УДК 621.391

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗРЕШЕННОГО ОБРАЗА ПРИ ИНВЕРСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

***Хафизов Р.Г.**, д.т.н., профессор, профессор кафедры радиотехнических и медико-биологических систем Поволжского государственного технологического университета, Йошкар-Ола, e-mail: HafizovRG@volgatech.net.*

PROVIDING A RESOLVED IMAGE WITH INVERSE FILTERING OF SIGNALS IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Khafizov R.G.

An approach is proposed to ensure a resolved image at the output of an inverse filter, specified by a finite impulse response, during cyclic processing of signals under conditions of uncertainty. It is shown that the cyclic signal processing by an inverse filter allows to obtain a zero level of side lobes at the output. The approach to eliminating the uncertainty caused by the presence of zero components in the signal spectrum is based on a change of the signal dimension. A method is proposed for minimizing the level of fluctuation noise at the output of the inverse filter by minimizing the squared norm of the filter impulse response.

Key words: inverse filter, cyclic signal procession, complex signal, signals resolving.

Предложен подход к обеспечению разрешенного образа на выходе инверсного фильтра, заданного конечной импульсной характеристикой, при циклической обработке сигналов в условиях неопределенности. Показано, что циклическая обработка сигналов инверсным фильтром позволяет получить на выходе нулевой уровень боковых лепестков. Подход к устранению неопределенности, вызванной наличием нулевых компонент в спектре сигнала, основан на изменении размерности сигнала. Предложен способ минимизации уровня флуктуационного шума на выходе инверсного фильтра путем минимизации квадрата нормы импульсной характеристики фильтра.

Ключевые слова: инверсный фильтр, циклическая обработка сигналов, комплекснозначный сигнал, разрешение сигналов.

Введение

Инверсная фильтрация сигналов является эффективным способом подавления корреляционного шума [1]. Анализ работ по инверсной фильтрации позволяет выделить два вида неопределенностей при синтезе и анализе инверсного фильтра: неопределенность, вызванная наличием нулевых компонент в спектре сигнала, и неопределенность, обусловленная воздействием флуктуационного шума на входе фильтра [2-8]. Если в первом случае решаемыми проблемами являются проблемы физической реализуемости и подавления корреляционного шума на выходе фильтра, то во втором случае к указанным проблемам добавляется еще и проблема подавления флуктуационного шума на выходе фильтра. При этом задача устранения неопределенности при инверсной фильтрации решается как в частотной области путем ограничения спектра анализируемого сигнала [3, 4, 6-8], так и во временной области, например, методом деконволюции [2, 5].

Одним из методов обработки сигналов является циклическая обработка [9, 10]. Циклическая обработка сигналов дает возможность произвести расчет конечной импульсной характеристики (КИХ) фильтра и непосредственно использовать ее для реализации алгоритма фильтрации. Целью данной работы является исследование и разработка подхода к обеспечению разрешенного образа на выходе инверсного фильтра в условиях неопределенности при циклической обработке сигналов. При этом анализируемые сигналы $s(n) = \{s(n)\}$, $n = 0,1,\ldots,N$-1, и КИХ фильтра $\Lambda = \{\lambda(n)\}$, $n = 0,1,\ldots,N$-1, предполагаются комплекснозначными, т.е. $s(n = s_1(n) + is_2(n)$ и $\lambda(n) = \lambda_1(n) + i\lambda_2(n)$, где N – размерность сигнала и КИХ фильтра.

Расчет КИХ инверсного фильтра

Выражение для сигнала на выходе линейного фильтра $\mathrm{H} = \{\eta(m)\}$, заданного КИХ $\Lambda = \{\lambda(n)\}$, при обработке входного сигнала $\mathbf{s} = \{s(n)\}$ [9]:

$$\eta(m) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\lambda(m-n).$$

Для случая инверсной фильтрации сигнала на выходе фильтра:

$$\eta(m) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)\lambda(m-n) = \mathrm{K}(m),$$

где $\mathrm{K}(m)$ – символ Кронекера. Данное выражение может быть записано в матричной форме:

$\mathbf{S}\,\Lambda = \mathbf{K}$,

где, с учетом циклической обработки:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s(0) & s(1) & \ldots & s(N-1) \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s(N-1) & s(0) & \ldots & s(N-2) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(1) \\ \ldots \\ \lambda(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсчеты КИХ $\lambda(n)$ инверсного фильтра могут быть найдены в соответствии с правилом Крамера [11]:

$$\lambda(n) = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы $\mathbf{S}$, Δ_n – определитель матрицы, полученной путем замены n-го столбца матрицы $\mathbf{S}$ матрицей-столбцом $\mathbf{K}$.

Циклическая обработка инверсным фильтром с КИХ позволяет получить нулевой уровень боковых лепестков. Уровень флуктуационного шума $\sigma^2_{вых}$ на выходе инверсного фильтра определяется [9]:

$$\sigma^2_{вых} = R_{вых}(0) = 2\sigma^2_{вх}\|\mathbf{\Lambda}\|^2, \tag{1}$$

где $R_{вых}(0)$ – нулевой отсчет корреляционной функции на выходе инверсного фильтра, $\|\mathbf{\Lambda}\|$ – норма КИХ фильтра, $\sigma^2_{вх}$ – дисперсия составляющих комплексно-значного случайного процесса $\xi(n) = \xi_1(n) + i\xi_2(n)$, $n = 0,1,\ldots,N-1$, на входе фильтра. При этом $\sigma^2_{вх} = \sigma^2_{\xi_1} = \sigma^2_{\xi_2}$. Как показано в работе [9], комплексно-значный случайный процесс на выходе фильтра коррелирован, а мощность выходного шума пропорциональна квадрату нормы КИХ фильтра.

Рассмотрим пример расчета КИХ инверсного фильтра для сигнала $\mathbf{s} = \{s(n)\}$, $n = 0,1,\ldots,4$ (рис. 1,*а*): $\mathbf{s}$ = {0,3i; 1,2 + 0,7i; 0,9-i; -0,7; -0,6 + 0,5i}. Получаем:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,3i & 1,2+0,7i & 0,9-i & -0,7 & -0,6+0,5i \\ 1,2+0,7i & 0,9-i & -0,7 & -0,6+0,5i & 0,3i \\ 0,9-i & -0,7 & -0,6+0,5i & 0,3i & 1,2+0,7i \\ -0,7 & -0,6+0,5i & 0,3i & 1,2+0,7i & 0,9-i \\ -0,6+0,5i & 0,3i & 1,2+0,7i & 0,9-i & -0,7 \end{bmatrix},$$

Δ = -8,03-1,984i; Δ_0 = -1,626 - 2,215i; Δ_1 = -3,207 + 2,241i; Δ_2 = -2,053 - 1,752i; Δ_3 = -2,528 + 2,86i; Δ_4 = 1,082 + 1,594i.

КИХ инверсного фильтра (рис. 1, *б*):

$$\mathbf{\Lambda} = \{0,255+0,213i;\ 0,311-0,356i;\ 0,292+ +0,146i;\ 0,214-0,409i;\ -0,173-0,156i\}. \tag{2}$$

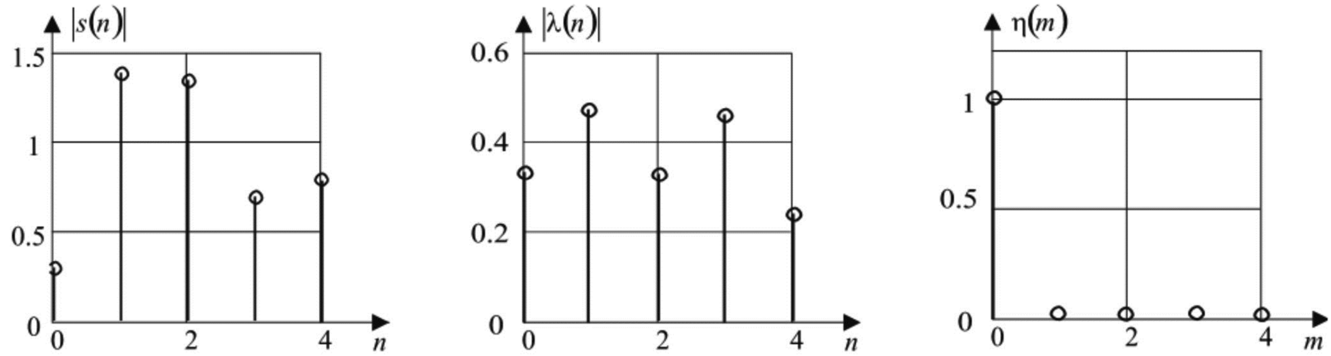
Результат фильтрации: $\mathbf{H}$ = {1; 0; 0; 0; 0} (рис. 1, *в*).

Рассмотрим применение инверсного фильтра с КИХ для решения задачи разрешения сигналов. Пусть входной сигнал $\mathbf{u}_{вх}$ образован путем суммирования сигнала s и задержанной на 3 отсчета копии сигнала s с масштабом 4. Таким образом, поучаем сигнал:

$$\mathbf{u}_{вх} = \{0,3i;\ 1,2+0,7i;\ 0,9-i;\ -0,7+ +1,2i;\ 4,2+3,3i;\ 3,6-4i;\ -2,8;\ -2,4+2i\}.$$

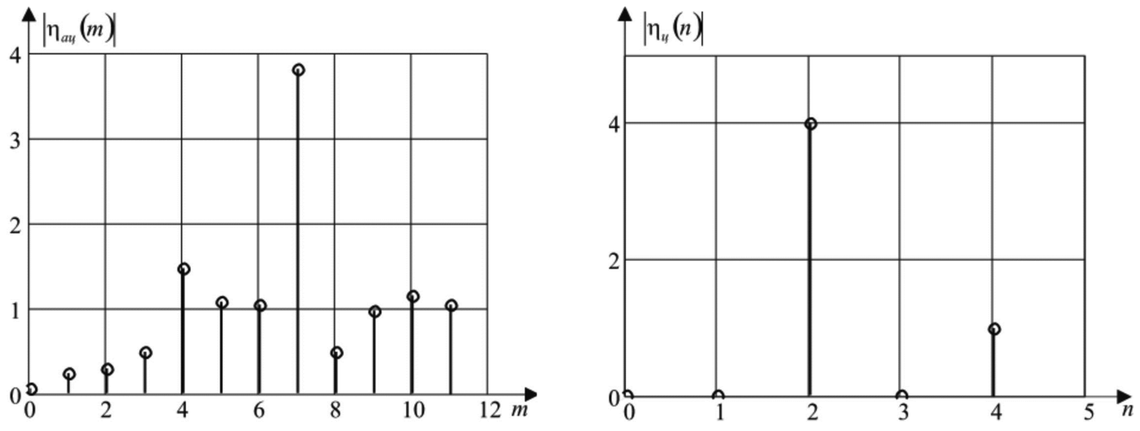
Пусть также положение сигнала не известно. Произведем ациклическую фильтрацию сигнала с КИХ (2). Результат фильтрации (рис. 2, *а*):

$$\mathbf{H}_{ац} = \{0,047-0,052i;\ 0,024-0,244i;\ 0,187-0,22i; 0,446-0,208i;\ 1,095-0,976i;\ 0,703-0,83i;. 1,014+0,245i;\ 3,813+0,22i;\ -0,446+0,208i; -0,095+0,976i;\ -0,75+0,882i;\ -1,038\}.$$



а) б) в)

Рис. 1. Амплитудное представление: а – сигнала, б – КИХ инверсного фильтра, в – результата фильтрации



а) б)

Рис. 2. Результат фильтрации: а – ациклическая, б – циклическая

На рис. 2, а наблюдается отклик от мощного сигнала, а отклик от слабого сигнала маскируется боковыми лепестками. В работе [9] предложен алгоритм ЧКШС, применение которого к отсчетам ациклической свертки дает результаты, аналогичные результатам циклической свертки. В соответствии с алгоритмом ЧКШС, необходимо сложить отсчеты ациклической свертки с интервалом в N отсчетов, т.е.:

$\eta_ц(n) = \eta_{ац}(n) + \eta_{ац}(n +) + \eta_{ац}(n + 2N)+\ldots,\ n = 0,1,\ldots,N\text{-}1.$

Для рассматриваемого примера получаем (рис. 2, *б*):

$\eta_ц(0) = \eta_{ац}(0) + \eta_{ац}(5) + \eta_{ац}(10) =$
$= 0{,}047 - 0{,}052i + 0{,}703 - 0{,}83i - 0{,}75 + 0{,}882i = 0;$
$\eta_ц(1) = \eta_{ац}(1) + \eta_{ац}(6) + \eta_{ац}(11) =$
$= 0{,}024 - 0{,}244i + 1{,}014 + 0{,}245i - 1{,}038 = 0;$
$\eta_ц(2) = \eta_{ац}(2) + \eta_{ац}(7) = 0{,}187 - 0{,}22i + 3{,}813 + 0{,}22i = 4;$
$\eta_ц(3) = \eta_{ац}(3) + \eta_{ац}(8) = 0{,}446 - 0{,}208i - 0{,}446 + 0{,}208i = 0;$
$\eta_ц(4) = \eta_{ац}(4) + \eta_{ац}(9) = 1{,}095 - 0{,}976i - 0{,}095 + 0{,}976i = 1.$

На рис. 2, *б* можно наблюдать два отклика с соответствующими амплитудами. Положение на дистанции первого сигнала формируется в момент времени N-1 (в нашем случае это в момент $n = 4$). Положение на дистанции последующих сигналов относительно первого определяется:

$$t_s = \mathrm{mod}(m_s + 1, N), \qquad (3)$$

где t_s – положение s-го сигнала на дистанции, m_s – номер s-го отклика. При $m_1 = 4$ получаем $t_1 = 0$, а при $m_2 = 2$ – $t_2 = 3$, что соответствует условиям примера. Таким образом, циклическая обработка сигналов инверсным фильтром с КИХ позволяет разрешать сигналы и обеспечивает нулевой уровень боковых лепестков.

Если спектр $\mathbf{P} = \{\rho(m)\}$, $m = 0,1,\ldots,N\text{-}1$, сигнала $\mathbf{s}$ содержит равные нулю компоненты, то определитель Δ матрицы $\mathbf{S}$ становится равным нулю и вычисление ИХ инверсного фильтра становится невозможным. Например, пусть задан сигнал:

$$\mathbf{S} = \{0{,}075 + 0{,}534i;\ 1 + 0{,}844i;\ 0{,}702 - 1{,}146i;\ -0{,}623 - 0{,}234i;\ -0{,}354 + 0{,}501i\}, \qquad (4)$$

спектр которого:

$$\mathbf{P} = \{0{,}8 + 0{,}499i;\ 0;\ 0{,}646 - 0{,}516i;\ -1{,}492 - 1{,}445i;\ 0{,}421 + 4{,}133i\},$$

содержит равную нулю компоненту $\rho(2) = 0$. Определитель Δ матрицы $\mathbf{S}$ равен нулю и расчет КИХ инверсного фильтра становится проблематичным.

Устранение неопределенности методом интерполяции спектра

В работе [12] рассмотрен метод интерполяции спектра сигнала добавлением нулей. При этом, как указано в [12], дополнение нулями не улучшает разрешающую способность этого преобразования, а позволяет получить интерполированное преобразование более сглаженной формы. В спектре дополненного нулями сигнала образуются компоненты, находящиеся между компонентами спектра исходного, т.е. не дополненного нулями, сигнала (рис. 3).

Пусть модификация сигнала $\mathbf{s}$ производится дополнением нулей так, что размерность сигнала $\mathbf{s}_м$ становится равной M:

$$\mathbf{s}_{мод} = \{s(0), s(1), \ldots, s(N-1), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{M-N}\}. \qquad (5)$$

Тогда спектр $\mathbf{P}_{мод} = \{\rho_{мод}(m)\}$, $m = 0,1,\ldots,M\text{-}1$, модифицированного сигнала $\mathbf{s}_м$ равен:

$$\rho_{мод}(m) = \sum_{n=0}^{M-1} s_{мод}(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{M}} = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{\frac{-i2\pi mn}{M}}.$$

Если величина M кратна N, то наблюдается совпадение гармоник спектров исходного и модифицированного сигналов (рис. 3, *а*). Если же величина M не кратна N, то при интерполяции спектра сигнала в его составе не будут равные нулю компоненты (рис. 3, *б*).

Таким образом, если спектр сигнала содержит равную нулю компоненту и определитель Δ матрицы $\mathbf{S}$ также равен нулю, то требуется изменить интервал определителя сигнала, например, изменив размерность сигнала путем добавления нулей.

Запишем сигнал (4) в виде:

$$\mathbf{s}_м = \{0{,}075 + 0{,}534i;\ 1 + 0{,}844i;\ 0{,}702 - 1{,}146i;\ -0{,}623 - 0{,}234i;\ -0{,}354 + 0{,}501i;\ 0\}. \qquad (6)$$

Спектр такого сигнала:

$$\mathbf{P}_м = \{0{,}8 + 0{,}499i;\ 0{,}329 - 0{,}268i;\ 0{,}935 + 0{,}249i;\ 0{,}046 - 0{,}721i;\ -3{,}379 + 0{,}152i;\ 1{,}719 + 3{,}293i\},$$

не содержит равных нулю компонент. КИХ инверсного фильтра для модифицированного сигнала:

$$\mathbf{\Lambda} = \{0{,}607 + 0{,}299i;\ 0{,}453 - 0{,}629i;\ 0{,}229 - 0{,}003i;\ -0{,}073- 0{,}579i;\ -0{,}343 + 0{,}115i;\ 0{,}026 + 0{,}236i\}, \qquad (7)$$

а результат фильтрации: $\mathbf{H}$ = {1; 0; 0; 0; 0; 0}. Квадрат нор-

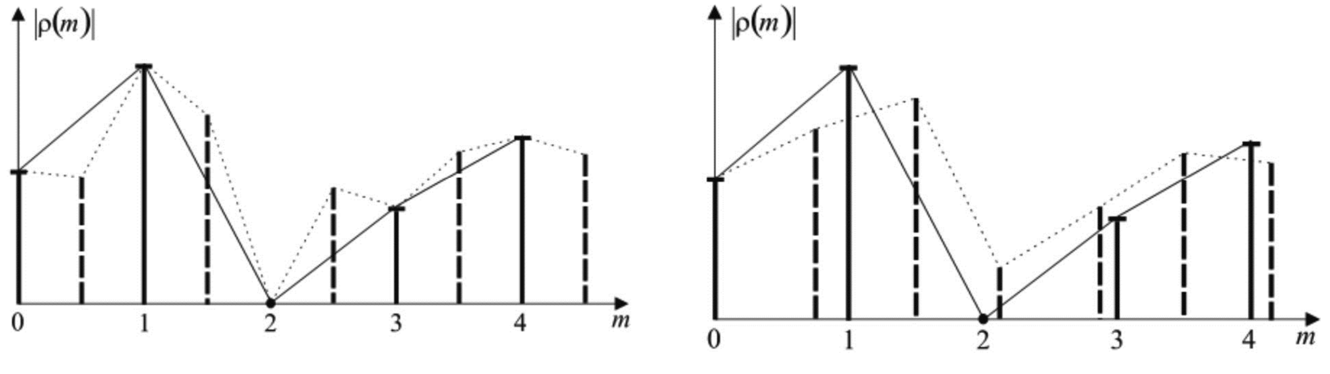


Рис. 3. Интерполяция спектра сигнала с размерностью N = 5 при дополнении нулями до размерности: а) M = 10, б) M = 7

мы КИХ такого фильтра равен 1,638. Тогда в соответствии с выражением (1) уровень шума на выходе фильтра будет определяться соотношением: $\sigma^2_{вых} = 3{,}276\sigma^2_{вх}$.

Импульсная характеристика инверсного фильтра изменяется в зависимости от количества n_0 добавляемых нулей в сигнал. При этом суммы отсчетов сигнала $\mathbf{s}_м$ и КИХ $\mathbf{\Lambda}$ фильтра независимо от количества n_0 добавляемых нулей в сигнал остаются постоянными. Для рассматриваемого примера:

$$\sum_{n=0}^{M-1}\lambda(n) = 0{,}9 - 0{,}561i\,,\quad \sum_{n=0}^{M-1}s_M(n) = 0{,}8 + 0{,}499i\,.$$

Кроме того, сумма отсчетов КИХ $\mathbf{\Lambda}$ фильтра равна величине обратной сумме отсчетов сигнала $\mathbf{s}_м$:

$$\sum_{n=0}^{M-1}\lambda(n) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{M-1}s_M(n)} = \frac{1}{0{,}8+0{,}499i} = 0{,}9 - 0{,}561i\,.$$

Квадрат нормы ИХ также зависит от количества добавляемых нулей в сигнал. На рис. 4 представлена полученная экспериментальным путем зависимость квадрат нормы КИХ инверсного фильтра от количества добавляемых в сигнал (4) нулей n_0.

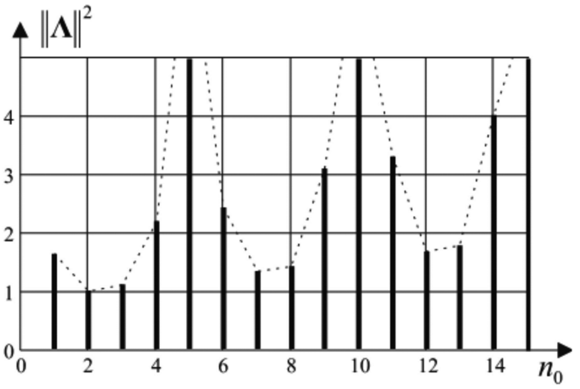


Рис. 4. Зависимость квадрат нормы КИХ инверсного фильтра от количества добавляемых нулей n_0

При n_0 = 5, 10, 15 и т.д. значение квадрат нормы КИХ инверсного фильтра стремится к бесконечности, т.к. размерность M модифицированного сигнала $\mathbf{s}_м$ (5) становится кратной размерности N сигнала $\mathbf{s}$ (4), и определитель Δ матрицы $\mathbf{S}_м$ становится равным нулю. Получено, что для сигнала (4) минимальный уровень флуктуационного шума на выходе инверсного фильтра достигается при добавлении в сигнал двух нулей. Уровень шума на выходе фильтра при этом будет определяться соотношением: $\sigma^2_{вых} = 2{,}014\sigma^2_{вх}$.

Рассмотрим пример разрешения сигналов инверсным фильтром с использованием метода интерполяции спектра. Пусть теперь входной сигнал $\mathbf{u}_{вх}$ образован путем суммирования сигнала $\mathbf{s}$ (4) и задержанной на 1 отсчет копии сигнала 4$\mathbf{s}$:

$\mathbf{u}_{вх}$ = {0,075 + 0,534i; 1,3 + 2,98i; 4,702 + 2,23i; 2,185 - 4,818i; -2,846 - 0,435i; -1,416 + 2,004i}.

Сигнал $\mathbf{s}$ (4) содержит в своем спектре равную нулю гармонику, поэтому КИХ фильтра будем формировать по модифицированному сигналу (6). Результат ациклической фильтрации сигнала с КИХ (7) (рис. 5, *а*):

$\mathbf{H}_{ац}$ = {-0,757 + 0,211i; -0,887 + 0,215i; 0,979 - 0,682i; 1,459 - 0,794i; 1; 4,124 - 0,032i; 0,757 - 0,211i; 0,887 - 0,215i; -0,979 + 0,682i; -1,459 + 0,794i}.

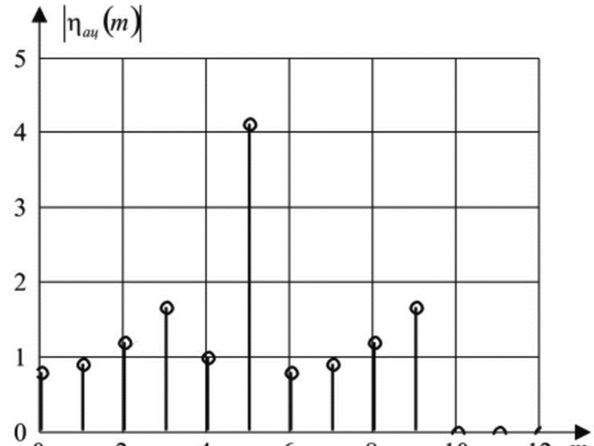
На рис. 5, *а* наблюдается отклик от мощного сигнала, а отклик от слабого сигнала маскируется боковыми лепестками. Вычислим с помощью алгоритма ЧКШС результат циклической фильтрации. Размерность сигнала $\mathbf{s}_м$ увеличилась по сравнению с сигналом $\mathbf{s}$, поэтому складываем отсчеты ациклической свертки с интервалом в M отсчетов. Получаем (рис. 5, *б*):

$\mathbf{H}_ц$ = {0; 0; 0; 0; 1; 4,124 - 0,032i}.

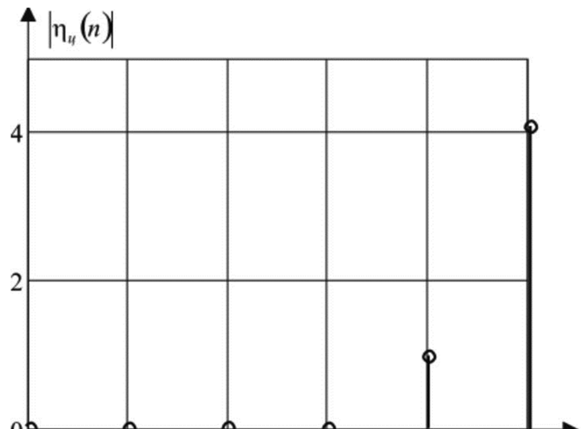
На рис. 5, *б* уже наблюдаются два отклика в моменты времени, определяемые выражением (3), t_1 = 0 и t_2 = 1, что соответствует условиям примера. Таким образом, циклическая обработка сигналов инверсным фильтром с КИХ, сформированной по модифицированному сигналу, позволяет разрешать сигналы.

Заключение

Рассмотрен подход к обеспечению разрешенного образа на выходе инверсного фильтра, заданного конечной импульсной характеристикой, при циклической обработке сигналов в условиях неопределенности, вызванной наличием нулевых компонент в спектре сигнала и воздействием флуктуационного шума на входе



а)



б)

Рис. 5. Результат фильтрации: а – ациклическая, б – циклическая фильтра. Показано, что циклическая обработка сигналов инверсным фильтром с КИХ позволяет получить на выходе нулевой уровень боковых лепестков. При этом уровень флуктуационного шума на выходе инверсного фильтра зависит от нормы импульсной характеристики. Для формирования отчетов циклической свертки входного сигнала и импульсной характеристики фильтра по результатам ациклической свертки предложено использовать алгоритм ЧКШС.

Предложен подход к устранению неопределенности, вызванной наличием нулевых компонент в спектре сигнала, основанный на изменении размерности сигнала путем добавления нулей. В спектре дополненного нулями сигнала образуются компоненты, находящиеся между компонентами спектра исходного, т.е. не дополненного нулями, сигнала. При этом квадрат нормы ИХ зависит от количества добавляемых нулей в сигнал. Предложен подход к минимизации уровня флуктуационного шума на выходе инверсного фильтра путем минимизации квадрата нормы ИХ фильтра подбором количества добавляемых нулей в сигнал

Рассмотрен пример разрешения сигналов инверсным фильтром с использованием метода интерполяции спектра. Показано, что циклическая обработка сигналов инверсным фильтром с КИХ, сформированной по модифицированному сигналу, позволяет разрешать сигналы.

Литература

1. Василенко Г.И. Голографическое опознавание образов. – М.: Сов. радио, 1977.

2. Schneider M., Habets E.A.P. Iterative DFT-Domain Inverse Filter Optimization Using a Weighted Least-Squares Criterion // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. 2019. Vol. 27, № 12. Pp. 1957-1969.

3. Zhang Yo. et al. Super-resolution surface mapping for scanning radar: inverse filtering based on the fast iterative adaptive approach // IEEE transactions on geoscience and remote sensing. 2018. Vol. 56. №. 1. Pp. 127-144. DOI: 10.1109/TGRS.2017.2743263.

4. Mudukutore A.S., Chandrasekar V., Keeler R.J. Pul-se compression for weather radars // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1998. Vol. 36, № 1. Pp. 125-142.

5. Nelander A. Processing for continuous radar waveforms. 2004 International Waveform Diversity & Design Conference. Edinburgh, 2004. Pp. 1-5. DOI: 10.1109/IWDDC.2004.8317557.

6. Абраменков В.В., Васильченко О.В., Семченков С.М., Печенев Е.А. Инверсная фильтрация импульсных сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2017. № 4. С. 42-53.

7. Семченков С.М., Печенев Е.А. Способ повышения разрешающей способности за счет инверсной фильтрации импульсных сигналов // Радиопромышленность. 2017. № 3. С. 103-109.

8. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера. 2005.

9. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я.А. Фурмана. – М.: Физматлит, 2002.

10. Хафизов Р.Г., Охотников С.А. Линейная фильтрация непрерывных контуров изображений, заданных в комплекснозначном виде // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 3, – С. 408-416.

11. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы; Издание 4-е, 1977.

12. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.