

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ RLS-АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ЭКВАЛАЙЗЕРАХ С ДРОБНОЙ ЗАДЕРЖКОЙ

*Джиган В.И., д.т.н., главный научный сотрудник Института проблем проектирования в микроэлектронике Российской академии наук, г. Москва, Россия, e-mail: djigan@ipprt.ru*

### PECULIARITIES OF RLS ADAPTIVE FILTERING ALGORITHMS APPLICATION IN FRACTIONALLY SPACED EQUALIZERS

*Djigan V.I.*

*The paper considers the peculiarities of the fast Recursive Least Squares (RLS) algorithms application in Fractionally Spaced (FS) Feed Forward (FF) and Feed Backward (FB) equalizers. Such equalizers are viewed as the multichannel adaptive filters with unequal number of weights in channels. The architectures and computational procedures of such equalizers, based on four versions of the fast RLS algorithms, are presented. The simulation results demonstrate the proposed equalizer efficiency.*

**Key words:** equalizer, Fractionally Spaced (FS), Feed Forward (FF) equalizer, Feed Backward (FB) equalizer, multichannel adaptive filter, fast Recursive Least Squares (RLS) algorithms, Fast Kalman (FK) algorithm, Fast Transversal Filter (FTF) algorithm, Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) algorithm, stabilized FAEST algorithm.

**Ключевые слова:** эквалайзер, дробная задержка, эквалайзер без обратной связи, эквалайзер с обратной связью, многоканальный адаптивный фильтр, быстрые рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS), быстрый алгоритм Калмана, быстрый трансверсальный фильтр, Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) алгоритм, стабилизированный FAEST алгоритм.

#### Введение

Сегодня адаптивная обработка сигналов [1-5] является сложившимся направлением в современной цифровой обработке сигналов. Ключевыми элементами в адаптивной обработке сигналов являются адаптивные фильтры. Такие фильтры изменяют свои весовые коэффициенты в процессе работы, благодаря чему, они нашли широкое применение в приложениях, где заранее невозможно определить требования к параметрам традиционных фильтров с фиксированными весовыми коэффициентами, так как эти требования могут быть либо не известными, либо меняться в процессе работы. Адаптивные фильтры не требуют предварительного расчета весовых коэффициентов. Эти коэффициенты вычисляются в результате минимизации некоторой функции ошибок между выходным и требуемым сигналами адаптивного фильтра в процессе его работы.

Построение систем радиолокации, навигации, связи и даже бытовой электроники сегодня уже сложно представить без использования адаптивных фильтров [6-9]. Примерами такого использования являются адаптивные антенные и акустические решетки [10]; активные компенсаторы узкополосных акустических шумов [11]; компенсаторы сигналов акустического и электрического эха [12]; компенсаторы нелинейных искажений в усилителях мощности радиопередатчиков [13], а также выравниватели амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) кана-

*Рассматриваются особенности использования быстрых рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов в выравнивателях амплитудно-частотной характеристики каналов связи (эквалайзерах) с дробной задержкой без обратной связи и с обратной связью. Такие эквалайзеры представлены в виде многоканальных адаптивных фильтров с неодинаковым числом весовых коэффициентов в каналах. Представлены архитектуры эквалайзеров и вычислительные процедуры алгоритмов их работы на базе четырех разновидностей быстрых рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов. Приводятся результаты моделирования, демонстрирующие работоспособность и эффективность предлагаемых эквалайзеров.*

лов связи, именуемые эквалайзерами [14].

Большинство беспроводных, проводных, оптических или акустических каналов связи с электрической точки зрения представляют собой фильтры с конечной импульсной характеристикой. АЧХ таких фильтров, как правило, неравномерная, что при передаче цифровых сигналов через канал связи, приводит к их искажениям за счет появления межсимвольной интерференции, мешающей правильному принятию решений при распознавании информационных символов в приемнике [15].

Устройством, решающим задачу выравнивания АЧХ канала связи, является эквалайзер [16-19]. Эквалайзер – это линейный адаптивный фильтр. По архитектуре эквалайзеры бывают без обратной связи (Feed-Forward, FF) и с обратной связью (Feed-Backward, FB). Из них наиболее эффективными являются FB-эквалайзеры [20, 21]. Такие эквалайзеры демонстрируют существенно меньшую среднеквадратичную ошибку в установившемся состоянии, чем FF-эквалайзеры.

Обычно оба типа эквалайзеров работают на символевой скорости (Symbol-Spaced, SS). В этом случае эквалайзеры требуют минимальных ресурсов для их реализации. Однако, дискретизация сигналов с частотой следования информационных символов не удовлетворяет условиям теоремы Котельникова, так как при такой

дискретизации возникает эффект просачивания внеполосного сигнала в полосу основного сигнала, что приводит к его зашумлению. Это не критично, если параметры входного сигнала точно известны. Применительно к эквалайзерам это означает необходимость довольно точной синхронизации по времени принимаемых информационных символов и тактов работы аналогоцифрового преобразователя, осуществляющего дискретизацию этих символов по времени и квантование полученных отсчетов по уровню.

Указанных недостатков лишены эквалайзеры с дробной задержкой (Fractionally-Spaced, FS) [22, 23]. В таких эквалайзерах входной сигнал дискретизируется на частоте, в несколько раз (обычно целое число) превышающей частоту следования информационных символов. Ценой за качество работы таких эквалайзеров является более высокое требование к вычислительным ресурсам, реализующим эквалайзер, т.к. число весовых коэффициентов FF-части эквалайзера увеличивается кратно увеличению частоты дискретизации его входного сигнала. В FS-эквалайзерах вычисление выходного сигнала, а также его сдвиг в линии задержки FB-части, если такова присутствует, выполняются на частоте следования информационных символов. Обычно FB-эквалайзеры содержат обе части: FF и FB. В рамках настоящей статьи для большей ясности такие эквалайзеры далее обозначаются как FF/FB.

При реализации SS FF- или SS FF/FB-эквалайзеров могут быть использованы соответственно одноканальные или двухканальные адаптивные фильтры, как на базе простых градиентных алгоритмов с линейной арифметической сложностью, так и более сложных алгоритмов, таких как рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS) с квадратичной арифметической сложностью и их быстрые (вычислительно эффективные) версии с линейной арифметической сложностью: быстрый алгоритм Калмана (Fast Kalman, FK), быстрый трансверсальный фильтр (Fast Transversal Filter, FTF), Fast a Posteriori Error Sequential Technique (FAEST) и его стабилизированная версия [4].

Арифметическая сложность при реализации большинства современных алгоритмов цифровой обработки сигналов уже не является существенной проблемой. Благодаря успехам физики полупроводников, микроэлектронных технологий и средств проектирования больших интегральных схем, сегодня промышленностью освоены современные цифровые сигнальные процессоры (ЦСП, Digital Signal Processors, DSP) и программируемые логические схемы (ПЛИС, Field-Programmable Gate Arrays, FPGA), позволяющие быстро и эффективно реализовывать различные алгоритмы цифровой обработки сигналов [24-28]. Эта элементарная база уже позволяет реализовывать адаптивные фильтры на базе не только арифметически простых, но и сложных алгоритмов [29, 30].

Если реализуются FS-эквалайзеры, то в них могут быть использованы указанные выше простые градиентные адаптивные алгоритмы и RLS-алгоритмы с квадратичной вычислительной сложностью, с той лишь

разницей по отношению к SS-эквалайзерам, что сигналы FF-части эквалайзера по-прежнему формируются и сдвигаются в линиях задержки на частоте дискретизации, а сигналы FB-части – на частоте следования информационных символов. Из них формируются векторы обрабатываемых сигналов только на символической скорости и на ней же происходит их обработка с целью вычисления векторов весовых коэффициентов эквалайзера и формирования его выходного сигнала.

Однако такая процедура не применима к быстрым RLS-алгоритмам с линейной вычислительной сложностью, т.к. принцип их работы основан теории линейного предсказания входных сигналов, отсчеты которых следуют с той же скоростью, что и скорость вычисления весовых коэффициентов и выходного сигнала адаптивного фильтра.

В настоящей работе рассматривается решение, позволяющее использовать быстрые RLS-алгоритмы в FS FF- и FS FF/FB-эквалайзерах.

### Архитектуры эквалайзеров

Архитектура SS FF-эквалайзера приведена на рис. 1, а SS FF/FB-эквалайзера – на рис. 2. SS FF-эквалайзер – это одноканальный, а SS FF/FB-эквалайзер – двухканальный адаптивный фильтр. Первый эквалайзер обрабатывает входной сигнал  $x(k_s)$ , поступающий из канала связи, и требуемый сигнал  $d(k_s)$ . Второй эквалайзер обрабатывает эти же сигналы, а также задержанный на длительность одного символа  $z_s^{-1}$  сигнал  $\tilde{y}(k_s)$  с выхода устройства принятия решения о принадлежности выходного сигнала эквалайзера  $y(k_s)$  тому или иному элементу информационного созвездия. В качестве требуемого сигнала  $d(k_s)$  в процессе обучения обычно выступает известная на приемной стороне тренировочная последовательность, предварительно синхронизированная с аналогичной последовательностью, принимаемой из канала связи, а в установившемся состоянии – сигнал с выхода решающего устройства.

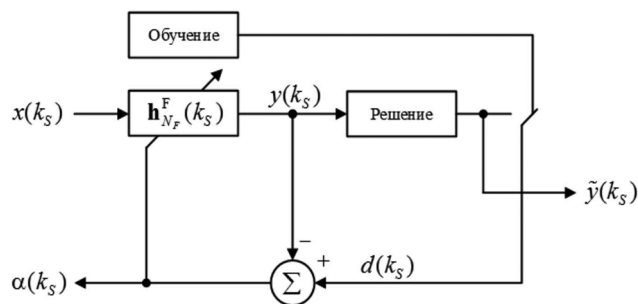


Рис. 1. SS FF-эквалайзер

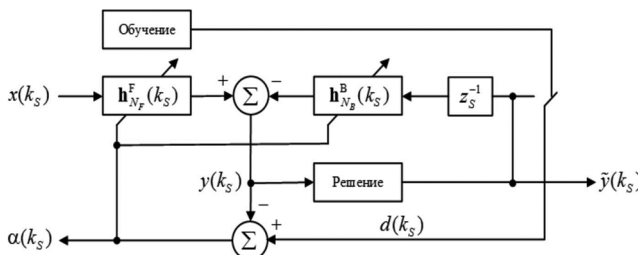


Рис. 2. SS FF/FB-эквалайзер

На рис. 1 и рис. 2,  $k_s$  – номер отсчёта, совпадающий с номером символа, так как отсчёты следуют с частотой принимаемых символов  $F_S$ , т.е.  $F_D = F_S$ , где  $F_D$  – частота дискретизации входного сигнала эквалайзера. Обработка всех обозначенных сигналов осуществляется также на символьной скорости  $F_S$ . Результатом обработки являются векторы весовых коэффициентов  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  в SS FF-эквалайзере. В эквалайзере с обратной связью вычисляются векторы весовых коэффициентов  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  FF-части и весовые коэффициенты  $\mathbf{h}_{N_B}^B(k_S)$  FB-части, которые формируют вектор весовых коэффициентов всего SS FF/FB-эквалайзера  $\mathbf{h}_N(k_S) =$

$$= [\mathbf{h}_{N_F}^{FT}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S)]^T. \text{ С его помощью вычисляется выходной сигнал эквалайзера}$$

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N(k_S), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_N(k_S) = [\mathbf{x}_{N_F}^T(k_S), \mathbf{x}_{N_B}^T(k_S)]^T$  – вектор входных сигналов всего эквалайзера,  $\mathbf{x}_{N_F}(k_S)$  и  $\mathbf{x}_{N_B}(k_S)$  – векторы сигналов его FF- и FB частей, а  $N = N_F + N_B$  – полное число весовых его коэффициентов. В случае SS FF/FB-эквалайзера вычисление векторов  $\mathbf{h}_N(k_S)$  может быть выполнено с помощью любых версий многоканальных (с числом каналов  $M = 2$ ) градиентных адаптивных алгоритмов и RLS-алгоритмов с квадратичной вычислительной сложностью. В случае SS FF-эквалайзера  $\mathbf{x}_N(k_S) = \mathbf{x}_{N_F}(k_S)$  и  $\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$ ,  $N = N_F$  и  $M = 1$ , т.е. для вычисления весовых коэффициентов используется одноканальный адаптивный алгоритм.

Таким образом, по сравнению с FF/FB-эквалайзером в FF-эквалайзере отсутствует ветвь обратной связи, поэтому в статье далее будет рассматриваться в основном лишь FF/FB-эквалайзер, как более сложный. Переход к FF-эквалайзеру осуществляется путем очевидного упрощения FF/FB-эквалайзера. Также в статье в формулах строчными буквами обозначаются скалярные переменные и элементы векторов. Векторы обозначаются жирными строчными буквами. Верхний индекс T обозначает операцию транспонирования вектора, а верхний индекс H – операцию эрмитово сопряжения, т.е. транспонирование вектора и комплексное сопряжение его элементов, обозначаемое символом \*. Нижний индекс N обозначает число элементов в векторе.

В FS-эквалайзерах входной сигнал дискретизируется на частоте  $F_D = L \cdot F_S$ , где  $L$  – это коэффициент пере-дискретизации (обычно целое число), определяемой полосой входного сигнала. В этом случае для вычисления весовых коэффициентов эквалайзера могут быть использованы простые градиентные адаптивные алгоритмы с линейной арифметической сложностью  $O(N)$  или RLS-алгоритмы с квадратичной арифметической сложностью  $O(N^2)$ . Однако, в FS-эквалайзерах не могут быть использованы напрямую вычислительно эф-

фективные быстрые RLS-алгоритмы с линейной арифметической сложностью  $O(N)$ , так как в таких алгоритмах все сигналы должны следовать с одной и той же скоростью [4].

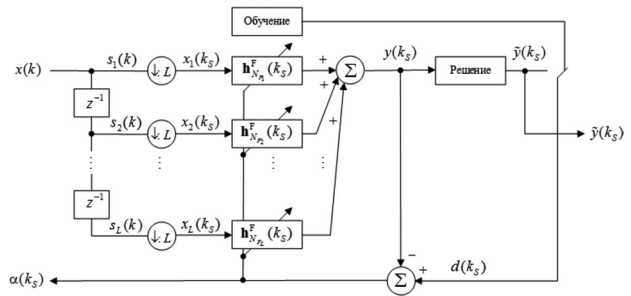


Рис. 3. FS FF-эквалайзер

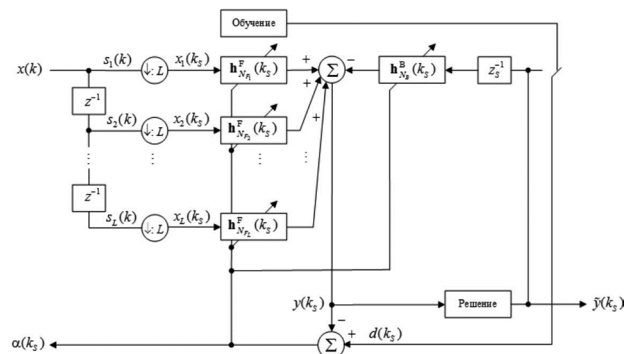


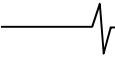
Рис. 4. FS FF/FB-эквалайзер

Для решения этого противоречия предлагается использовать полифазное представление входного сигнала  $x(k)$  (см. рис. 3 и рис. 4), где  $k$  – номера отсчётов этого сигнала, следующих с частотой дискретизации  $F_D$ . Здесь символ  $\downarrow L$  обозначает операцию прореживания (децимации) отсчетов, а символ  $z^{-1}$  – задержку отсчетов сигнала на длительность одного периода частоты дискретизации  $F_D$ .

В этом случае FS FF-эквалайзер уже является не одноканальным, а многоканальным адаптивным фильтром с числом каналов  $M = L$ . При этом FS FF/FB-эквалайзер по-прежнему остается многоканальным, но с числом каналов не  $M = 2$ , а  $M = L + 1$ . В обоих типах эквалайзеров весовые коэффициенты  $\mathbf{h}_{N_F}^F(k_S)$  распределяются с прореживанием между  $L$  каналами как  $\mathbf{h}_{N_{F,l}}^F(k_S)$ , где  $l = 1, 2, \dots, L$ . Если  $N_F$  и  $L$  – четные числа, то все векторы  $\mathbf{h}_{N_{F,l}}^F(k_S)$  содержат одинаковое число весовых коэффициентов  $N_{F,l} = N_F / L$ . В противном случае значения  $N_{F,l}$  могут быть неодинаковыми.

### Алгоритмы работы эквалайзера

Так как число весовых коэффициентов в каналах FS FF-части эквалайзеров (рис. 3 и рис. 4) в общем случае может быть неодинаковым, а также отличаться от числа весовых коэффициентов FB-части эквалайзера, то для вычисления этих коэффициентов требуются быстрые



версии многоканальных RLS-алгоритмов, в которых имеется возможность использовать неодинаковое число весовых коэффициентов в каждом из каналов.

В качестве таких алгоритмов могут быть использованы многоканальные алгоритмы [4]. Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквалайзера на базе такого FK-алгоритма приведен в табл. 1.

Здесь  $\delta^2$  – параметр задания начальных значений

энергий линейного предсказания  $E^{f(m)}(0)$ ,  $\lambda$  – параметр экспоненциального взвешивания обрабатываемых сигналов, а  $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)}$  и  $\mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$  – перестановочные матрицы [4]. В табл. 1 и далее обозначения типа  $\bullet|_{n_1:n_2}$  указывают на используемые номера элементов вектора.

Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквалайзера на базе FTF-алгоритма приведен в табл. 2.

Таблица 1. FS FF/FB-эквалайзер на основе многоканального FK-алгоритма

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization :</b> $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; <b>create :</b> $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{g}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$	(1.0)
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$\mathbf{s}_L(k) _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) _1 = x(k)$	(1.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(1.2)
<b>if</b> $l = 0$	
$k_s = k_s + 1$	(1.3)
<b>For</b> $l = 1, 2, \dots, L$	
$x_l(k_s) = s_l(k)$ ( <b>decimation</b> )	(1.4)
$\mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _{2:N_{F,l}} = \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _{1:N_{F,l}-1}$ , $\mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)}(k_s) _1 = x_l(k_s)$	(1.5)
<b>End for</b> $l$	
$\mathbf{x}_{N_B}(k_s) _{2:N_B} = \mathbf{x}_{N_B}(k_s) _{1:N_B-1}$ , $\mathbf{x}_{N_B}(k_s) _1 = d(k_s - 1)$	(1.6)
$\mathbf{x}_N^{(0)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_{F,1}}^{(1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{F,2}}^{(2)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{F,l}}^{(l+1)T}(k_s),$ $\dots, \mathbf{x}_{N_{F,L}}^{(L)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_B}^T(k_s)]^T = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s), \dots,$ $\mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.7)
$\mathbf{x}_N^{(1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.8)
$\vdots$	
$\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.9)
$\mathbf{x}_N^{(m+1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.10)
$\vdots$	
$\mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s)]^T$	(1.11)
$\mathbf{x}_N^{(M)}(k_s) = [\mathbf{x}_{N_1}^{(1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_2}^{(2)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^{(m)T}(k_s - 1),$ $\mathbf{x}_{N_{m+1}}^{(m+1)T}(k_s - 1), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^{(M-1)T}(k_s - 1), \mathbf{x}_{N_M}^{(M)T}(k_s - 1)]^T$	(1.12)
<b>For</b> $m = M, M - 1, \dots, 1$	
$\alpha^{f(m)}(k_s) = x_m(k_s) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s)$	(1.13)
$\alpha^{b(m)}(k_s) = x_m(k_s - N_m) - \mathbf{h}_N^{b(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_s)$	(1.14)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_s) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_s - 1) + \mathbf{g}_N^{(m)}(k_s)\alpha^{f(m)*}(k)$	(1.15)
$e^{f(m)}(k_s) = x_m(k_s) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_s - 1)\mathbf{x}_N^{(m)}(k_s)$	(1.16)

$$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S) \quad (1.17)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) \end{bmatrix} \frac{e^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S)} \quad (1.18)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{g}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{g}_N^{(m-1)}(k_S) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) + \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)}{1 - \alpha^{b(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S)} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \mathbf{g}_N^{(m-1)}(k_S) \alpha^{b(m)*}(k_S) \quad (1.21)$$

End for  $m$

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S) \quad (1.22)$$

$$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \mathbf{g}_N^{(0)}(k_S) \alpha^*(k_S) = \quad (1.24)$$

$$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{FJ}}^{F(J)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{Fj+1}}^{F(j+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{FL}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T \quad (1.25)$$

$$\mathbf{g}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{g}_N^{(0)}(k_S) \quad (1.25)$$

End for if

End for  $k$

Таблица 2. FS FF/FB-эквайзер на основе многоканального FTF-алгоритма

Вычисления	Ссылки
<b>Initialization</b> : $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $E^{b(m)}(0) = \delta^2 \lambda^{-N_m}$ , $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; <b>create</b> : $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{t}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ , $\varphi_N^{(M)}(1) = 1$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$	(2.0)
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$ $\mathbf{s}_L(k) \Big _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) \Big _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) \Big _1 = x(k)$	(2.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(2.2)
<b>if</b> $l = 0$ $\vdots$	(2.3)...(2.12)
<b>For</b> $m = M, M - 1, \dots, 1$ $\alpha^{f(m)}(k_S) = x_m(k_S) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m)}(k_S)$	(2.13)
$e^{f(m)}(k_S) = \alpha^{f(m)}(k_S) \varphi_N^{(m)}(k_S)$	(2.14)
$\bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) \end{bmatrix} \frac{\alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(2.15)
$\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix}$	(2.16)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) e^{f(m)*}(k_S)$	(2.17)
$\alpha^{b(m)}(k_S) = E^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)$	(2.18)
$\mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) = \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) + \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}^{(m)}(k_S)$	(2.19)
$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S)$	(2.20)
$\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S) = \varphi_N^{(m)}(k_S) \frac{\lambda E^{f(m)}(k_S - 1)}{E^{f(m)}(k_S)}$	(2.21)
$\varphi_N^{(m-1)}(k_S) = \frac{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)}{1 - \lambda^{-1} \varphi_{N+1}^{(m)}(k_S) \tilde{q}^{(m)*}(k_S) \alpha^{b(m)}(k_S)}$	(2.22)
$e^{b(m)}(k_S) = \alpha^{b(m)}(k_S) \varphi_N^{(m-1)}(k_S)$	(2.23)
$E^{b(m)}(k_S) = \lambda E^{b(m)}(k_S - 1) + e^{b(m)}(k_S) \alpha^{b(m)*}(k_S)$	(2.24)

$$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) e^{b(m)*}(k_S) \quad (2.25)$$

**End for**  $m$

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S) \quad (2.26)$$

$$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S) \quad (2.27)$$

$$e(k_S) = \alpha(k_S) \varphi_N^{(0)}(k_S) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S) e^*(k_S) =$$

$$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F_1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F_2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F_j}}^{F(j)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F_{j+1}}}^{F(j+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F_L}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T$$

$$\mathbf{t}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S), \quad \varphi_N^{(M)}(k_S + 1) = \varphi_N^{(0)}(k_S) \quad (2.29)$$

**End for if**

**End for**  $k$

Вычислительная процедура FS FF/FB-эквайзера на базе FAEST-алгоритма аналогична табл. 2, за исключением уравнений (2.21) и (2.22), которые заменяются соответственно на уравнения

$$\frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_N^{(m)}(k_S)} + \lambda^{-1} \frac{\alpha^{f(m)*}(k_S) \alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)} \quad (2)$$

и

$$\frac{1}{\varphi_N^{(m-1)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} - \lambda^{-1} \alpha^{b(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S). \quad (3)$$

Пример реализации рассматриваемого FS FF/FB-эквайзера на базе стабилизированного FAEST-алгоритма приведен в табл. 3.

В табл. 1 – табл. 3 в основном использованы обозначения, принятые в [4], где можно найти объяснения промежуточных переменных, используемых в представленных алгоритмах. Эти алгоритмы могут быть использованы и для реализации FS FF-эквайзера при исключении, как уже указывалось, из FS FF/ FB-эквайзера вычислений, связанных с FB-частью.

Таблица 3. FS FF/FB-эквайзер на основе многоканального стабилизированного FAEST-алгоритма

Вычисления	Ссылки (3.0)
<b>Initialization</b> : $E^{f(m)}(0) = \delta^2$ ; $E^{b(m)}(0) = \delta^2 \lambda^{-N_m}$ , $\mathbf{h}_N^{f(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N^{b(m)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; <b>create</b> : $\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T}$ ; $m = 1, \dots, M$ ; $M = L + 1$ ; $\mathbf{t}_N^{(M)}(1) = \mathbf{0}_N$ , $\varphi_N^{(M)}(1) = 1$ ; $\mathbf{x}_N^{(0)}(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{h}_N(0) = \mathbf{0}_N$ ; $\mathbf{s}_L(0) = \mathbf{0}_L$ ; $k_s = 0$ ; $K_1 = 1.5$ ; $K_2 = 2.5$ ; $K_3 = 1$ ; $K_4 = 0$ ; $K_5 = 1$	
<b>For</b> $k = 1, 2, \dots, K$	
$\mathbf{s}_L(k) \Big _{2:L} = \mathbf{s}_L(k) \Big _{1:L-1}$ , $\mathbf{s}_L(k) \Big _1 = x(k)$	(3.1)
$l = \text{mod}_L(k)$	(3.2)
<b>if</b> $l = 0$	
$\vdots$	(3.3)...(3.12)
<b>For</b> $m = M, M-1, \dots, 1$	
$\alpha^{f(m)}(k_S) = x_m(k_S) - \mathbf{h}_N^{f(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m)}(k_S)$	(3.13)
$e^{f(m)}(k_S) = \alpha^{f(m)}(k_S) \varphi_N^{(m)}(k_S)$	(3.14)
$\bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_N^{(m)}(k_S) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) \end{bmatrix} \frac{\alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(3.15)
$\mathbf{S}_{N+1}^{(m)} \mathbf{T}_{N+1}^{(m)T} \bar{\mathbf{t}}_{N+1}^{(m)}(k_S) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_N^{(m)}(k_S) \\ \tilde{q}^{(m)}(k_S) \end{bmatrix}$	(3.16)
$\mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{f(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \bar{\mathbf{t}}_N^{(m)}(k_S) e^{f(m)*}(k_S)$	(3.17)
$E^{f(m)}(k_S) = \lambda E^{f(m)}(k_S - 1) + e^{f(m)}(k_S) \alpha^{f(m)*}(k_S)$	(3.18)
$\frac{1}{\varphi_{N+1}^{(m)}(k_S)} = \frac{1}{\varphi_N^{(m)}(k_S)} + \lambda^{-1} \frac{\alpha^{f(m)*}(k_S) \alpha^{f(m)}(k_S)}{E^{f(m)}(k_S - 1)}$	(3.19)
$\alpha^{b(m)}(k_S) = x_m(k_S - N_m) - \mathbf{h}_N^{b(m)H}(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_S)$	(3.20)
$q^{(m)}(k_S) = \alpha^{b(m)}(k_S) / E^{b(m)}(k_S - 1)$	(3.21)
$\tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) = E^{b(m)}(k_S - 1) \tilde{q}_N^{(m)}(k_S)$	(3.22)

$$\alpha^{b(1)(m)}(k_S) = K_1 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_1) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.23)$$

$$\alpha^{b(2)(m)}(k_S) = K_2 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_2) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.24)$$

$$\alpha^{b(5)(m)}(k_S) = K_5 \alpha^{b(m)}(k_S) + (1 - K_5) \tilde{\alpha}^{b(m)}(k_S) \quad (3.25)$$

$$t^{(m)}(k_S) = K_4 q^{(m)}(k_S) + (1 - K_4) \tilde{q}^{(m)}(k_S) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{t}_N(k_S) = \tilde{\mathbf{q}}_N(k_S) + \mathbf{h}_N^b(k_S - 1) t^{(m)}(k_S) \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{\hat{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} = 1 + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)H}(k_S) \mathbf{x}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} = \frac{1}{\phi_{N+1}^{(m)}(k_S)} - \lambda^{-1} \alpha^{b(5)(m)*}(k_S) \tilde{q}^{(m)}(k_S) \quad (3.29)$$

$$\phi_N^{(m-1)}(k_S) = \left[ K_3 \frac{1}{\hat{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} + (1 - K_3) \frac{1}{\tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S)} \right]^{-1} \quad (3.30)$$

$$e^{b(1)(m)}(k_S) = \alpha^{b(1)(m)}(k_S) \tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.31)$$

$$e^{b(2)(m)}(k_S) = \alpha^{b(2)(m)}(k_S) \tilde{\phi}_N^{(m-1)}(k_S) \quad (3.32)$$

$$E^{b(m)}(k_S) = \lambda E^{b(m)}(k_S - 1) + e^{b(2)(m)}(k_S) \alpha^{b(2)(m)*}(k_S) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S) = \mathbf{h}_N^{b(m)}(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(m-1)}(k_S) e^{b(1)(m)*}(k_S) \quad (3.34)$$

End for m

$$y(k_S) = \mathbf{h}_N^H(k_S - 1) \mathbf{x}_N^{(0)}(k_S) \quad (3.35)$$

$$\alpha(k_S) = d(k_S) - y(k_S) \quad (3.36)$$

$$e(k_S) = \alpha(k_S) \phi_N^{(0)}(k_S)$$

$$\mathbf{h}_N(k_S) = \mathbf{h}_N(k_S - 1) + \lambda^{-1} \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S) e^*(k_S) = \quad (3.37)$$

$$= \left[ \mathbf{h}_{N_{F,1}}^{F(1)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F,2}}^{F(2)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F,l}}^{F(l)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_{F,l+1}}^{F(l+1)T}(k_S), \dots, \mathbf{h}_{N_{F,L}}^{F(L)T}(k_S), \mathbf{h}_{N_B}^{BT}(k_S) \right]^T$$

$$\mathbf{t}_N^{(M+1)}(k_S + 1) = \mathbf{t}_N^{(0)}(k_S), \quad \phi_N^{(M)}(k_S + 1) = \phi_N^{(0)}(k_S) \quad (3.38)$$

End for if

End for k

### Моделирование эквалайзера

Проверка работоспособности эквалайзеров, представленных на рис. 3 и рис. 4, и алгоритмов их работы выполнена путем моделирования FS FF-эквалайзера с числом весовых коэффициентов  $N_F = 137$  и эквивалентного ему FS FF/FB-эквалайзера с числом весовых коэффициентов  $N_F = 69$  и  $N_B = 34$  при  $L = 2$  и практически отсутствии шума на входе (при отношении сигнал-шум, ОСШ = 50 дБ). Для моделирования использован алгоритм (табл. 3), но может быть использован любой из алгоритмов (табл. 1 – табл. 3), т.к. они являются математически эквивалентными друг-другу. В качестве принимаемого сигнала использовался цифровой сигнал с модуляцией 16-QAM. Число тренировочных символов равнялось 1000, а информационных – 1000. Результаты моделирования приведены на рис. 5 – рис. 7.

На рис. 5 зеленой кривой обозначена АЧХ канала связи, имеющая в полосе частот один глубокий провал примерно – 65 дБ. Фиолетовая кривая – это АЧХ эквалайзера в установившемся режиме, а синяя – совместная АЧХ канала связи и эквалайзера. Видно, что даже при практически отсутствии шума на входе, FS FF-эквалайзер не может полностью выровнять АЧХ рассматриваемого канала связи, в то время как FS FF/FB-эквалайзер его выравнивает с равномерностью менее 0,01 дБ.

Для построения совместной АЧХ канала связи и эквалайзеров (рис. 5) необходимо найти свертку их импульсных откликов. Вектор отсчетов совместного импульсного отклика канала связи и импульсного отклика SS FF-эквалайзера – это свертка

$$\mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_f}(k_S), \quad (4)$$

где символ  $\otimes$  обозначает операцию свертки, а  $\mathbf{h}_{N_w}$  – это вектор  $N_w$  отсчетов импульсного отклика канала связи.

В FF/FB-эквалайзере этот отклик определяется несколько сложнее, а именно как

$$\left[ \left( \mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_f}^F(k_S) \right) \Big|_{1:D} \right]^T, \quad (5)$$

$$\left( \mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_f}^F(k_S) \Big|_{D+1:D+N_B} + \mathbf{h}_{N_B}^B(k_S) \right) \Big|_{N_C}^T,$$

где  $N_C = \max \{ N_w + N_f - 1, D + N_f \}$ , а  $D$  – это задержка в отсчетах принятого тренировочного сигнала по отношению к передаваемому сигналу.

В случае FS FF- и FS FF/FB-эквалайзеров выполняются аналогичные операции, но на символьной скорости, для чего свертка

$$\mathbf{h}_{N_w} \otimes \mathbf{h}_{N_f}(k) \quad (6)$$

рассчитывается на частоте дискретизации входного сиг-

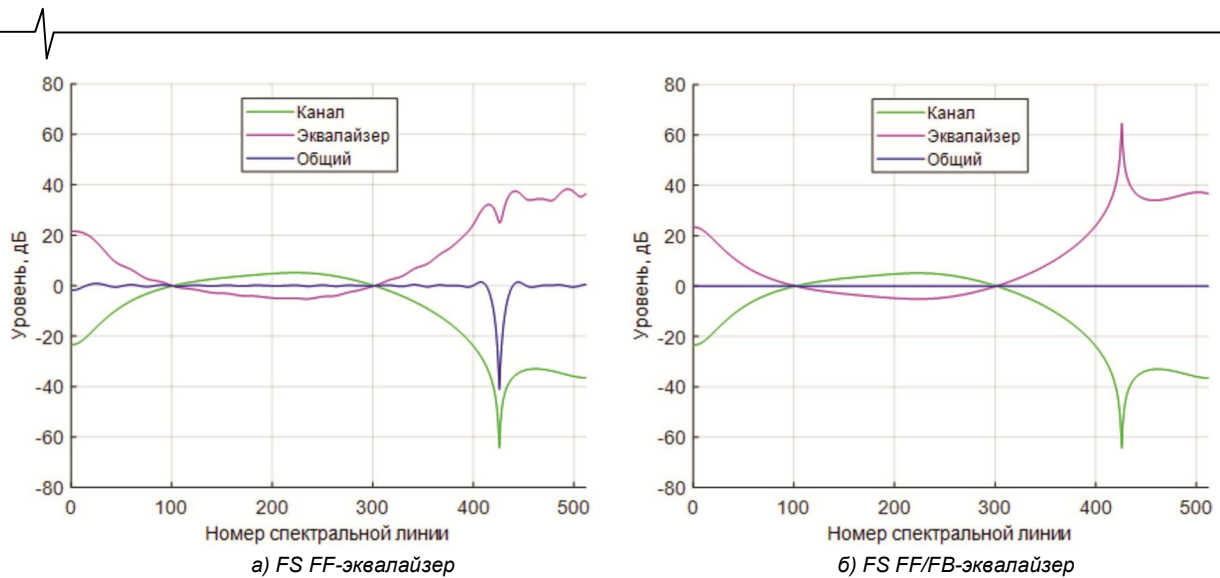


Рис. 5. Выравнивание АЧХ канала связи

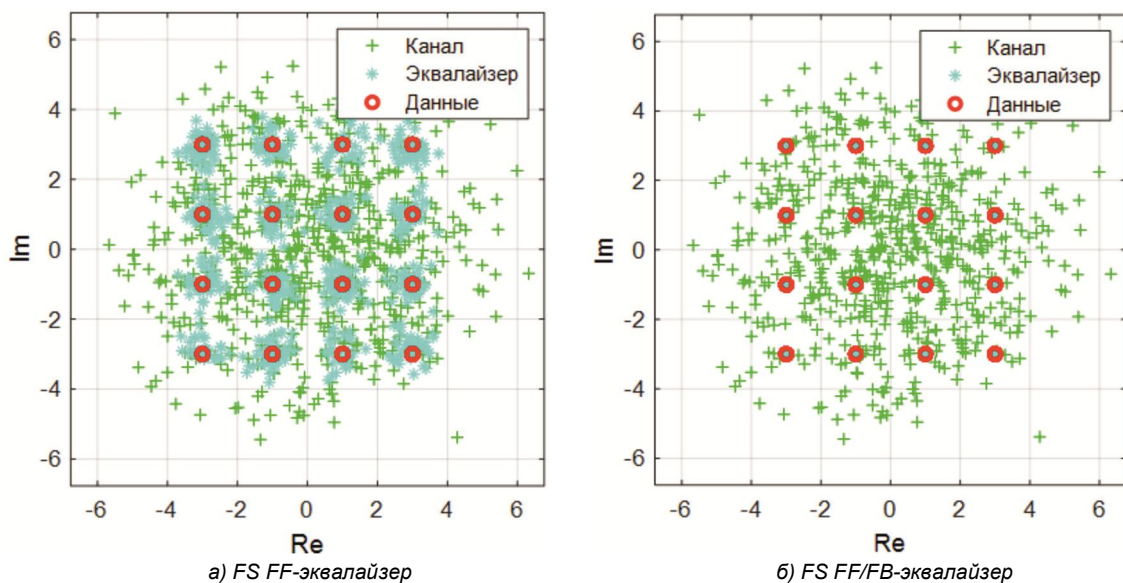


Рис. 6. Созвездия

нала эквалайзера  $F_D = L \cdot F_S$ , а затем прореживается как  $\downarrow L$ . Полученные таким образом свёртки затем используются для построения совместной АЧХ канала связи и эквалайзеров (см. рис. 5) в полосе частот, определяемой частотой следования информационных символов  $F_S$ .

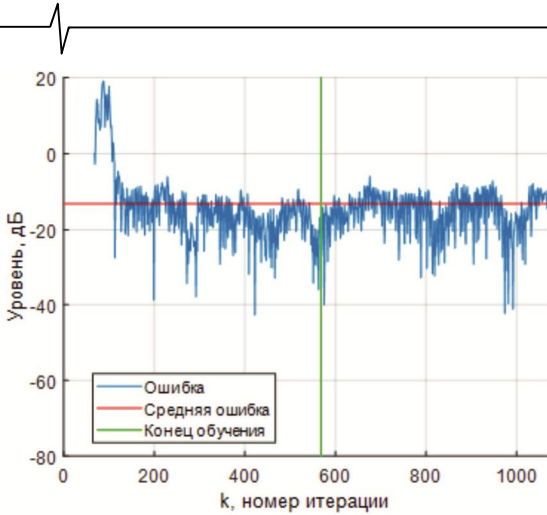
Рис. 6 также подтверждает лучшее качество FS FF/FB-эквалайзера в терминах созвездий информационных символов в установившемся состоянии. Здесь зеленым цветом обозначены информационные символы на выходе канала связи/входе эквалайзера, голубым – на выходе эквалайзера, а красным – символы переданного сообщения (его алфавит). Из рис. 6 б) видно, что в случае FS FF/FB-эквалайзера информационные символы на его выходе практически совпадают с переданными символами. Разброс элементов созвездий на выходе FS FF/FB-эквалайзера лишь при ОСШ на входе, равном 20 дБ, соответствует аналогичному разбросу FS FF-эквалайзера при практически полном отсутствии шума на его входе (см. рис. 6 а). При этом

в совместной АЧХ при использовании FS FF/FB-эквалайзера полностью отсутствует глубокий провал, а ее неравномерность составляет около 2,5 дБ, в то время как при использовании FS FF-эквалайзера такой провал (см. рис. 5 а), равен примерно 40 дБ даже при ОСШ = 50 дБ.

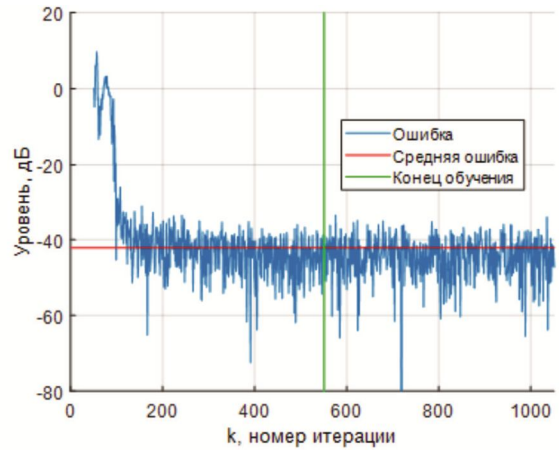
Рис. 7 показывает переходные процессы в терминах ошибок в выходных сигналах адаптивных фильтров рассматриваемых эквалайзеров. Видно, что длительность переходных процессов в обоих эквалайзерах примерно одинаковая и в рассматриваемом случае составляет около 200 итераций на символьной скорости. Однако значение ошибок в установившемся состоянии разное, что объясняет разные результаты, представленные на рис. 5 и рис. 6.

При использовании сигналов с низкой плотностью созвездий, например 4-QAM, FS FF/FB-эквалайзер демонстрирует работоспособность и удовлетворительное качество работы даже при довольно низких значениях ОСШ. Примеры выровненных АЧХ в указанных режимах приведены на рис. 8.



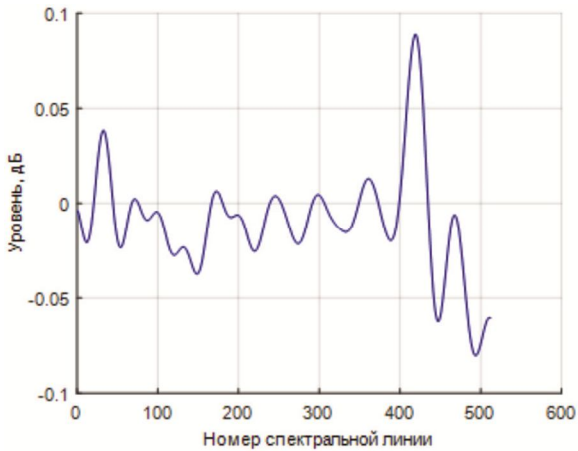


а) FS FF-эквайзер

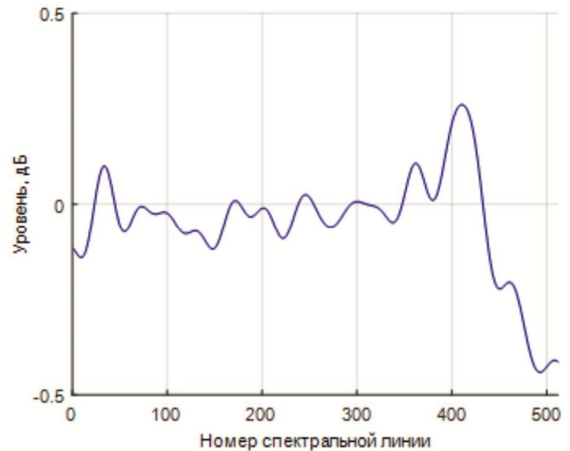


б) FS FF/FB-эквайзер

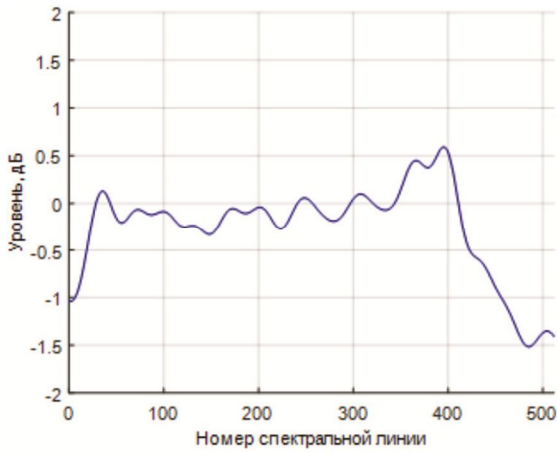
Рис. 7. Нормализованный квадрат ошибки



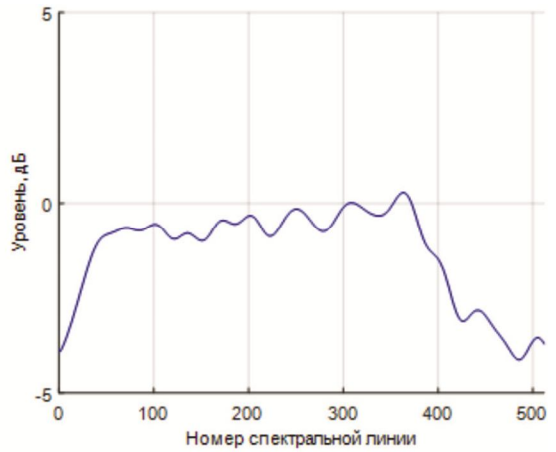
а) ОСШ=40 дБ



б) ОСШ=30 дБ



в) ОСШ=20 дБ



г) ОСШ=10 дБ

Рис. 8. Совместная АЧХ канала связи и FS FF/FB-эквайзера в установившемся состоянии


**Заключение**

Таким образом, результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного FS FF/FB-эквайзера на базе быстрых RLS-алгоритмов, а также его более высокую эффективность в сравнении с аналогичным FS FF-эквайзером. В силу линейной арифметической сложности такой эквалайзер может быть использован в приложениях с ограниченными вычислительными ресурсами. Предложенное решение может быть использовано в связной аппаратуре раз-

личного назначения, элементом которой является эквалайзер.

**Литература**

1. Sayed A.H. Fundamentals of adaptive filtering. Hoboken: John Wiley and Sons, Inc., 2003. – 1125 p.
2. Diniz P.S.R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation, 4-th ed. Springer Science + Business Media, 2013. – 652 p.
3. Farhang-Boroujeny B. Adaptive filters theory and applications, 2-nd ed. John Wiley & Sons, 2013. – 778 p.

- 
- 
4. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов. Теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013. – 528 с.
  5. Haykin S. Adaptive filter theory, 5-th ed. Pearson Education Inc., 2014. – 889 p.
  6. Benesty J., Huang Y., Eds. Adaptive signal processing: applications to real-world problems. Springer-Verlag., 2003. – 356 p.
  7. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 1 // Современная электроника. – 2009. – № 9. – С. 56-63.
  8. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 2 // Современная электроника. – 2010. – № 1. – С. 72-77.
  9. Джиган В.И. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Часть 3 // Современная электроника. – 2010. – № 2. – С. 70-77.
  10. Monzingo R.A., Haupt R.L., Miller T.W. Introduction to adaptive arrays, 2nd ed. SciTech Publishing, 2011. – 510 p.
  11. Kuo S.M., Morgan D.S. Active noise control // Proceedings of the IEEE. – 1999. Vol. 87, № 6. – Pp. 943-973.
  12. Messerschmitt D. Echo cancellation in speech and data transmission // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1984. – Vol. 2. – № 2. – Pp. 283-297.
  13. Nezami M.K. Fundamentals of power amplifier linearization using digital pre-distortion // High Frequency Electronics, 2004. – Vol. 3. – № 8. – Pp. 54-59.
  14. Qureshi S. Adaptive equalization // IEEE Communications Magazine. – 1982. – Vol. 20. – № 2. – P. 9-16.
  15. Proakis J.G., Salehi M. Digital communications, 5-th ed. McGraw Hill, 2007. – 1170 p.
  16. Lucky R.W. Automatic equalization for digital communication // Bell System Technical Journal. – 1965. – Vol. 44. – № 2. – Pp. 547-588.
  17. Becker F.K., Holzman L.N., Lucky R.W., Port E. Automatic equalization for digital communication // Proceedings of the IEEE. – 1965. – Vol. 52. – № 1. – Pp. 96-97.
  18. Qureshi S. Adaptive equalization // Proceedings of the IEEE. – 1985. Vol. 73. – № 9. – Pp. 1349-1387.
  19. Lucky R.W. The adaptive equalizer // IEEE Signal Processing Magazine. – 2006. – Vol. 23. – № 3. – Pp. 104-107.
  20. Belfiore C.A., Park J.H. Decision feedback equalization // Proceedings of the IEEE. – 1979. – Vol. 67. – № 8. – Pp. 1143-1156.
  21. George D., Bowen R., Storey J. An adaptive decision feedback equalizer // IEEE Transactions on Communications. – 1971. – Vol. 19. – № 3. – Pp. 282-293.
  22. Gitlin R.D., Weinstein S.B. Fractionally-spaced equalization: an improved digital transversal equalizer // The Bell System Technical Journal. 1981. Vol. 60. № 2. – Pp. 275-296.
  23. Treichler J.R., Fijalkow I., Johnson C.R. Fractionally spaced equalizers // IEEE Signal Processing Magazine. – 1996. – Vol. 13. – № 3. – Pp. 65-81.
  24. Bayoumi M.A. VLSI design methodologies for digital signal processing architectures. Springer, 1994. – 399 p.
  25. Kuo S.M., Gan W.-S. S. Digital signal processors: architectures, implementations and applications. Prentice Hall, 2004. – 624 p.
  26. Welch T.B., Wright H.G., Morrow M.G. Real-time digital signal processing from MATLAB to C with the TMS320C6x DSPs, 3rd ed. CRC Press, 2017. – 480 p.
  27. Woods R., McAllister J., Lightbody G., Ying Yi. FPGA-based implementation of signal processing systems, 2nd ed. Willey, 2017. – 360 p.
  28. Витязев С.В. Цифровые процессоры обработки сигналов. М.: Горячая линия – Телком, 2017. – 100 с.
  29. Giordano A.A., Hsu F.M. Least square estimation with application to digital signal processing. – Canada, Toronto: John Wiley and Sons, Inc., 1985. – 412 p.
  30. Djigan V.I. Recursive least squares – an idea whose time has come // Proceedings of the 7-th International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing Moscow, 2007. – Pp. 255-260.