе, что позволяет видеть интуитивно-ожидаемое расположение линий, соответствующих случаям квантованной смеси  $y_{\Sigma_{\text{кв}}}(kT)$  при  $q_{\text{анп}} = 8, 9, 10$ , а также смеси  $y_{\Sigma}(kT)$  – то есть без квантования по уровню. При  $q_{\text{анп}} \geq 10$ , кривые  $P(q_{\text{ис}})$  становятся практически неразличимыми с кривой, рассчитанной для случая отсутствия квантования по уровню. Штрих-пунктирные кривые, образующие группу 7 на рис. 1, соответствуют знаковому ограничению смеси  $\text{sign}(y_{\Sigma}(kT))$ , где  $\text{sign}(\cdot)$  – функция знака.

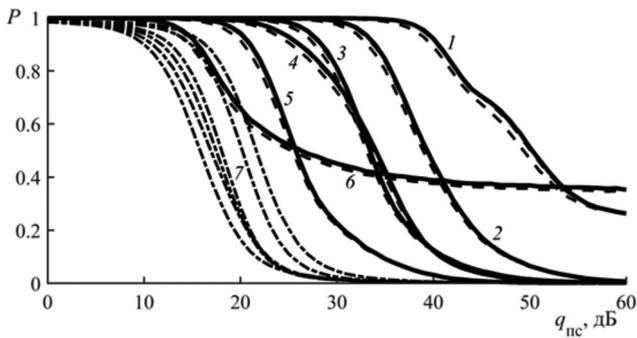


Рис. 1. Зависимости вероятности правильного выполнения поиска от отношения «гармоническая помеха/сигнал»

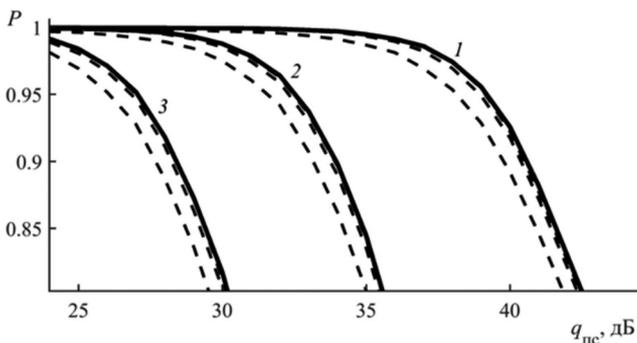


Рис. 2. Зависимости вероятности правильного выполнения поиска от отношения «гармоническая помеха/сигнал»

Представленные на рис. 1 и 2 зависимости свидетельствуют о том, что для принятых условий статистического вычислительного эксперимента, знаковое ограничение наблюдений аддитивной смеси  $\text{sign}(y_{\Sigma}(kT))$ , а также ограничение разрядности, учитываемое многоуровневым квантованием  $y_{\Sigma_{\text{кв}}}(kT)$  наблюдений, оказывают заметное влияние на выбранный показатель качества – на вероятность правильного выполнения поиска ШПС по задержке на основе (3). Так, установлено, что при знаковом ограничении смеси (1) для рассмотренно-

го интервала отношений  $q_{\text{ис}}$ , вероятность правильного выполнения поиска не превосходит значений  $P \leq 0,99$ , а при  $q_{\text{анп}} \geq 8$  вероятность достигает значений  $0,999 \leq P < 1$ . Полученные зависимости позволяют определить значения отношений «гармоническая помеха/сигнал»  $q_{\text{ис}}$ , при которых обеспечивается заданный уровень вероятности правильного выполнения поиска  $P$ , и, таким образом, сравнить влияние квантователя (2) при различных значениях  $q_{\text{анп}}$ .

В табл. 1-4 выборочно представлены разности в значениях отношений «гармоническая помеха/сигнал»  $\Delta q_{\text{ис}}$ , при которых обеспечивается вероятность правильного выполнения поиска  $P$  для случаев отсутствия и наличия квантования по уровню для указанных значений  $q_{\text{анп}}$ . Данные табл. 1-4 получены соответственно при использовании интерполяции кривых в группах 1–4, показанных на рис. 1.

Таблица 1. Потери в значениях  $q_{\text{ис}}$  при различных  $q_{\text{анп}}$  (группа кривых 1)

$q_{\text{анп}}$	$\Delta q_{\text{ис}}, \text{дБ}$	
	$P = 0,9$	$P = 0,99$
sign	27	–
8	0,8	2
9	0,3	0,5
10-12	0,1	$\rightarrow 0$

Таблица 2. Потери в значениях  $q_{\text{ис}}$  при различных  $q_{\text{анп}}$  (группа кривых 2)

$q_{\text{анп}}$	$\Delta q_{\text{ис}}, \text{дБ}$	
	$P = 0,9$	$P = 0,99$
sign	20	–
8	0,7	1,9
9	0,1	0,3
10-12	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$

Таблица 3. Потери в значениях  $q_{\text{ис}}$  при различных  $q_{\text{анп}}$  (группа кривых 3)

$q_{\text{анп}}$	$\Delta q_{\text{ис}}, \text{дБ}$	
	$P = 0,9$	$P = 0,99$
sign	14,2	–
8	0,8	1,6
9	0,2	0,2
10-12	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$

Таблица 4. Потери в значениях  $q_{\text{ис}}$  при различных  $q_{\text{анп}}$  (группа кривых 4)

$q_{\text{анп}}$	$\Delta q_{\text{ис}}, \text{дБ}$	
	$P = 0,9$	$P = 0,99$
sign	6,2	–
8	0,6	1,8
9	0,2	0,2
10-12	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$

Как видно из табл. 1-4, при  $q_{\text{анп}} = 8$  и требовании  $P = 0,9$  и  $P = 0,99$ , допустимые значения превышения гармонической помехи над сигналом снижаются на ве-

личины порядка 0,8 дБ и 2 дБ соответственно, в сравнении со случаями отсутствия квантования по уровню. Для случаев  $q_{\text{ашп}} > 8$  влияние квантования становится слабозаметным, вплоть до совпадения оценок при  $q_{\text{ашп}} \geq 10$ . Знаковое ограничение смеси  $\text{sign}(y_{\Sigma}(kT))$  приводит к заметному снижению потенциальных возможностей обработки, что наглядно иллюстрируется кривыми группы 7. При этом количественные оценки в снижении допустимых значений превышения гармонической помехи над сигналом характеризуются величинами от единиц до десятков децибел, в зависимости от значения частотного смещения  $\Delta f$  помехи.

### Анализ и обсуждение результатов

Продемонстрированное на рис. 1, 2 негативное влияние ограничения разрядности наблюдений объясняется возникновением шума квантования [11; 19; 20], ухудшающего условия приёма, что выражается в снижении значения энергетического потенциала  $q'_{\text{ап}} = q_{\text{ап}} - 10 \lg(1 + (D_{\text{max}}^2 / (12 \cdot 2^{2q_{\text{ашп}}} \sigma_n^2)))$  [11]. В рамках принятой в статье модели воздействия (1) проведена дополнительная верификация указанного обстоятельства. На рис. 3 представлены две группы кривых вероятностей  $P(q_{\text{пс}})$ , полученных при числе статистических испытаний  $10^5$ , среди которых сплошные кривые соответствуют случаю отсутствия квантования по уровню –  $y_{\Sigma}(kT)$ ; пунктиром показаны кривые для квантованной смеси  $y_{\Sigma_{\text{кв}}}(kT)$  при  $q_{\text{ашп}} = 8$ ; а символами «о» показаны кривые, полученные при отсутствии квантования по уровню, но при обеспечении инъекции в аддитивную смесь дополнительного дискретизированного шума  $y_{\Sigma}(kT) + y_{n_{\text{доп}}}(kT, \sigma_{n_{\text{доп}}}^2)$  с дисперсией  $\sigma_{n_{\text{доп}}}^2 = U^2 / 12$ ,  $U = D_{\text{max}} / 2^8$ , что имитирует шум квантования при  $q_{\text{ашп}} = 8$ .

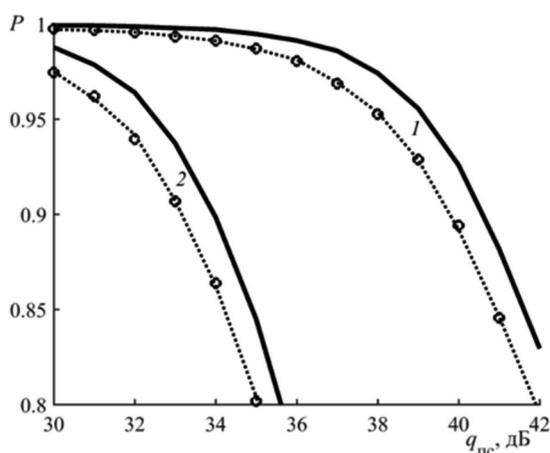


Рис. 3. Зависимости вероятности правильного выполнения поиска от отношения «гармоническая помеха/сигнал»

Как видно из рис. 3, в каждой конкретной группе кривых разброс в значениях  $\Delta q_{\text{пс}}$  для различных  $q_{\text{ашп}}$  объясняется возникновением шума квантования при аналого-цифровом преобразовании. Наблюдаемый существенный разброс положения указанных групп кривых

вероятностей относительно друг друга объясняется, по-видимому, зависимостью мощности гармонической помехи на выходе процедуры (3) от значения частотного смещения  $\Delta f$  помехи, что согласуется с [9; 18].

### Заключение

Проведено исследование влияния квантования по уровню дискретизированной аддитивной смеси шумоподобного сигнала, гармонической помехи и шума на вероятность  $P$  правильного выполнения поиска по задержке. Методом статистического моделирования получены семейства зависимостей вероятности  $P$  от отношения «гармоническая помеха/сигнал»  $q_{\text{пс}}$  при различных вариантах разрядности АЦП  $q_{\text{ашп}}$  и произвольных частотных смещениях помехи  $\Delta f$  относительно частоты сигнала. Полученные зависимости  $P(q_{\text{пс}})$  имеют монотонно-убывающий характер (рис. 1-3) и напоминают передаточные амплитудно-частотные характеристики фильтров нижних частот, причём «частоты среза» таких «фильтров» существенно зависят от величины частотного смещения  $\Delta f$ .

Квантование аддитивной смеси (1) по уровню на основе выражения (2) дополнительно ухудшает условия приёма полезного сигнала, поскольку образует шум квантования. Это обстоятельство снижает эффективность процедуры поиска ШПС по задержке на основе (3), что выражается в уменьшении величины отношения  $q_{\text{пс}}$ , при котором обеспечивается фиксированный уровень вероятности  $P$  правильного выполнения поиска.

Полученные количественные оценки возможных потерь  $\Delta q_{\text{пс}}$  в отношении «гармоническая помеха/сигнал» при предварительной обработке смеси (1) на основе (2) имеют следующие значения. Установлено, что при рассмотренных условиях приёма знаковое ограничение аддитивной смеси  $\text{sign}(y_{\Sigma}(kT))$  приводит к наибольшим потерям в допустимом отношении  $q_{\text{пс}}$ , выражаемым значениями  $\Delta q_{\text{пс}}$  от единиц до десятков децибел в зависимости от частотного смещения помехи  $\Delta f$  относительно частоты сигнала. Многоуровневое квантование смеси  $y_{\Sigma_{\text{кв}}}(kT)$  при разрядности АЦП  $q_{\text{ашп}} \geq 8$  оказывает существенно меньшее влияние, исчисляемое значениями  $\Delta q_{\text{пс}} < 1$  дБ ( $P = 0,9$ ) и  $\Delta q_{\text{пс}} < 2$  дБ ( $P = 0,99$ ).

Таким образом, при высоких требованиях к достоверности поиска ШПС по задержке ( $0,999 \leq P < 1$ ) в условиях (1), (2), необходимо применение многоуровневого квантования при разрядности АЦП  $q_{\text{ашп}} \geq 8$ , поскольку для рассмотренного интервала отношений  $q_{\text{пс}}$ , при знаковом ограничении смеси (1) вероятность  $P \leq 0,99$ .

### Литература

1. Тузов Г.И. Статистическая теория приёма сложных сигналов / Г.И. Тузов. – М.: Сов. радио, 1977. – 400 с.
2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.

3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр. – 2-е изд., испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.
5. Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems / Eds. Peter J.G. Teunissen, Oliver Montenbruck. – Springer International Publishing AG, 2017. – 1327 с.
6. Поиск, обнаружение и измерение параметров сигналов в радионавигационных системах / В.П. Ипатов, Ю.М. Казаринов, Ю.А. Коломенский, Ю.Д. Ульяницкий; под ред. Ю.М. Казаринова. – М.: Сов. радио, 1975. – 296 с.
7. Перов А.И. Синтез оптимального алгоритма обработки сигналов в приёмнике спутниковой навигации при воздействии гармонической помехи / А.И. Перов // Радиотехника. – 2005. – № 7. – С. 36-42. (Радиосистемы (вып. 89)).
8. Перов А.И. Исследование адаптивных трансверсальных фильтров для приёмников спутниковой навигации при воздействии узкополосных помех / А.И. Перов, Е.Н. Болденков // Радиотехника. 2006. №7. С. 98-105. (Радиосистемы (вып. 101)).
9. Неровный В.В. Эффективность поиска и обнаружения сигналов ГНСС в условиях гармонических помех / В.В. Неровный, П.Д. Коратаев, А.В. Коровин, М.В. Авдеев // Сб. трудов XX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация и связь». – 2014. – С. 1030-1034.
10. Кузьмин Е.В. Повышение вероятности правильного поиска шумоподобного сигнала по времени запаздывания на фоне тональной помехи / Е.В. Кузьмин, Ф.Г. Зограф // Успехи современной радиоэлектроники. – 2016. – №11. – С. 137-140.
11. Кузьмин Е.В. Исследование эффективности беспроговой процедуры поиска псевдослучайного сигнала при ограничении разрядности входных наблюдений / Е.В. Кузьмин // Цифровая обработка сигналов. – 2020. – № 1. – С. 9-12.
12. Беляков А.В. Влияние аналого-цифрового преобразователя на вероятностные характеристики гауссова шума / А.В. Беляков, А.В. Якимов // Известия вузов. Радиофизика. – 2002. – Т. XLV. – № 6. – С. 533-537.
13. Брюханов Ю.А. Метод исследования периодических процессов в неавтономных системах дискретного времени с квантованием / Ю.А. Брюханов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53. – № 7. – С. 851-857.
14. Брюханов Ю.А. Нелинейные процессы в цифровых фильтрах с квантованием и переполнением / Ю.А. Брюханов, Ю.А. Лукашевич // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – № 2. – С. 179-185.
15. Брюханов Ю.А. Нелинейные искажения при сигнала-дельта аналого-цифровом преобразовании сигналов / Ю.А. Брюханов, Ю.А. Лукашевич // Радиотехника и электроника. – 2017. – Т. 62. – № 3. – С. 224-233.
16. Галкин В.А. Основы программно-конфигурируемого радио / В.А. Галкин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2015. – 372 с.
17. Сидоркина Ю.А. Схема Костаса при воздействии аддитивных гармонических помех и широкополосного шума / Ю.А. Сидоркина, В.В. Сизых, Б.И. Шахтарин, В.А. Шевцев // Радиотехника и электроника. – 2016. – Т. 61. – № 7. – С. 671-680.
18. Куликов Г.В. Помехоустойчивость приема сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией в присутствии гармонической помехи / Г.В. Куликов, А.В. Нестеров, А.А. Лелюх // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. – 2018. – № 11. – Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov18/9/text.pdf>.
19. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
20. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. / А.С. Глинченко. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. – 482 с.
21. Daigle J.N. A specialized fast cross-correlation for acoustical measurements using coded sequences / J.N. Daigle, N. Xiang // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, № 1, January 2006. Pp.330-335.

## ТРЕХМЕРНАЯ ГРАФИКА В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА КВАНТОВАННЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Мингазин А.Т., в.н.с., к.т.н., РАДИС Лтд, Москва, Зеленоград, e-mail: alexmin@radis.ru

## THREE-DIMENSIONAL GRAPHICS IN ANALYSIS PROBLEM OF QUANTIZED FIR FILTERS

Mingazin A. T.

Three-dimensional graphics are used for analysis FIR filters with quantized coefficients. The analysis is based on variation of initial parameters and involves the plotting of a three-dimensional graph, namely, the dependence of the controlled parameter of magnitude response on two initial parameters used to design optimal FIR filters. Examples of analysis of halfband FIR filter with one and three quantization steps of its coefficients are given.

**Key words:** optimum FIR filters, halfband FIR filters, analysis of direct structure, one and three-step coefficient quantization, variation of initial parameters, three-dimensional graphics.

**Ключевые слова:** оптимальные КИХ-фильтры, полуполосные КИХ-фильтры, анализ прямой структуры, один и три шага квантования коэффициентов, вариация исходных параметров, трехмерная графика.

#### Введение

Для анализа/синтеза КИХ-фильтров с квантованными коэффициентами (квантованных КИХ-фильтров) часто используют прямой метод, который благодаря своей наглядности и простоте нашел широкое распространение. При этом степень влияния квантования коэффициентов на изменение АЧХ фильтра оценивается лишь для одного набора исходных параметров. Однако при использовании одного или даже нескольких наборов исходных параметров не всегда корректно судить о преимуществе той или иной аппроксимации АЧХ или структуры фильтра. С помощью вариации исходных параметров (ВИП) можно улучшить результаты прямого метода. В частности, для анализа (ВИП-анализа) степени влияния квантования коэффициентов можно использовать построенные зависимости контролируемых параметров АЧХ фильтра от выбранного исходного параметра. В [1] этот подход применен к оптимальным КИХ-фильтрам, синтезируемым с помощью алгоритма Ремеза-Паркса-Мак-Клеллана (см., например, функцию `remez` (...) в среде MATLAB). Так для фильтров нижних частот прямой структуры с непрерывными и квантованными коэффициентами представлены и обсуждены варианты построения зависимостей контролируемых параметров от исходных. Кроме того, проведен анализ построенных зависимостей максимальной относительной ошибки АЧХ от исходного отношения уровней пульсаций в полосах пропускания и задерживания для четырех структур КИХ-фильтров.

В данной статье сделано еще одно усилие в направлении улучшения ВИП-анализа, а именно предлагается построение зависимости контролируемого параметра АЧХ оптимальных КИХ-фильтров не от одного как в [1], а сразу от двум выбранных исходных параметров. Пос-

Трехмерная графика применена в задаче анализа КИХ-фильтров с квантованными коэффициентами. Анализ основан на методе вариации исходных параметров и предполагает построение трехмерного графика, а именно зависимости контролируемого параметра АЧХ от двух исходных параметров, используемых для расчета оптимальных КИХ-фильтров. Приведены примеры анализа полуполосного КИХ-фильтра прямой структуры с одним и тремя шагами квантования коэффициентов.

ле описания контролируемых и исходных параметров приведены примеры анализа представленных зависимостей для оптимального полуполосного КИХ-фильтра прямой структуры. Построения выполнены в среде трехмерной графики MATLAB.

#### Контролируемые и исходные параметры

Требования для КИХ-фильтров со стандартными АЧХ можно в частности свести к контролю относительных ошибок вида

$$\begin{cases} e_1 = \delta_1^{\#} / \delta_{1\max} \leq 1, \\ e_2 = \delta_2^{\#} / \delta_{2\max} \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

или

$$e = \max(e_1, e_2) \leq 1, \quad (2)$$

где  $\delta_1^{\#}$  и  $\delta_2^{\#}$  – максимальные уровни отклонений (пульсаций) АЧХ от 1 и от 0 в номинальных полосах пропускания и задерживания синтезированного фильтра, а  $\delta_{1\max}$  и  $\delta_{2\max}$  заданные их предельно допустимые значения; полагается, что АЧХ нормирована относительно своего среднего уровня усиления в полосе пропускания.

Порядок оптимального КИХ-фильтра  $N$ , удовлетворяющий заданным требованиям, оценивается по предельно допустимым отклонениям  $\delta_{1\max}$ ,  $\delta_{2\max}$  и номинальным граничным частотам полос пропускания и задерживания  $f_{\text{кн}}$ . Обычно  $k = 2$  или  $4$  и  $f_{1n} < f_{2n} < f_{3n} < f_{4n}$ . При фиксированном  $N$  контролируемые параметры, определяемые (1), (2), зависят от исходных значений  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $f_k$  по которым рассчитываются непрерывные коэффициенты фильтра, нормированные так, что их максимальное значение равно единице. Здесь и далее ограничимся рассмотрением только фильтров нижних частот. В этом

случае  $k = 2$ . При выбранном  $N$  расчет фильтра может быть выполнен по любым трем из четырех исходных параметров  $\delta_1, \delta_2, f_1$  и  $f_2$ , значения которых принадлежат определенной области допуска. Рассчитанный фильтр будет удовлетворять условиям (1), (2). Далее полагаем, что все частоты нормированы относительно частоты дискретизации.

В графическом ВИП-анализе [1] граничные частоты фиксируются на номинальных значениях  $f_1 = f_{1n}, f_2 = f_{2n}$  и предполагается построение двумерного графика зависимости ошибки АЧХ от отношения пульсаций  $r = \delta_1 / \delta_2$  для фильтров с непрерывными и квантованными коэффициентами. В [1] был проиллюстрирован хорошо известный факт (автору он знаком из ранней работы [2]), а именно влияние константы, задающей усиление фильтра  $A$ , на ошибки АЧХ при условии, что коэффициенты КИХ-фильтра перед их квантованием умножаются на  $A$ . Таким образом для построения трехмерных графиков в общем случае можно использовать любые два из четырех исходных параметров  $r, f_1, f_2$  и  $A$ .

В частном случае для оптимальных полуполосных КИХ-фильтров, которые будут рассмотрены далее, количество исходных параметров уменьшается до двух и трехмерный график сводится к зависимости ошибок АЧХ (1) или (2) от  $f_2$  и  $A$ . Это связано с тем, что для таких фильтров  $r = 1$ , а  $f_1 + f_2 = 0,5$ . Кроме того, для квантованных полуполосных фильтров, особенно при очень малых допустимых уровнях пульсаций  $\delta_{2max}$ , интерес представляет АЧХ в полосе задерживания. Поэтому

далее рассмотрим зависимости ошибки  $\delta_2^{\#}$  (вместо (1) или (2), как в общем случае) от  $f_2$  и  $A$ . Заметим, что оптимальные и, в частности, полуполосные КИХ-фильтры строго говоря нельзя называть таковыми, если их коэффициенты квантованы.

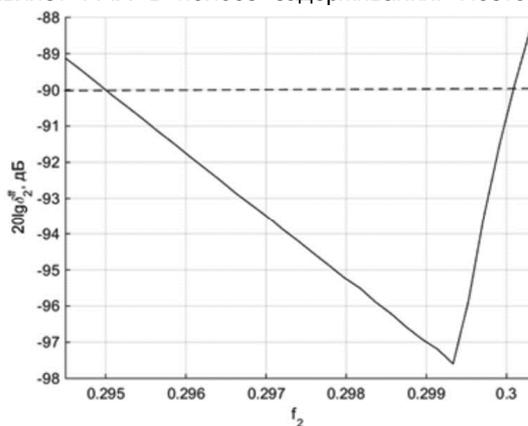
### ВИП-анализ фильтра с непрерывными коэффициентами

Поясним зависимости  $\delta_2^{\#}$  от  $f_2$  и  $A$  для конкретных требований к АЧХ полуполосного КИХ-фильтра нижних частот:

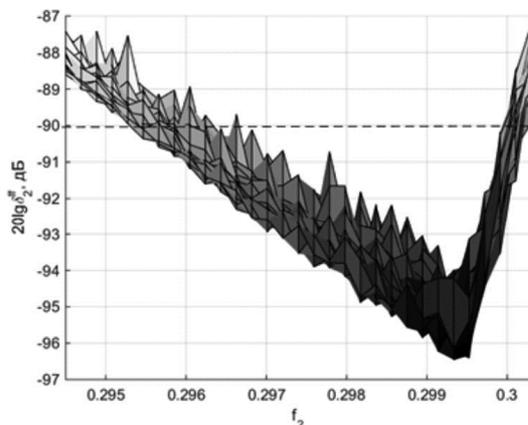
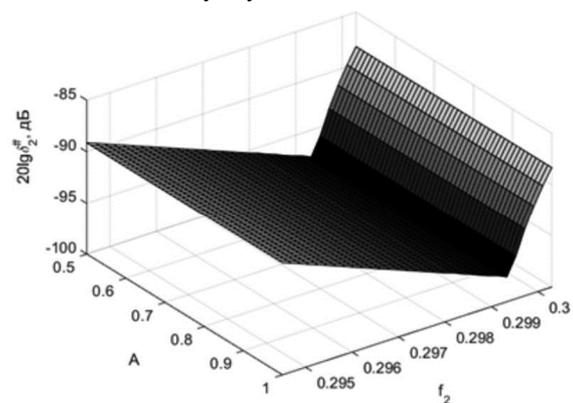
$$f_{1n} = 0,2006, f_{2n} = 0,2994, 20lg\delta_{2max} \cong -90 \text{ дБ}. \quad (3)$$

Как отмечено в [3], полуполосный КИХ-фильтр 58 порядка прямой структуры, удовлетворяющий (3), использован в микросхемах ЦАП DAC38J84 и DAC3482 Texas Instruments.

На рис. 1 а показаны два ракурса зависимости контролируемой ошибки  $\delta_2^{\#}$  от исходных параметров  $f_2$  и  $A$  для обсуждаемого КИХ-фильтра 58 порядка с непрерывными коэффициентами. Оба ракурса иллюстрируют отсутствие влияния параметра  $A$  на  $\delta_2^{\#}$ . Как видим из левой части рис. 1 а требования (3) для точки  $f_2 = f_{2n}$  удовлетворяются с максимальным запасом примерно в 7,7 дБ. Упомянутый ранее прямой метод обычно сводится к анализу параметров АЧХ квантованного фильтра рассчитанного для этой точки. В диапазоне  $0,295 \leq f_2 \leq 0,3001$  АЧХ фильтра удовлетворяет требованиям (3). Максимальный диапазон изменения  $A$  обычно фиксирован и соответствует условию  $0,5 \leq A \leq 1$ .



а)



б)

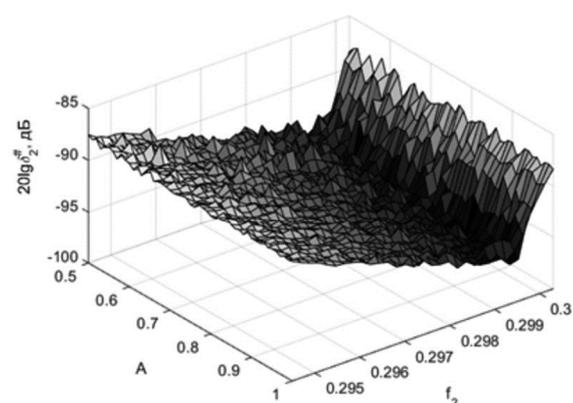


Рис. 1. Два ракурса зависимости ошибки  $\delta_2^{\#}$  от параметров  $f_2$  и  $A$  для КИХ-фильтра 58 порядка с непрерывными (а) и квантованными коэффициентами при  $M = 19$  (б)

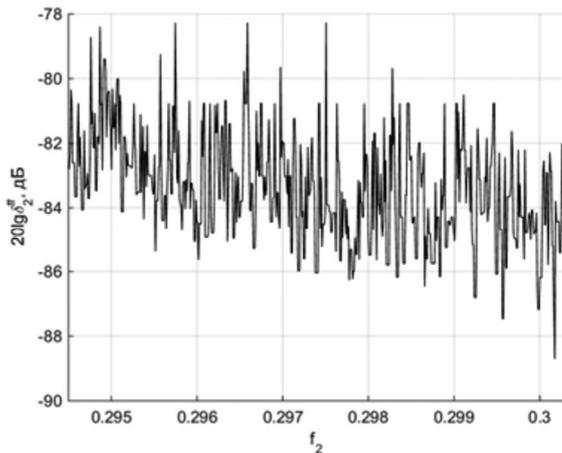
## ВИП-анализ фильтра с одним шагом квантования коэффициентов

Перейдем к ВИП-анализу рассматриваемого КИХ-фильтра с квантованными (округленными) коэффициентами. На рис. 1 б показаны два ракурса зависимости контролируемой ошибки  $\delta_2^\#$  от исходных параметров  $f_2$  и  $A$  для этого фильтра. Здесь длине слова коэффициентов  $M = 19$  соответствует шаг квантования  $q = 2^{-M}$ . Оба ракурса на рис. 1 б в отличие от ракурсов на рис. 1 а иллюстрируют появившееся влияние  $A$  на  $\delta_2^\#$ .

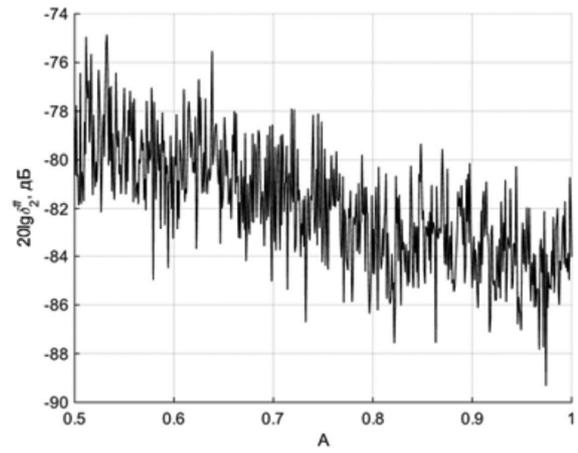
Интересно сравнить результаты анализа, получен-

ные на основе двумерной и трехмерной графики. На рис. 2 а и рис. 2 б показаны зависимости ошибки  $\delta_2^\#$  от параметров  $f_2$  (при  $A = 1$ ) и  $A$  (при  $f_2 = f_{2n} = 0,2994$ ) для  $M = 15$ . На рис. 2 а и рис. 2 б минимальные значения ошибки равны примерно  $-88,7$  дБ при  $f_2 = 0,3002$  и  $-89,3$  дБ при  $A = 0,9742$ . Разброс ошибки составляет  $\approx 10$  дБ на рис. 2 а и  $\approx 14$  дБ на рис. 2 б. Особенности подобных кусочно-постоянных зависимостей описаны в [1] и других работах автора.

Теперь исследуем окрестность точки минимума на рис. 2 б, используя трехмерную графику. На рис. 3 показаны четыре ракурса зависимости ошибки  $\delta_2^\#$  от пара-



а)



б)

Рис. 2. Зависимости ошибки  $\delta_2^\#$  от параметров  $f_2$  (а) и  $A$  (б) для квантованного КИХ-фильтра при  $N = 58$  и  $M = 15$

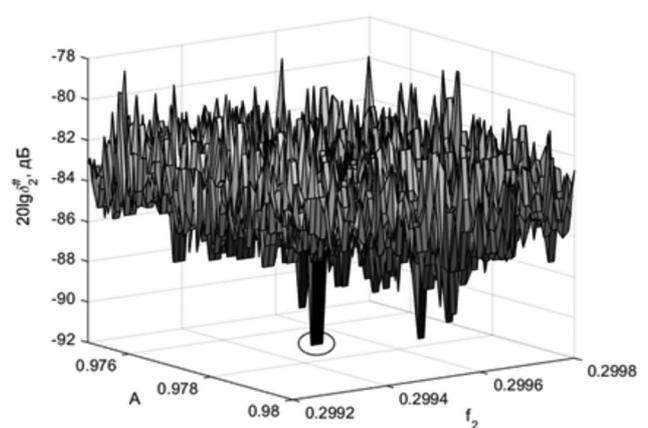
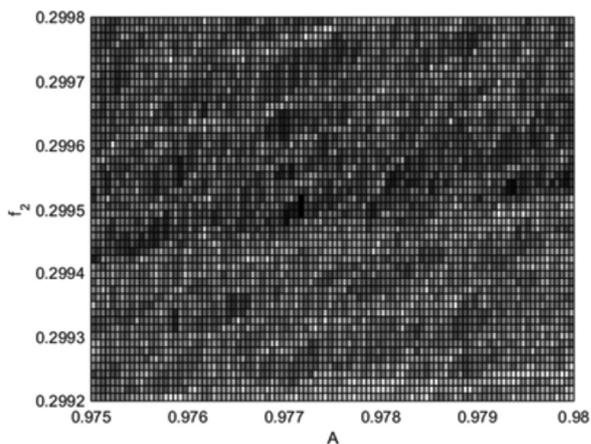
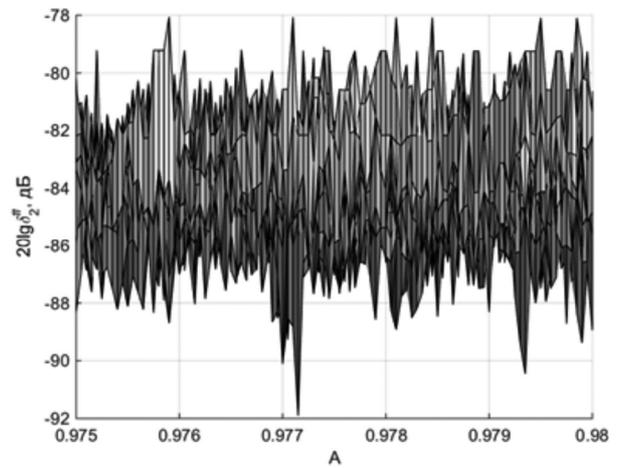
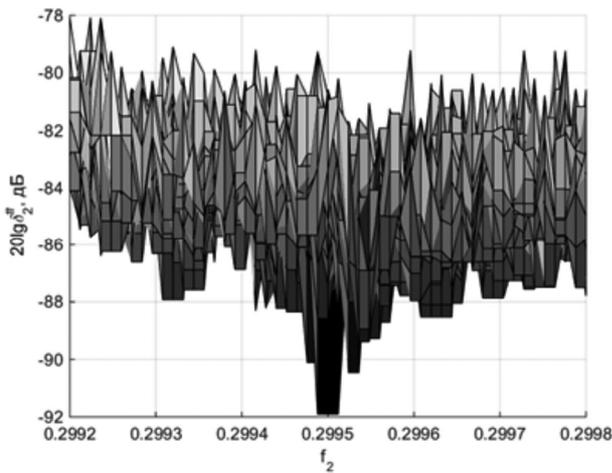


Рис. 3. Четыре ракурса зависимости ошибки  $\delta_2^\#$  от параметров  $f_2$  и  $A$  для квантованного КИХ-фильтра при  $N = 58$  и  $M = 15$

метров  $f_2$  и  $A$  для квантованного КИХ-фильтра при  $M = 15$  с минимальным значением  $\delta_2^\#$  равным -91,9 дБ в окрестности  $f_2 = 0,2995$ ,  $A = 0,97713$ . Применение трехмерной графики позволяет улучшить результат двумерного подхода на 91,9-89,3 = 2,6 дБ. Этому улучшению соответствуют коэффициенты фильтра  $h_i$ ,  $i = 0, 1, 3, \dots, 29$  в табл.1 и  $h_i = 0$ ,  $i = 2, 4, \dots, 28$ . Здесь  $h_0$  – коэффициент равный центральному отсчету симметричной импульсной характеристики фильтра. На рис. 4 представлена нормированная АЧХ для этих коэффициентов. Максимальное усиление фильтра равно 1,95. Можно сказать, что двумерная графика позволяет ограничить области дальнейшего анализа в окрестности одной или нескольких точек локальных минимумов для получения с помощью трехмерной графики меньших значений ошибки. Несмотря на значительно ограниченную окрестность анализа разброс ошибки  $\delta_2^\#$  на рис. 3 достаточно велик и составляет  $\approx 14$  дБ. Кроме того, наблюдается сильная нерегулярность в поведении ошибки.

Таблица 1. Квантованные коэффициенты ( $M = 15$ )

$i$	$h_i$
0	0,977142333984375
1	0,619140625
3	-0,19873046875
5	0,110504150390625
7	-0,070343017578125
9	0,04681396484375
11	-0,031402587890625
13	0,02081298828125
15	-0,013427734375
17	0,00836181640625
19	-0,00494384765625
21	0,00274658203125
23	-0,00140380859375
25	0,000640869140625
27	-0,000244140625
29	0,00006103515625

Упомянутый выше прямой метод расчета и квантования коэффициентов фильтра при  $f_2 = f_{2n} = 0,2994$  и  $A = 1$  (точка минимума на рис. 1 а) приводит к ошибке – 84 дБ. Заметим также, что лучших результатов с помощью только трехмерной графики при исследовании полных диапазонов изменения параметров  $f_2$  и  $A$  для обсуждаемого фильтра найти не удается.

Графический анализ и поиск с его помощью наилучшего результата, по существу – синтез фильтров, можно конечно автоматизировать без построения каких-либо зависимостей [4]. Однако это лишает разработчика или исследователя дополнительных возможностей – хорошей наглядности и более глубокого понимания, которые обеспечиваются графической средой MATLAB.

#### ВИП-анализ фильтра с тремя шагами квантования коэффициентов

Импульсная характеристика линейно фазового КИХ-фильтра обычно имеет существенный разброс в своих значениях. Поэтому для групп малых и больших коэффициентов фильтра прямой структуры можно использовать малый и большой шаг квантования, соответст-

венно [5]. Это позволяет упростить реализацию умножителей, что достигается благодаря умножению малых коэффициентов на положительную степень двойки для представления их измененных значений с большим шагом квантования. В структуре фильтра после операций умножения и суммирования с этой группой новых коэффициентов полученный результат умножается на отрицательную степень двойки, что эквивалентно его сдвигу без аппаратных затрат.

Предварительный ВИП-анализ для обсуждаемого фильтра показывает, что целесообразно допустить не два, а три шага квантования коэффициентов соответствующих длинам слова  $M_1 = 11$ ,  $M_2 = 14$ ,  $M_3 = 16$ , поскольку это приводит к дополнительному упрощению умножителей. На рис. 5 показаны четыре ракурса зависимости ошибки  $\delta_2^\#$  от параметров  $f_2$  и  $A$  для квантованного КИХ-фильтра, где можно наблюдать минимум  $\delta_2^\#$ . Его значение составляет -89,4 дБ в окрестности  $f_2 = 0,29902$ ,  $A = 0,9024$ . Этому результату соответствуют коэффициенты  $h_i$ ,  $i = 0, 1, 3, \dots, 29$  в табл. 2,  $h_i = 0$ ,  $i = 2, 4, \dots, 28$  и нормированная АЧХ на рис. 6. Максимальное усиление фильтра равно 1,8. Здесь как и в случае с одним шагом квантования область анализа была заранее локализована. Согласно рис. 5 разброс значений ошибки для этой области равен  $\approx 24$  дБ.

Таблица 2. Квантованные коэффициенты ( $M_1 = 11$ ,  $M_2 = 14$ ,  $M_3 = 16$ )

$i$	$h_i \times 2^k$	$k$
0	0,90234375	0
1	0,57177734375	
3	-0,18359375	
5	0,8173828125	3
7	-0,52099609375	
9	0,34716796875	
11	-0,93359375	5
13	0,6201171875	
15	-0,40185546875	
17	0,2509765625	
19	-0,1494140625	
21	0,08349609375	
23	-0,04296875	
25	0,02001953125	
27	-0,0078125	
29	0,00244140625	

Использование трех шагов квантования вместо одного позволяет получить приемлемое значение ошибки  $\delta_2^\#$  и уменьшить длину слова модифицированных коэффициентов с 15 бит + знак до 11 бит + знак, упростив реализацию умножителей. В упомянутых выше промышленных микросхемах ЦАП для реализации обсуждаемого фильтра использованы коэффициенты с длиной слова 16 бит + знак. В [3] благодаря использованию структуры полуполосного КИХ-фильтра с пониженной коэффициентной чувствительностью длину слова удалось снизить до 13 бит + знак. Вполне вероятно, что применение к этой структуре техники ВИП с многошаговым квантованием коэффициентов приведет к длине слова меньше чем 11бит+знак.

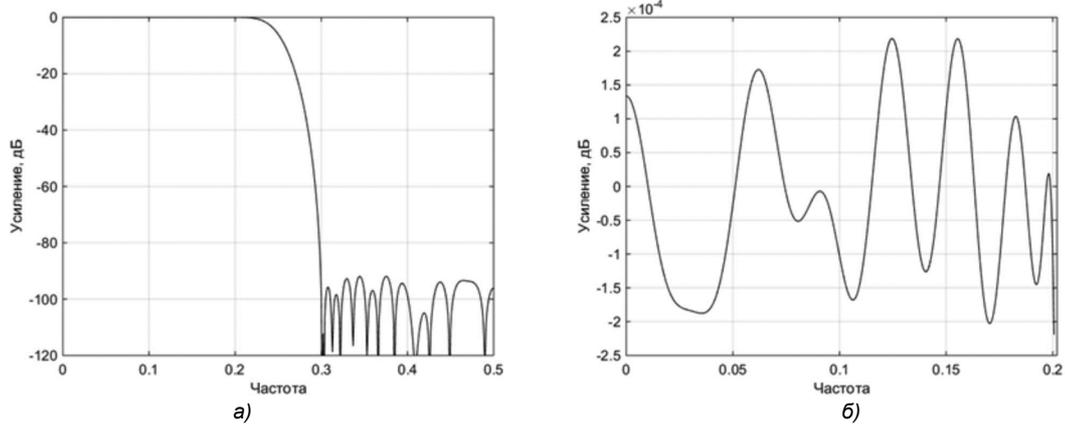


Рис. 4. Нормированная АЧХ квантованного КИХ-фильтра при  $N = 58$  и  $M = 15$  в основной полосе (а) и в полосе пропускания (б)

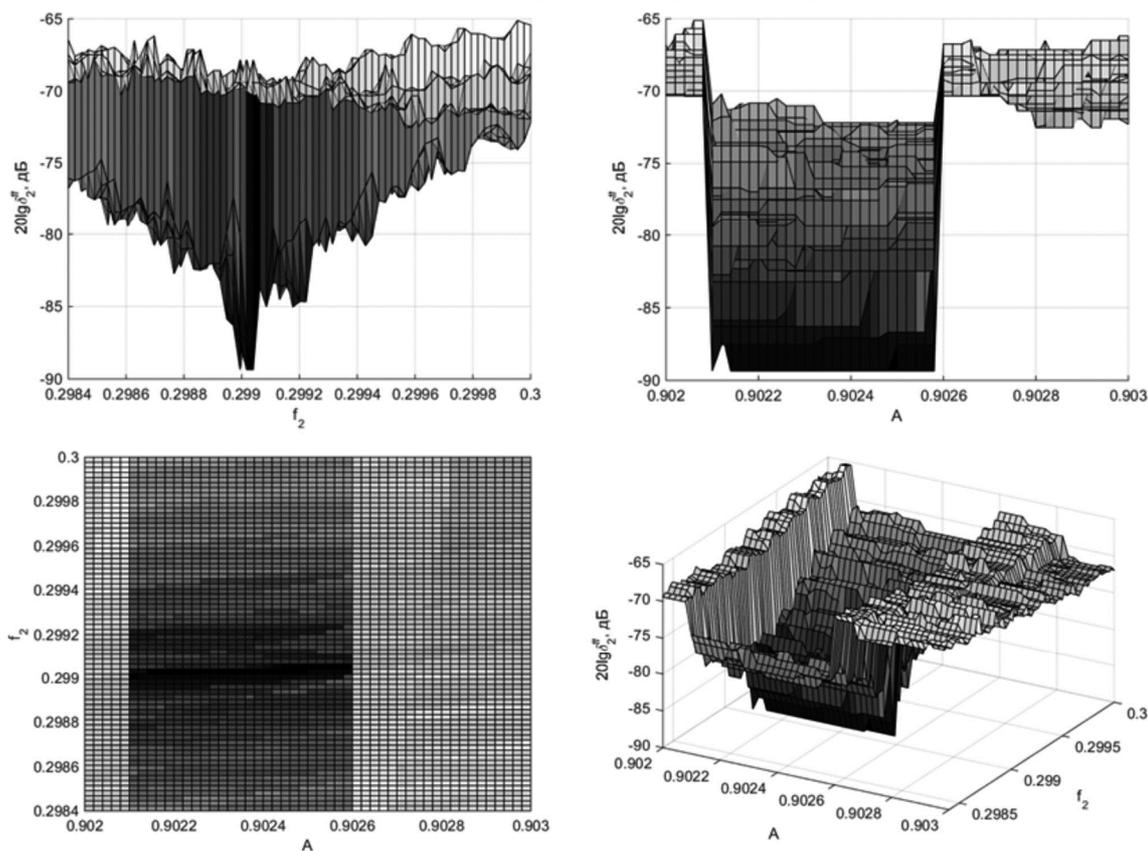


Рис. 5. Четыре ракурса зависимости ошибки  $\delta_2^{\#}$  от параметров  $f_2$  и  $A$  для квантованного КИХ-фильтра при  $N = 58$ ,  $M_1 = 11$ ,  $M_2 = 14$ ,  $M_3 = 16$

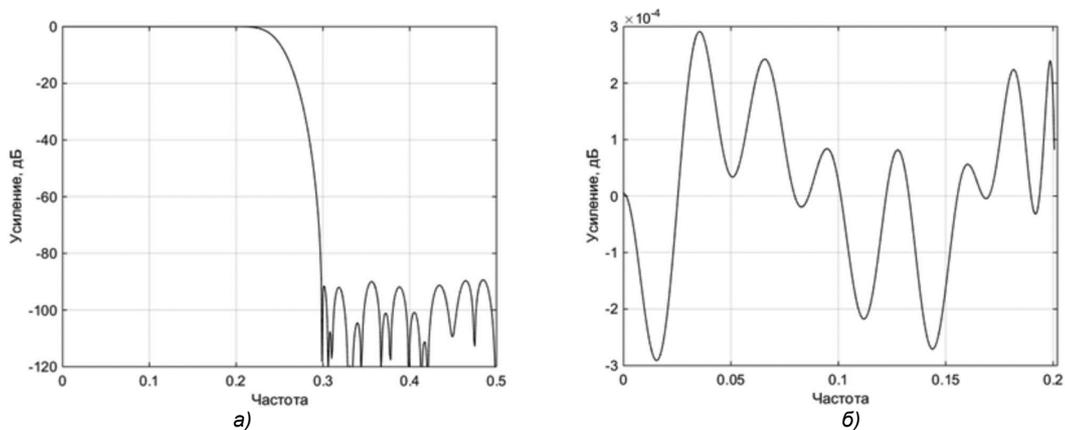


Рис. 6. Нормированная АЧХ квантованного КИХ-фильтра при  $N = 58$ ,  $M_1 = 11$ ,  $M_2 = 14$ ,  $M_3 = 16$  в основной полосе (а) и в полосе пропускания (б)



## Заключение

Трехмерная графика MATLAB применена в задаче анализа квантованных КИХ-фильтров. Это предполагает построение зависимости контролируемого параметра АЧХ от двух исходных параметров, используемых для расчета оптимальных КИХ-фильтров. Более детально рассмотрены оптимальные полуполосные фильтры, описываемые только двумя исходными параметрами – граничной частотой полосы задерживания и константой задающей усиление фильтра. Контролируемый параметр – максимальный уровень пульсаций в полосе задерживания. На примере фильтра 58 порядка показано, что применение трехмерного ВИП-анализа вместо двумерного позволяет улучшить результаты. Анализ построенных трехмерных графиков также показывает, что использование трех шагов квантования коэффициентов, вместо одного позволяет существенно упростить реализацию умножителей в фильтре при его реализации на СБИС, что экономит площадь кристалла и потребляемую мощность.

Рассмотренный трехмерный графический анализ в дополнении к двумерному позволяет глубже понять задачи проектирования квантованных КИХ-фильтров, поскольку является удобным наглядным средством для выявления наилучшего сочетания значений исходных параметров, способа аппроксимации АЧХ и структуры фильтра.

## Литература

1. Мингазин А.Т. Анализ квантованных КИХ-фильтров // Цифровая обработка сигналов. 2019. № 4. С. 3-13.
2. Lim Y.-C., Constantinides A. G. Linear phase FIR digital filter without multipliers // ISCAS. 1979. – Pp. 185-188.
3. Mehrnia A., Dai M., Willson A. N. Efficient halfband FIR filter structure for RF and IF data converters// IEEE Trans. 2016. CAS-II, Vol.63. No.1. Pp. 64-68.
4. Мингазин А. Синтез цифровых полуполосных КИХ-фильтров без умножителей // Современная электроника. 2006. № 3. С. 44-46.
5. Grenez F. Design of f.i.r. direct-form digital filters with two quantisation steps // Electronics Letters. 1979. Vol.15. No.4. Pp. 124-125.

## ПРИМЕНЕНИЕ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ МУЛЬТИМОДАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

*Стефаниди А.Ф., аспирант Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова,  
e-mail: antonstefanidi@mail.ru*

*Приоров А.Л., д.т.н., доцент Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова,  
e-mail: andcat@yandex.ru*

*Топников А.И., к.т.н., Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
e-mail: topartgroup@gmail.com*

*Хрящев В.В., к.т.н., доцент Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова,  
e-mail: vhr@yandex.ru*

## THE PROBLEM OF PERSONALITY RECOGNITION USING FACIAL IMAGES AND AUDIO SIGNALS WITH SPEECH RECORDINGS

*Stefanidi A.F., Priorov A.L., Topnikov A.I., Hryashev V.V.*

*Currently, biometric identification systems are often used in mobile applications, banking systems, access control and management systems as well as for the management of mobile robots. In this paper, we consider the problem of personality recognition using facial images and audio signals with speech recordings. The results of the research will be used to create a system of multimodal biometric identification. Since convolutional neural networks demonstrate the highest results regarding the problems of detection, segmentation and classification of objects, this paper also proposes an approach to person identification based on convolutional neural networks. The research was carried out using modern audiovisual database VoxCeleb1. To decrease the computational capability of the experiment, the researchers reduced the number of classes from 1251 to 200. The development results showed the possibility of using the proposed algorithm as a part of a multimodal identity identification system.*

**Key words:** digital speech processing, digital image processing, machine learning, speaker identification, face recognition, convolutional neural network, bimodal biometrics.

**Ключевые слова:** цифровая обработка речевых сигналов, цифровая обработка изображений, машинное обучение, идентификация диктора, распознавание лиц, сверточная нейронная сеть, бимодальная биометрия.

### Введение

В настоящее время существует множество подходов для идентификации и аутентификации личности, однако методы на основе анализа биометрических признаков являются наиболее эффективными. В частности, они, в отличие от паролей и токенов, не могут быть украдены, потеряны или забыты. Эти важные свойства способствуют развитию и все большему внедрению биометрических технологий [1, 2].

Большинство биометрических систем являются унимодальными, то есть используют в своей работе один источник биометрической информации. Выбор типа биометрических признаков в значительной степени определяет достоинства и недостатки системы идентификации. Так, например, распознавание диктора в шумных реальных условиях является чрезвычайно сложной задачей. Связано это с высокой степенью вариативности внешних и внутренних параметров системы: фоновые разговоры, музыка, смех, фоновые вибрации, эффекты канала передачи информации и микрофона, физиологические особенности го-

*В настоящее время системы биометрической идентификации личности пользуются высокой популярностью в мобильных приложениях, банковских системах, системах контроля и управления доступом, в задачах управления мобильными роботами. В данной работе рассматривается задача распознавания личности с использованием цифровых изображений лиц и речевых сигналов. Результаты исследования планируется использовать в комбинации для создания системы мультимодальной биометрической идентификации. Поскольку сверточные нейронные сети демонстрируют наиболее высокие результаты в задачах детектирования, сегментации и классификации объектов, в данной работе также предложен подход идентификации личности на основе сетей данного типа. Исследования проводились с использованием современной базы аудиовизуальных данных VoxCeleb1. Для снижения вычислительной сложности исследования количество классов уменьшено с 1251 до 200. Результаты моделирования показали возможность применения предлагаемых алгоритмов в составе композитной мультимодальной системы идентификации личности.*

ворящего, акцент, эмоции, интонация [3]. В задаче идентификации пользователя по цифровому изображению лица также есть сильная зависимость от внешних и внутренних факторов: степень освещенности, качество светочувствительного датчика, угол наклона и поворота головы, возрастные изменения, появление у человека очков/бороды/усов, эмоциональная активность и мимика. Поэтому для повышения точности и компенсации



Рис. 1. Блок-схема мультимодальной биометрической системы идентификации личности

недостатков унимодальных подходов используют методы комбинирования сильно отличающихся друг от друга признаков. Такие системы называют мультимодальными (число независимых признаков два и более) [4].

Данное исследование посвящено разработке и исследованию методов идентификации личности на основе анализа изображений лиц и аудио сигналов. Полученные решения будут применяться для создания системы мультимодальной биометрической идентификации (рис. 1). Распознавание по лицу и голосу дает возможность получения биометрических параметров в отсутствии физического контакта человека с системой, что расширяет спектр практического использования данной технологии. Использование речи и изображений лиц повышает устойчивость к возможным спуфинг атакам, фальсификации данных, а также попыткам несанкционированного доступа [4].

Сверточные нейронные сети в настоящее время являются стандартным решением в задачах распознавания лиц, именно с их помощью получены наилучшие на сегодня результаты [1]. В задаче текстонезависимой идентификации диктора долгие годы таким стандартным решением являлось использование мел-частотных кепстральных коэффициентов и классификатора на основе моделей гауссовых смесей [4-6]. Для робастности системы к внешним условиям часто использовали универсальную фоновую модель [4, 6, 7], а также совместный факторный анализ [8], метод полной изменчивости [9], вероятностный линейный дискриминантный анализ [10-12]. Однако развитие нейронных сетей и глубокого обучения затронули и область распознавания диктора [13-15]. В последние годы стали появляться работы, демонстрирующие эффективность применения нейросетей в этой задаче. Применение сверточных нейронных сетей в задаче идентификации диктора стало возможным, в том числе и за счет трансформации аудио данных в двумерное представление сигнала. Это достигается в результате перехода из временной области в частотную [5].

Целью работы является разработка алгоритмов идентификации личности с использованием речевой и лицевой модальности. Реализованные алгоритмы будут применяться для проектирования мультимодальной биометрической системы на следующих этапах исследования.

#### Описание базы аудиовизуальных данных

Для проведения эксперимента использовалась известная тестовая база VoxCeleb1. Это аудиовизуальный

набор данных, состоящий из коротких фрагментов человеческой речи и цифровых изображений лиц, извлеченных из видео интервью, загруженных на YouTube [16]. База VoxCeleb1 включает в себя речь спикеров, охватывающих широкий спектр различных национальностей, стиля произношения, профессий и возраста. Она содержит более 150 000 аудио примеров для 1251 класса. Набор голосовых данных является достаточно сбалансированным по гендерному признаку – 55 % составляет речь мужчин и 45 % речь женщин. Длительность аудио записей изменяется от 4 до 145 сек., в среднем 8,2 сек. (рис. 2.). На каждого диктора приходится от 45 до 250 аудио дорожек, в среднем 123.

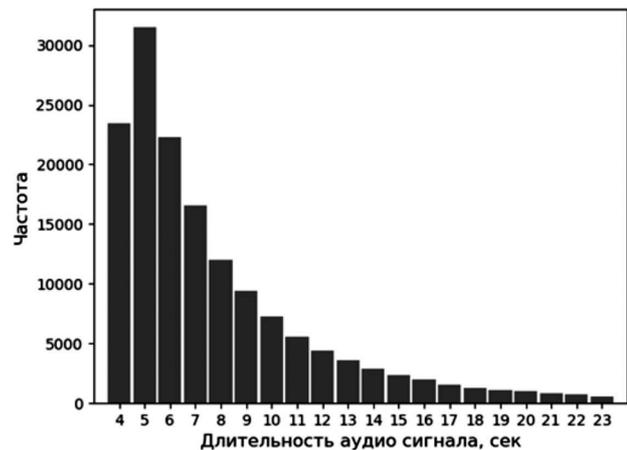


Рис. 2. Гистограмма длительностей звуковых сигналов из базы VoxCeleb1

Важно отметить, что условия записи данных максимально приближены к реальным. Звуковые примеры, включенные в набор данных, собирались в сложных акустических условиях с использованием видеокамер и микрофонов с различными техническими характеристиками. Запись велась в таких местах, как Красная дорожка, открытый стадион, студия телешоу, выступление на сцене перед большой аудиторией, на интервью со съемок кинофильмов и других мест, обладающих неповторимыми и уникальными акустическими свойствами. Во многих примерах присутствуют шумы естественного происхождения: фоновая речь, смех, перекрывающая речь, шумы, вызванные акустическими особенностями помещения [16]. Многие отмечают, что данная база является сложной для задачи идентификации диктора, поскольку звуковые дорожки могут содержать фрагменты с перекрывающейся речью, например, когда двое людей говорят параллельно, тем самым ухудшая процесс обучения нейронной сети и в итоге снижая точность



Рис. 3. Примеры изображений лиц из базы данных VoxCeleb1

Таблица 1. Статистика анализируемой части аудиовизуальной базы VoxCeleb1 на 200 классов

	Обучение	Валидация	Тест	Суммарно	Доля базы VoxCeleb1
Изображения	91 331	11 417	11 314	114 062	9,36%
Речевые сигналы	12 599	1 123	1 343	15 065	9,81%

работы модели. Однако в данной работе принято, что указанное свойство является достаточно распространенным и имеет место быть в повседневной жизни, поэтому важно получить систему, способную работать в такого рода условиях [17, 18].

База VoxCeleb1 также содержит набор цифровых изображений лиц, детектированных и вырезанных в процессе обработки видео роликов с YouTube (рис. 3). Общее количество изображений составляет более 1,2 млн. Данная база лиц имеет следующие особенности: состоит из цветных изображений; лица имеют разный угол поворота/наклона головы, цвет лица/волос различен, наличие/отсутствие очков/бороды, усов; различные сцены и степень освещенности. Это позволяет утверждать, что эксперимент может быть проведен в условиях, приближенных к условиям реальной эксплуатации разрабатываемой системы.

Благодаря наличию хорошо структурированной и размеченной базы данных VoxCeleb1, состоящей из цифровых изображений лиц и речевых сигналов, открывается возможность разработки мультимодальной (биомодальной) системы идентификации на основе двух биометрических признаков: лица и голоса.

Для уменьшения вычислительной сложности и длительности экспериментальных исследований количество определяемых классов уменьшено с 1251 до 200. Это позволило более динамично проводить все этапы исследования и получить высокие результаты для задачи классификации цифровых изображений и аудио сигналов. Также отметим, что практическое применение систем идентификации личности, как правило сводится к задачам определения от нескольких десятков до пары сотен объектов. В табл. 1 представлен объем исследуемой части аудиовизуальной базы VoxCeleb1.

#### Предобработка данных и архитектуры сетей

Задача распознавания лиц решалась с использованием предобученной сверточной нейронной сети VGGFace. Данная архитектура показывает высокие ре-

зультаты в задачах классификации изображений [19-22]. Выбрана реализация, обученная на коллекции лиц известных людей VGG-Face в соответствии с базой данных интернет фильмов IMDB. В общей сложности набор состоит из 2622 классов с общим количеством изображений более 2,6 млн.

Сверточная нейронная сеть VGGFace принимает на вход отмасштабированные цветные изображения размером 224×224 пикселей. Для решения задачи верхние слои предобученной сети удалялись и вместо них соби-рался новый классификатор на основе двух полносвязных слоев, состоящих из 512 нейронов и последующей функцией активации ReLU. На выходе сети использовался 200-мерный softmax-слой (рис. 4). В качестве алгоритма численной оптимизации использовался Adam (adaptive moment estimation) с начальной скоростью сходимости 0,001. В процессе обучения скорость оптимизатора динамически уменьшалась в 0,9 раза при условии попадания в локальный минимум [23].

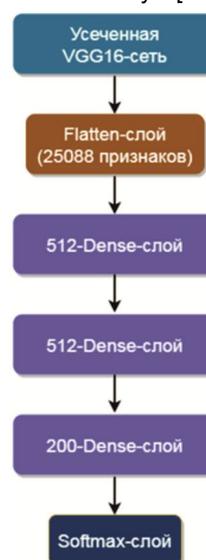


Рис. 4. Архитектура сверточной нейронной сети, используемой для классификации лиц из базы VoxCeleb1

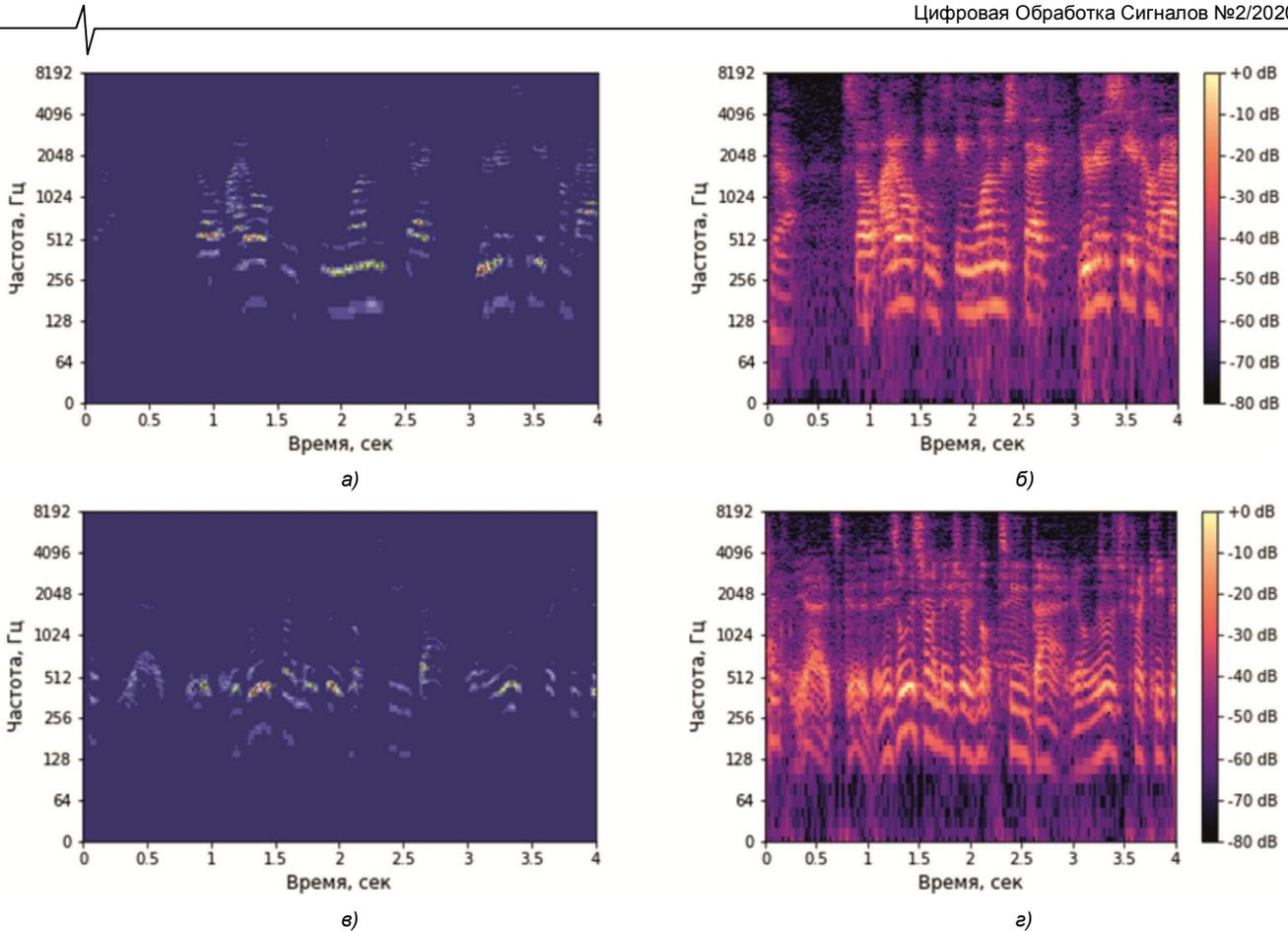


Рис. 5. Примеры частотного спектра аудио сигналов в логарифмическом масштабе:  
а, в – модуль амплитуды; б, г – логарифм мощности спектрограммы

Для увеличения количества изображений применялся метод искусственной аугментации данных с использованием следующих примитивных преобразований: зумирование, смещение изображения относительно вертикали и горизонтали, изменение ротации. Размер батча составлял 128 изображений. Обучение осуществлялось в течение 50 эпох, что по меркам глубокого обучения считается малым показателем. Связанно это с тем, что сеть не обучалась «с нуля», а брались веса, полученные в ходе анализа данной сетью другой базы изображений лиц – VGG-Face. Это позволило в разы сократить время, необходимое на обучение.

Весь процесс предобработки аудио данных основывался на применении библиотеки с открытым исходным кодом librosa. Звуковые сигналы представлялись в формате wav с частотой дискретизации 16 кГц и уровнем квантования по амплитуде в 16 бит. Для перехода в частотную область использовалось быстрое преобразование Фурье (БПФ) на основе реализации librosa.core.stft со следующими параметрами: 64 мс длина окна, что эквивалентно 1024 временным отсчетам, с шагом в 10 мс. Поскольку речевые сигналы имели разную длительность, они приводились к одной длине путем обрезания. Из каждого сигнала производилось случайное извлечение одной звуковой дорожки продолжительностью 4 с. Если изначально звуковая запись была меньше 4 с, то необходимую длину создавали путем дублирования речевых фрагментов этого же сигнала. Таким образом, каждый звуковой сигнал представлялся в виде спектрограммы

размерностью 513x401x1. Далее брался модуль FFT и мощность спектрограммы конвертировалась в децибелы (рис. 5). В качестве нормировки использовалась пиковая мощность спектрограммы. Это описывается следующей формулой:

$$S_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(S) - 10 \cdot \log_{10}(S_p),$$

где  $S$  – мощность спектрограммы сигнала;  $S_p$  – пиковая мощность спектрограммы сигнала;  $S_{dB}$  – логарифм мощности спектрограммы в децибелах.

Переход из временной в частотную область позволил преобразовать звуковой сигнал в матричное представление. Спектрограмма довольно часто используется в задачах идентификации и аутентификации диктора [15-17]. Двумерный тип объекта хорошо подходит для работы со сверточными нейронными сетями. Для решения задачи распознавания диктора выбрана сверточная нейронная сеть архитектуры VGGM. В качестве оптимизатора использовался Adam со скоростью сходимости 0,001. В процессе обучения скорость оптимизатора динамически уменьшалась в 0,9 раза при условии попадания в локальный минимум. Размер батча составил 32, при этом количество эпох обучения равнялось 200. На рис. 6 представлена архитектура используемой нейронной сети.

Для обработки звуковых и видео данных, а также обучения нейронных сетей применялся суперкомпьютер NVIDIA DGX-1 VOLTA производительностью до 960 Тфлопс, принадлежащий Ярославскому государственному университету им. П.Г. Демидова. В качестве

фреймворка выбран Keras с внутренней реализацией на Tensorflow.

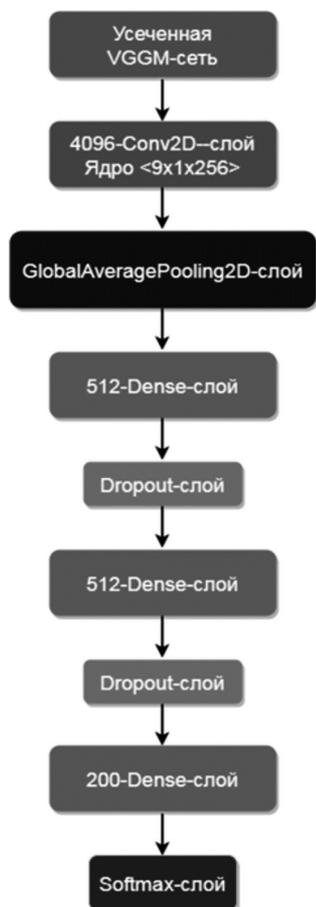


Рис. 6. Архитектура сверточной нейронной сети, используемой для классификации аудио сигналов из базы VoxCeleb1

## Результаты исследований

Для анализа процесса обучения сверточных нейронных сетей использовались следующие метрики: оценка доли правильных ответов (ассигасу, асс), точность (precision, P), полнота (recall, R), средневзвешенное значение полноты и точности (F-мера, F1-score). На рис. 7 представлен процесс мониторинга обучения сети для классификации лиц из базы цифровых изображений VoxCeleb1.

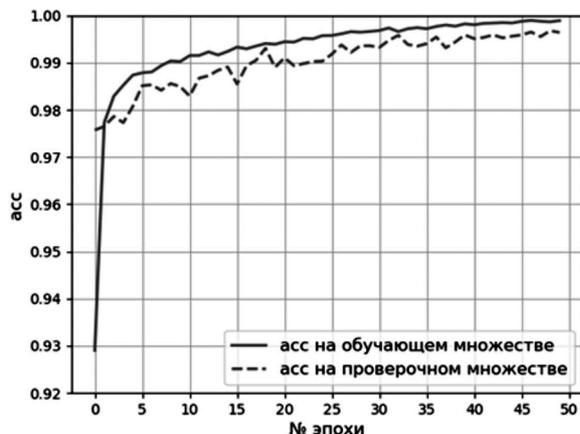


Рис. 7. Анализ доли правильных ответов в процессе обучения сети CNN-VGGFace

Из результатов видно, что уже на первой эпохе обучения точность классификации на проверочном (кросс-валидационном) множестве составляет более 97 %, что является отличным результатом. После прохождения обучения в 50 эпох классификатор имеет точность в 99,64 %. На тестовом наборе данных точность составляет 99,57 %. Важно отметить, что отсутствие признаков переобучения и недообучения, а также высокая точность на тестовом множестве говорят о хорошей обобщающей способности данной нейронной сети.

Для того чтобы качественно провести анализ работы сверточной нейронной сети по метрикам P, R, F1-score важно проверить кросс-валидационную выборку изображений на смещение внутри классов. Для этого построим гистограмму для кросс-валидационного множества, описывающую количество примеров внутри каждого из классов (рис. 8).

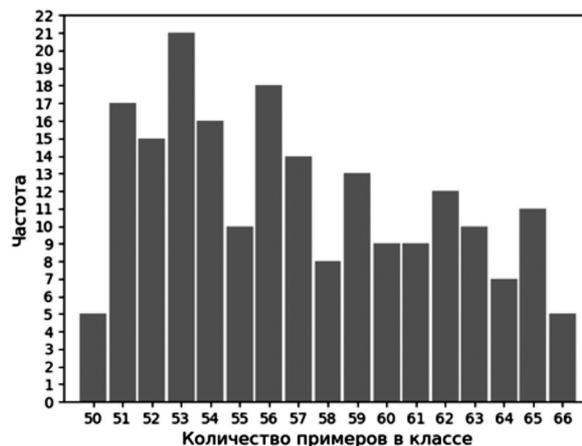


Рис. 8. Гистограмма описания количества примеров в каждом из 200 классов

Из полученных результатов видно, что количество примеров в каждом из классов варьируется от 50 до 66, при этом среднее значение равно 57. Исходя из этого, можно сказать, что перекоса внутри проверочного множества нет, а значит, можно вычислить описанные выше численные показатели с использованием микро- или макро-усредняющего подхода для мультиклассовой классификации. В данной работе используется макро-усреднение. Оно подразумевает расчет количественных показателей P, R, F1-score внутри каждого класса с последующим усреднением. В итоге получены следующие результаты: P = 99,90 %, R = 99,87 %, F1-score = 99,88 % [24].

Ранее уже отмечалось, что работа ведется с выборкой только на 200 классов. Для проведения исследования по идентификации диктора данные делились на три части – обучающую, проверочную и тестовую выборку. Обучающая выборка содержала 12599 аудиозаписей, проверочный и тестовый набор данных содержали 1123 и 1343 аудиозаписи соответственно. Для контроля сходимости модели использовалась категориальная функция потерь  $J(Q)$  (Categorical Cross-Entropy Loss), представленная на рис. 9 [25].

Здесь представлен процесс обучения сверточной нейронной сети. Реализация является верной, поскольку  $J(Q)$  имеет монотонно убывающую тенденцию, спускаясь в итоге на «плато». Дополнительно во время обуче-

ния проводился мониторинг метрики оценки доли правильных ответов (ассигасу, асс) на обучающем и проверочном множестве (рис. 10).

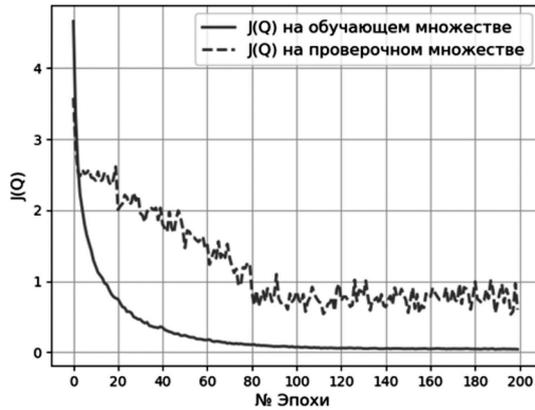


Рис. 9. Анализ функции потерь в процессе обучения сети CNN-VGGM

Из рис. 9 и рис. 10 можно сделать вывод о том, что сеть научилась классифицировать звуковые данные из обучающей выборки, имея уровень ассигасу в 98,91 %. Однако если посмотреть на кривую, описывающую точность работы модели на кросс-валидационном множестве, то можно увидеть более низкий уровень ассигасу в 78,87 %. Это свидетельствует о том, что модель переобучилась. Одним из самых популярных способов борьбы с переобучением является метод прореживания слоев. К сожалению, такой подход не дал существенных улучшений. Другой способ основывается на синтетическом увеличении речевых данных, но в данной работе он не использовался, поскольку требует проведение дополнительных глубоких исследований. Методы аугментирования речевых сигналов и анализ их влияния на обобщающую способность нейронных сетей будут подробно описаны в следующей работе.

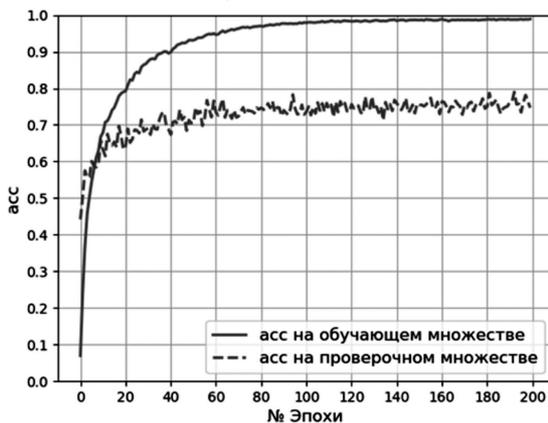


Рис. 10. Анализ доли правильных ответов в процессе обучения сети CNN-VGGM

В табл. 2 отображены результаты работы CNN-VGGM на обучающем, проверочном и тестовом множестве. В качестве оценки точности классификации используется метрика ассигасу различного типа – top-1, top-3, top-5.

Видно, что модель показывает на тестовой выборке уровень точности асс-top-5 86,97 % в задаче классификации 200 классов из базы VoxCeleb1.

В качестве рекомендации по улучшению качества работы CNN-VGGM можно использовать аугментирование аудио данных на основе различных преобразований и типов помех. Также увеличение обучающего набора возможно за счет использования полного набора данных VoxCeleb1 или более крупной базы речевых сигналов VoxCeleb2 [16-17]. Стоит отметить, что в данной работе в качестве представления речевого сигнала использовалась его спектрограмма. Такой подход является достаточно универсальным, однако существует ряд альтернативных методов, в частности подход на основе выделения мел-частотных кепстральных коэффициентов. Эти возможности будут учтены при дообучении и тонкой настройке сети CNN-VGGM на следующем этапе исследования.

## Заключение

В исследовании рассматривались вопросы классификации личности по таким биометрическим параметрам, как голос и лицо. Для решения поставленных задач использовались сверточные нейронные сети архитектуры VGG-типа различных модификаций. В качестве базы цифровых изображений лиц и речевых сигналов выбран аудиовизуальный набор данных VoxCeleb1. Для уменьшения вычислительной сложности и длительности экспериментальных исследований количество определяемых классов уменьшено с 1251 до 200. Это позволило более динамично проводить все этапы исследования и получить высокие результаты для задачи классификации цифровых изображений и звуковых сигналов.

Для идентификации личности по лицу применялась нейронная сеть CNN-VGGFace, предобученная на крупной базе цифровых изображений VGG-Face. В процессе исследования применялся метод переноса обучения с использованием тонкой настройки. В итоге сеть дообучалась под исследуемый набор данных и показала высокие результаты на тестовом множестве: ассигасу = 99,57 %, P = 99,87 %, R = 99,90 %, F1-score = 99,88 %.

Набор звуковых данных представлялся фрагментами голосовой активности. В качестве сети применялась CNN-VGGM. Установлено, что точность классификации дикторов на тестовой выборке по метрике асс-top-5 составила 86,97 %.

Таблица 2. Результаты идентификации дикторов из база речевых сигналов VoxCeleb1

Ассигасу	Топ-1 (%)	Топ-3 (%)	Топ-5 (%)
Обучение	93,10	96,73	98,52
Валидация	77,27	83,17	88,32
Тест	74,65	82,40	86,97



На следующем этапе исследования планируется повышение точности распознавания дикторов путем применения мел-частотных кепстральных коэффициентов; модернизации топологии обучаемых сетей; изменения параметров регуляризации; применения методов синтетического аугментирования речевых сигналов; использования полного набора данных VoxCeleb1 или более крупной базы речевых сигналов VoxCeleb2. Дополнительно будут проведены исследования по созданию мультимодального решения на основе речевой и лицевой модальности, а также по разработке алгоритмов объединения биометрических систем.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-90158.*

### Литература

1. Cao Q., Shen L., Xie W., Parkhi O.M., Zisserman A. VGGFace2: A dataset for recognising faces across pose and age, 2018, Web: <https://arxiv.org/abs/1710.08092>.
2. Lebedev A., Khryashchev V., Priorov A., Stepanova O. Face verification based on convolutional neural network and deep learning, In Proceedings of 15-th IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2017), Novi Sad, Serbia, 2017, pp. 261-265.
3. Stoll L.L. Finding difficult speakers in automatic speaker recognition. Technical Report No. UCB/EECS-2011-152, 2011.
4. Khryashchev V., Topnikov A., Stefanidi A., Priorov A. Bimodal person identification using voice data and face images, In Proceedings SPIE 11041, Eleventh International Conference on Machine Vision, WEB: <https://doi.org/10.1117/12.2523138>.
5. Reynolds D.A., Quatieri T.F., Dunn R.B. Speaker verification using adapted Gaussian mixture models, Digital Signal Processing, Vol.10, 2000, pp. 19-41.
6. Tupitsin G., Topnikov A., Priorov A. Two-step noise reduction based on soft mask for robust speaker identification, In Proceedings 18th Conference of Open Innovations Association FRUCT, 2016, pp. 351-356.
7. May T., S. van de Par, Kohlrausch A. Noise-Robust speaker recognition combining missing data techniques and universal background modeling, IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 20, no. 1, 2012, pp. 108-121.
8. Kenny P. Joint factor analysis of speaker and session variability: Theory and algorithms, CRIM, Montreal, (Report) CRIM-06/08-13, 2005.
9. Dehak N., Dehak R., Kenny P., Brümmer N., Ouellet P., Dumouchel P. Support vector machines versus fast scoring in the low-dimensional total variability space for speaker verification, In Proceedings INTERSPEECH, 2009, pp. 1559-1562.
10. Prince S.J.D., Elder J.H. Probabilistic Linear Discriminant Analysis for Inferences About Identity, In Proceedings IEEE 11th International Conference on Computer Vision ICCV, 2007, pp. 1-8.
11. Garcia-Romero D., Espy-Wilson C.Y. Analysis of i-vector Length Normalization in Speaker Recognition Systems, In Proceedings INTERSPEECH, 2011, pp. 249-252.
12. Kenny P. Bayesian Speaker Verification with Heavy-Tailed Priors, In Proceedings Odyssey, 2010.
13. Ghahabi O., Hernando J. Deep Learning Backend for Single and Multi-session i-Vector Speaker Recognition, IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 25, no. 4, 2017, pp. 807-817.
14. Ault S.V., Perez R.J., Kimble C.A., Wang J. On Speech Recognition Algorithms, International Journal of Machine Learning and Computing, vol. 8, no. 6, 2018, pp. 518-523.
15. Bunrit S., Inkian T., Kerdprasop N. Text-Independent Speaker Identification Using Deep Learning Model of Convolution Neural Network, International Journal of Machine Learning and Computing, vol. 9, no. 2, 2019, pp. 143-148.
16. Nagrani A., Chung J.S., Zisserman A. VoxCeleb: a large-scale speaker identification dataset, 2017, Web: <https://arxiv.org/abs/1706.08612v2>.
17. Chung J.S., Nagrani A., Zisserman A. VoxCeleb2: Deep Speaker Recognition, In Proceedings Interspeech, 2018, pp. 1086-1090.
18. Xiang X., Wang S., Huang H., Qian Y., Yu K. Margin Matters: Towards More Discriminative Deep Neural Network Embeddings for Speaker Recognition, 2019, Web: <https://arxiv.org/abs/1906.07317v1>.
19. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition, In International Conference on Learning Representations, 2015, Web: <https://arxiv.org/abs/1409.1556v6>.
20. Chatfield K., Simonyan K., Vedaldi A., Zisserman A. Return of the Devil in the Details: Delving Deep into Convolutional Nets, In Proceedings British Machine Vision Conference, 2014, pp. 1-11.
21. Sun Y., Ding L., Wang X., Tang X. DeepID3: Face recognition with very deep neural networks, 2015, Web: <https://arxiv.org/abs/1502.00873>.
22. Taigman Y., Yang M., Ranzato M., Wolf L. Deepface: Closing the gap to human-level performance in face verification, In IEEE Conf. on CVPR, 2014.
23. Kingma D. P., Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization, 2017, Web: <https://arxiv.org/abs/1412.6980v9>.
24. Sokolova M., Japkowicz N., Szpakowicz S. Beyond Accuracy, F-score and ROC: a Family of Discriminant Measures for Performance Evaluation, In Proceeding of National Conference on Artificial Intelligence, 2016, pp. 1-6.
25. Liu W., Wen Y., Yu Z., Yang M. Large-margin softmax loss for convolutional neural networks, In ICML, 2016, pp. 507-516.