

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕМА НА БАЗЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА ПО ЗАКОНУ МАКДОНАЛЬДА В КАНАЛЕ С ГАУССОВЫМ ШУМОМ

Вешкурцев Ю.М., д.т.н., профессор, президент Института радиоэлектроники, сервиса и диагностики, чл.-корреспондент Академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова, e-mail: yum1940@mail.ru.

IMMUNITY OF A MODEM BASED ON DYNAMIC CHAOS ACCORDING TO MACDONALD'S LAW IN A CHANNEL WITH GAUSSIAN NOISE

Veshkurtsev Y.M.

Digital technologies extend the limits of the use of mathematics in the development of new signal processing algorithms. It becomes possible to apply random quantities and even random processes and thus move to dynamic chaos. A modem for data transmission is considered by modulating a characteristic function of a signal with large-scale chaotic, instantaneous values of which are distributed according to Macdonald's law. The analysis of noise immunity of this modem in a channel with Gaussian noise other than «white» noise is supplemented. It has been found that the noise immunity of a modem depends on the mathematical expectation of noise in a complex manner. It can be increased by 10 dB at a fixed error probability or reduced to an error probability of 0,5 in the range of 40 dB signal-to-noise power ratios with a lower range limit of minus 10 dB.

Key words: dynamic chaos, Gaussian noise, characteristic function, Macdonald's law, modem, mathematical expectation, noise immunity, error probability, signal-to-noise ratio.

Ключевые слова: динамический хаос, гауссов шум, характеристическая функция, закон Макдональда, модем, математическое ожидание, помехоустойчивость, вероятность ошибок, отношение сигнал/шум.

Введение

Динамический хаос открывает большие возможности при разработке новых методов передачи, хранения и обработки информации [1, 2]. Поэтому он вызывает интерес к этому направлению исследований.

Модем на базе динамического хаоса с законом Макдональда описан в работах [3, 4]. Там же изучена его помехоустойчивость в канале с «белым» шумом, которая получилась настолько высокой, что ему не нашлось конкурентов среди известных в мире модемов. Однако совсем не обязательно, что в канале связи будет «белый» шум, математическое ожидание которого равно нулю. Шум может быть гауссов, но другой, а именно он может иметь e_{uu} – математическое ожидание. В этом случае помехоустойчивость модема изменится. Рассмотрим такой вариант работы модема подробно, при этом схема модема и описание её остаются прежними и опубликованы в работах [3, 4], поэтому они здесь не приведены. В дальнейшем для вычислений потребуется значение порога в демодуляторе, который ранее был равен $\Pi_{Ic} = 0,9$.

Помехоустойчивость модема в канале с гауссовым шумом

Перейдем к анализу помехоустойчивости демодулятора, который измеряет оценки характеристической функции. Пусть на входе демодулятора действует аддитивная смесь централизованного квазидетерминиро-

Цифровые технологии расширяют границы использования математики при разработке новых алгоритмов обработки сигналов. Возможным становится применять случайные величины и даже случайные процессы и, таким образом, перейти к динамическому хаосу. Рассмотрен модем для передачи данных путем модуляции характеристической функции сигнала с масштабной хаотичностью, мгновенные значения которого распределены по закону Макдональда. Дополнен анализ помехоустойчивости этого модема в канале с гауссовым шумом, отличным от «белого» шума. Установлено, что помехоустойчивость модема зависит от математического ожидания шума сложным образом. Она может повышаться на 10 дБ при фиксированной вероятности ошибок или понижаться до вероятности ошибок 0,5 в диапазоне отношений по мощности сигнал/шум 40 дБ с нижней границей диапазона минус 10 дБ.

ванного сигнала (динамического хаоса с законом Макдональда) и гауссова шума

$$z(t) = u(t) + n(t), \quad (1)$$

где сигнал $u(t) = a \times s(t) \sin(\omega_0 t + \eta)$ имеет распределение мгновенных значений по закону Макдональда [3]

$$W(x) = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{2\pi^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_c^2}\right) K_0\left(\frac{x^2}{4\sigma_c^2}\right), \quad (2)$$

и характеристическую функцию вида [3]

$$\Theta(V_m, t) = I_0\left(\frac{V_m^2 \sigma_c^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{V_m^2 \sigma_c^2}{4}\right); \quad (3)$$

а $n(t)$ – гауссов шум с характеристической функцией

$$\text{вида [4]} \quad \Theta(V_m) = \exp\left(-\frac{V_m^2 \sigma_{uu}^2}{2}\right) \exp(jV_m e_{uu}); \quad (4)$$

ω_0 – постоянная круговая частота сигнала; a – случайная величина с нормальным законом распределения

(амплитуда сигнала); η – случайная величина с равномерным законом распределения в пределах $-\pi \dots \pi$ (начальный угол сдвига фаз); $s(t)$ – телеграфный сигнал в виде последовательности логических «0» и логических «1»; V_m – параметр х.ф.; $I_0(\cdot)$ – функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка первого рода; $K_0(\cdot)$ – функция Макдональда; σ_c^2 – дисперсия сигнала; σ_{uu}^2 – дисперсия шума.

Представим функциональное преобразование в схеме демодулятора зависимостью $y = \cos(z)$. Вычислим математическое ожидание $m_1\{y\}$, поскольку характеристическая функция (х.ф.) это есть

$\Theta(V_m) = m_1\{\exp[jV_m z(t)]\} = A_z(V_m) + jB_z(V_m)$, математическое ожидание функции косинус для действительной части $A(V_m)$ и функции синус для мнимой части $B_z(V_m)$. Получим при $V_m = 1$

$$m_1\{y\} = A_z(1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z)W(z - e_{uu})dz = I_0\left(\frac{1}{4}\sigma_c^2\right) \exp\left[-\left(\frac{\sigma_c^2 + 2\sigma_{uu}^2}{4}\right)\right] \cos(e_{uu}), \tag{5}$$

где $W(z - e_{uu})$ – плотность вероятности аддитивной смеси (1). Дисперсия сигнала $u(t)$ изменяется дискретно в зависимости от элементов телеграфного сигнала. Она принимает значение σ_0^2 при $s(t) = 0$ или значение σ_1^2 при $s(t) = 1$. Тогда при передаче логического «0» имеем $m_1\{y\}_0 = A_z(1, t) =$

$$= I_0\left(\frac{\sigma_0^2}{4}\right) \exp\left[-\left(\frac{\sigma_0^2 + 2\sigma_{uu}^2}{4}\right)\right] \cos(e_{uu}), \tag{6}$$

а при передаче логической «1» будет $m_1\{y\}_1 = A_z(1, t) =$

$$= I_0\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right) \exp\left[-\left(\frac{\sigma_1^2 + 2\sigma_{uu}^2}{4}\right)\right] \cos(e_{uu}). \tag{7}$$

Выполнив в выражениях (6, 7) следующие подстановки $\sigma_{uu}^2 = \sigma_0^2 / h_0^2$, $\sigma_{uu}^2 = \sigma_1^2 / h_1^2$, получим

$$A_z(1, t) = I_0\left(\frac{\sigma_0^2}{4}\right) \exp\left[-\sigma_0^2 \left(\frac{2 + h_0^2}{4h_0^2}\right)\right] \cos(\rho e_{uu}) \tag{8}$$

$$A_z(1, t) = I_0\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right) \exp\left[-\sigma_1^2 \left(\frac{2 + h_1^2}{4h_1^2}\right)\right] \cos(\rho e_{uu}) \tag{9}$$

где $h_0 = \sigma_0 / \sigma_{uu}$ – отношение сигнал/шум при приёме логического «0»; $h_1 = \sigma_1 / \sigma_{uu}$ – отношение сигнал/шум при приёме логической «1»; ρ – коэффициент; $A_z(1, t)$ – действительная часть х.ф. аддитивной смеси (1). Кстати, зависимость от времени функции $A_z(1, t)$ появилась за счет телеграфного сигнала. Демодулятор с некоторой погрешностью измеряет значение только действительной части характеристической функции, поэтому на пороговое устройство поступает оценка х.ф. вида $\hat{A}_z(1, t)$. Далее это обозначение записано простым символом $\hat{A}_z(1, t)$.

Результаты (8), (9) нуждаются в количественном анализе. В табл. 1, и табл. 2 приведены данные вычислений при $V_m = 1$, $\sigma_1 = 0,03$, $\sigma_0 = 1$, $\Pi_{1c} = 0,9$, $e_{uu} = 0,8$. При работе модема в канале с шумами невозможно знать разное отношение сигнал/шум на его входе при приёме логического «0» и логической «1», т.к. мощность шума в канале не зависит от телеграфного сигнала. В нашем примере дисперсии сигнала при передаче элементов телеграфного сигнала соотносятся между собой как $\sigma_0^2 / \sigma_1^2 = 1111,11$. В этой связи в канале с шумами отношение $h_0^2 = 1111,11h_1^2$ при постоянной мощности шума.

В табл. 2 все значения оценки $\hat{A}_z(1, t)$ меньше порога при любом отношении сигнал/шум независимо от коэффициента ρ . Значит, в канале с гауссовым шумом ошибок при приёме логического «0» у демодулятора нет

Таблица 1

Порог Π_{1c}	0,9						Коэффициент ρ
	Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,444	0,663	0,7	0,7	0,7	
Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,59	0,88	0,92	0,92	0,92	0,92	0,5
Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,635	0,948	0,997	0,997	0,997	0,997	0,1
Отношение h_1^2	0,001	0,01	0,1	1,0	10	100	

Таблица 2

Порог Π_{1c}	0,9						Коэффициент ρ
	Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,352	0,527	0,549	0,552	0,552	
Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,465	0,697	0,726	0,73	0,73	0,73	0,5
Оценка $\hat{A}_z(1, t)$	0,503	0,755	0,785	0,789	0,789	0,789	0,1
Отношение h_0^2	1,11111	11,1111	111,111	1111,11	11111,1	111111	

в диапазоне отношений по мощности сигнал/шум 50 дБ. В табл. 1 значения оценки $\hat{A}_z(1,t)$ превышают порог при отношении по мощности сигнал/шум от 0,1 до 100, когда коэффициент $0 \leq \rho \leq 0,5$. Здесь в канале с гауссовым шумом ошибок при приёме логической «1» у демодулятора нет. При $h_1^2 < 0,1$ и значении коэффициента $\rho = 0,5$ у демодулятора появляются ошибки в канале с гауссовым шумом при приёме логической «1». Таким образом, при значении $\rho = 0,5$ диапазон отношений сигнал/шум составляет всего 30 дБ. Если значение $\rho \leq 0,1$, то диапазон отношений сигнал/шум увеличивается до 40 дБ. Выходит, математическое ожидание гауссова шума влияет на помехоустойчивость модема.

Окончательные выводы о помехоустойчивости модема сделаем по данным табл. 1 (принятые обозначения h_0^2, h_1^2 упрощены далее до вида h^2). Её анализ показывает, что помехоустойчивость модема будет предельной в диапазоне отношений по мощности сигнал/шум от 0,01 до 100, т.е. в диапазоне 40 дБ, если коэффициент $\rho \leq 0,1$. Это свидетельствует о том, что оператор математического ожидания в математической модели х.ф. надежно защищает сигнал от гауссовых шумов. Модемы нового поколения без ошибок могут работать при отношении сигнал/шум меньше единицы.

Перейдем от качественного анализа данных к количественной оценке помехоустойчивости модема. Введем следующие обозначения: P_0 – вероятность ошибок при приёме логического «0»; P_1 – вероятность ошибок при приёме логической «1»; $P = 1/2(P_0 + P_1)$ – суммарная вероятность ошибок устройства.

Количественная оценка помехоустойчивости модема

Демодулятор измеряет значение действительной части х.ф. с некоторой погрешностью. И, как результат этого, получаем $\hat{A}_z(1,t)$ – оценку действительной части х.ф. Оценка х.ф. – это случайная величина, имеющая свои свойства и закон распределения. Дословно повторив к условиям нашей задачи методику вычисления ошибок в демодуляторе, содержащую интеграл ошибок и подробно записанную в работе [2], получим данные, включенные в табл. 3. Кривая 1 получена при значении $\rho = 0,5$, кривая 2 – при значении $\rho = 0,1$, кривая 3 – при значении $\rho = 0$. Для сравнения там же из работы [5, с.473] приведена вероятность ошибок идеальной фазовой модуляции (кривая 4).

Для визуализации зависимости вероятности ошибок демодулятора от отношения по мощности сигнал/шум представлены графики на рисунке. Рисунок показывает, что кривые 1, 2, 3 значительно отличаются между со-

бой. Это значит, что $e_{ш}$ – математическое ожидание гауссова шума оказывает сильное влияние на помехоустойчивость рассматриваемого демодулятора. Исходное состояние помехоустойчивости характеризует кривая 3, полученная при работе модема в канале с «белым» шумом, когда $e_{ш} = 0$. И совсем другое дело, когда произведение $\rho \times e_{ш} = 0,08$, которое рассчитано с коэффициентом $\rho = 0,1$. В этом случае помехоустойчивость модема в канале с гауссовым шумом (кривая 2) повышается почти на 10 дБ по сравнению с его помехоустойчивостью (кривая 3) в канале с «белым» шумом (если сравнение выполнить на уровне вероятности ошибки значением $P = 10^{-12}$). Правда, при этом кривая 2 после $h^2 = 0,1$ поднимается вверх на три порядка, а вероятность ошибок увеличивается до значения $P = 10^{-42}$. Вероятность $P = 10^{-42}$ (кривая 2) больше вероятности $P = 10^{-45}$ (кривая 3), однако, на данном этапе исследований эти два значения вероятности для нас эквивалентны. Можно даже считать, что небольшое математическое ожидание гауссова шума ($e_{ш} \leq 0,1$) положительно влияет на работу модема.

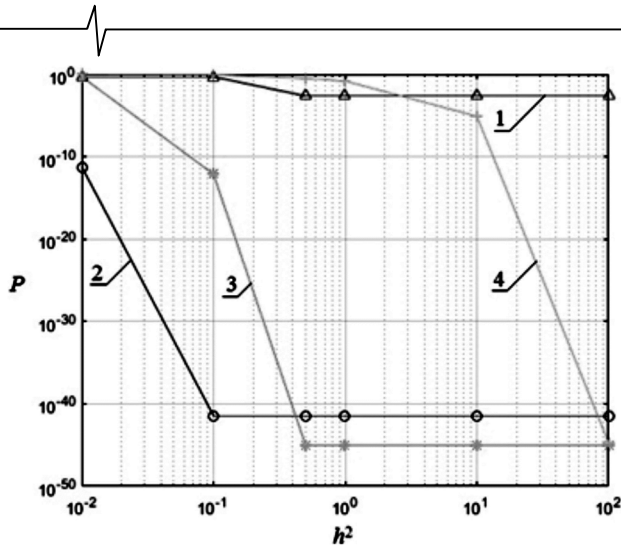
Ситуация изменяется при значении произведения $\rho \times e_{ш} = 0,4$. Кривая 3 резко поднимается вверх и располагается параллельно оси абсцисс на уровне вероятности $P = 10^{-3}$ (кривая 1). При этом говорить о предельной помехоустойчивости модема не приходится. Здесь нужны дополнительные мероприятия, чтобы компенсировать $e_{ш}$. Рекомендации по устранению влияния $e_{ш}$ на помехоустойчивость модема сформулированы ранее и опубликованы в работе [6].

В итоге, поведение модема в канале с гауссовым шумом неоднозначно. Его помехоустойчивость вначале повышается, когда математическое ожидание гауссова шума не превосходит значение 0,1, а потом заметно падает, если математическое ожидание шума достигает величины 0,2 и продолжает расти. При коэффициенте $\rho = 1$ и значении $e_{ш} = 0,4$ получаем кривую 1. И это ещё не конец. Дальнейшее увеличение математического ожидания шума до значения 0,8 делает кривую 1 прямой линией, проходящей параллельно оси абсцисс на уровне вероятности ошибки $P = 0,5$.

Сравнение помехоустойчивости новой модели модема с помехоустойчивостью известного устройства, в котором применена идеальная ФМ (кривая 4), показывает его превосходство, как минимум, на 30 дБ при вероятности ошибок $P = 10^{-12}$, если значение $e_{ш} \leq 0,1$. При $e_{ш} > 0,2$ превосходство исчезает.

Таблица 3

Кривая 1	0,5	0,5	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
Кривая 2	$5,7 \cdot 10^{-12}$	$3,8 \cdot 10^{-42}$	$3,8 \cdot 10^{-42}$	$3,8 \cdot 10^{-42}$	$3,8 \cdot 10^{-42}$	$3,8 \cdot 10^{-42}$
Кривая 3	0,5	$7,5 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-45}$	$1 \cdot 10^{-45}$	$1 \cdot 10^{-45}$	$1 \cdot 10^{-45}$
Кривая 4	1	0,9	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-45}$
Отношение сигнал/шум	0,01	0,1	0,5	1,0	10	100



Зависимости вероятности ошибок демодулятора от отношения по мощности сигнал/шум

Заключение

Исследована помехоустойчивость модема на базе динамического хаоса по закону Макдональда в канале с гауссовым шумом, имеющим отличное от нуля математическое ожидание. Установлено, что помехоустойчивость модема сложным образом зависит от значения математического ожидания шума. Первоначально помехоустойчивость модема повышается на 10 дБ, если $0 < e_{ш} \leq 0,1$ и $P \leq 10^{-12}$. При дальнейшем увеличении математического ожидания шума помехоустойчивость модема падает, а вероятность ошибок $P = 10^{-3}$, когда $e_{ш} = 0,4$. И наконец, помехоустойчивость модема становится настолько низкой, что вероятность ошибок

$P = 0,5$ при значении $e_{ш} = 0,8$ во всем диапазоне отношений сигнал/шум. Однозначно рекомендуем компенсировать математическое ожидание шума в проводном канале связи, поскольку в радиоканале эта процедура выполняется автоматически антенно-фидерной системой радиолинии.

Литература

1. Гуляев Ю.В. Информационные технологии на основе динамического хаоса для передачи, обработки, хранения и защиты информации / Ю.В. Гуляев, Р.В. Беляев, Г.Н. Воронцов, Н.Н. Золотин, В.И. Калинин, Э.Е. Кальянов, В.В. Кислов, В.Я. Кислов, В.В. Колесов, Е.А. Мясин, Е.П. Чигин // Радиотехника. Наносистемы. Информационные технологии, 2018. Т.10. № 2. – С. 279-312.
2. Вешкурцев Ю.М. Помехоустойчивость модема при приёме сигнала с распределением мгновенных значений по закону Тихонова // Цифровая обработка сигналов, 2019. № 2. – С. 49-53.
3. Вешкурцев Ю.М. Помехоустойчивость и эффективность нового метода модуляции / Ю.М. Вешкурцев // международный научный журнал «Наука и Мир». 2019. № 3 (67). Том 2. – С. 32-45.
4. Вешкурцев Ю.М. Метод модуляции и демодуляции сигнала // Электросвязь, 2019. № 5. – С. 66-69.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – Москва: Сов. радио, 1966. – 678 с.
6. Вешкурцев Ю.М. Исследование помехоустойчивости модема цифровых систем с амплитудной манипуляцией при работе в канале с гауссовым шумом / Ю.М. Вешкурцев // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, 2019. № 9. – С. 21-26.