

ДИСКРЕТНАЯ СТРУКТУРА РАСПОЛОЖЕНИЯ В Z-ПЛОСКОСТИ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ СЛОВА

Лесников В.А., к.т.н., доцент кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: vladislav.lesnikov.ru@jeee.org;

Наумович Т.В., ст. преподаватель кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: ntv_new@mail.ru;

Частиков А.В., д.т.н., профессор кафедры радиоэлектронных средств Вятского государственного университета, e-mail: alchast@mail.ru.

THE DISCRETE STRUCTURE OF THE ZEROS AND POLES LOCATION IN THE Z-PLANE OF THE RECURSIVE DIGITAL FILTERS WITH A FINITE WORD LENGTH

Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V.

It is known that the resolved positions of the zeros and poles of the second order IIR digital filters with finite wordlength form a discrete structure called in this paper the topography of a discretized z-plane. In the publications of the authors, the z-plane topography was described in detail. This article is devoted to the definition of equations describing plane algebraic curves on which the allowed positions for the zeros and poles of filters of arbitrary order are located.

Key words: IIR digital filters, resolved positions of the zeros and poles, finite wordlength, discretized z-plane, plane algebraic curves.

Ключевые слова: рекурсивные цифровые фильтры, возможные местоположения полюсов и нулей, сетка допустимых положений полюсов и нулей, квантование положений полюсов, плоские алгебраические кривые.

Введение

Несмотря на то, что теория проектирования рекурсивных цифровых фильтров разрабатывалась в течение длительного времени, трудности, сопровождающие процесс практической разработки в случае строгих требований к характеристикам, оказываются настолько сложными, что разработчикам приходится отказываться от рекурсивных фильтров в пользу нерекурсивных. Преодоление проблем, возникающих в этом случае, требует глубокого изучения природы рекурсивных фильтров с конечной длиной слова.

Традиционный подход к синтезу рекурсивных цифровых фильтров [1, 2] включает этапы функционального и структурного синтеза. Функциональный синтез включает вычисление нулей и полюсов передаточной функции без учета конечной длины разрядной сетки. Конечная разрядность коэффициентов фильтра учитывается только на этапе структурного синтеза. Поэтому результаты структурного синтеза искажают результаты функционального синтеза и, следовательно, ошибки вносятся в характеристики фильтра. Учет этих обстоятельств усложняет процедуры, необходимые для удовлетворения требований к характеристикам фильтра.

В наших публикациях [3, 4] мы разрабатываем новый подход к синтезу рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова. Этот подход включает требование учитывать длину разрядной сетки уже на этапе

Известно, что разрешенные положения нулей и полюсов цифровых фильтров IIR второго порядка с конечной длиной слова образуют дискретную структуру, называемую в этой статье топографией дискретизированной z-плоскости. В публикациях авторов топография z-плоскости была подробно описана. Данная статья посвящена определению уравнений, описывающих плоские алгебраические кривые, на которых расположены разрешенные позиции для нулей и полюсов фильтров произвольного порядка и полюсов фильтров произвольного порядка.

функционального синтеза. На этом этапе нули и полюса рассчитываются окончательно и не искажаются при структурном синтезе. На этапе структурного синтеза создается структура.

Теоретическая основа нашего подхода к функциональному синтезу основана на том факте, что корни многочленов числителя и знаменателя передаточной функции реализуемых на практике цифровых фильтров являются элементами множества алгебраических чисел [5, 6]. Это означает, что не каждая точка в z-плоскости может быть нулем или полюсом цифрового фильтра с конечной длиной слова. Разрешенные позиции нулей и полюсов образуют в z-плоскости дискретную структуру, которую мы называем топографией.

Для полюсов цифровых фильтров второго порядка это давно известно [7-9]. Эта топография детально изучена в [10, 11]. Долгое время не удавалось распространить эту теорию на рекурсивные фильтры более высоких порядков. Только недавно удалось получить результаты для фильтров третьего [12, 15] и четвертого [13] порядка.

В этой статье предлагается метод, который позволяет описать топографию дискретизированной z-плоскости для алгебраических чисел произвольной степени.

Сведения из теории алгебраических чисел

Известно [18, 19], что корни $z_{n,i}$ полинома

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n c_{n,i} z^{n-i} \tag{1}$$

с вещественными рациональными коэффициентами

$$c_{n,i} \in \mathbb{Q} \tag{2}$$

являются элементами множества комплексных алгебраических чисел

$$z_{n,i} \in A_n \subset \mathbb{A}, \tag{3}$$

где n степень алгебраических чисел.

Очевидно, что коэффициенты практически реализованных цифровых фильтров имеют конечную разрядность и, следовательно, являются рациональными числами. Коэффициенты $b_{n,i}$ и $a_{n,i}$ передаточной функции

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_{n,i} z^{n-i}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_{n,i} z^{n-i}}, \tag{4}$$

в общем случае представляют собой сумму произведений определенных коэффициентов цифровых фильтров [16, 17] и, следовательно, также являются рациональными числами. Отсюда следует, что как корни полинома числителя передаточной функции (нули), так и корни полинома знаменателя (полюсы) являются алгебраическими числами.

Разрешенные положения нулей и полюсов фильтров с конечной длиной слова формируют топографию z-плоскости, дискретизированную из-за квантования коэффициентов передаточной функции. Топография зависит от степени алгебраических чисел и разрядности дробной части коэффициентов передаточной функции [6, 11].

Топография алгебраических чисел второй степени

Определим геометрическое место комплексно сопряженных корней

$$z_{2,1} = z_{2,2}^* \tag{5}$$

полинома

$$P_2(z) = z^2 + c_{2,1}z + c_{2,2} = (z - z_{2,1})(z - z_{2,2}). \tag{6}$$

Очевидно, что

$$z_{2,1(2)} = \text{Re } z_{2,1} \pm j \text{Im } z_{2,1} = -0,5c_{2,1} \pm \sqrt{c_{2,2} - 0,25c_{2,1}^2}, \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} z_{2,1(2)} - x_c &= \text{Re } z_{2,1} - x_c \pm j \text{Im } z_{2,1} = \\ &= -0,5c_{2,1} - x_c \pm \sqrt{c_{2,2} - 0,25c_{2,1}^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $x_c \in \mathbb{R}$ любое вещественное число. Полагая, что

$$\begin{cases} x = \text{Re } z_{2,1} = \text{Re } z_{2,2}, \\ y = \text{Im } z_{2,1} = -\text{Im } z_{2,2}, \end{cases} \tag{9}$$

из (8) получим

$$(x - x_c)^2 + y^2 = c_{2,2} + x_c^2 + c_{2,1}x_c. \tag{10}$$

Это уравнения систем концентрических окружностей на которых располагаются комплексно сопряженные корни полинома $P_2(z)$ (На рис. 1 изображен только первый квадрант z-плоскости. Радиусы окружностей и позиции корней на них зависят от произвольных центров x_c и

разрядности дробной части коэффициентов $c_{2,i}$) Заметим, что кривые, на которых расположены все возможные корни полиномов второй степени, являются плоскими алгебраическими кривыми [20] второй степени – кониками. При этом корни уравнений находятся на пересечении концентрических окружностей с прямыми линиями, параллельными оси ординат – плоскими алгебраическими кривыми первой степени.

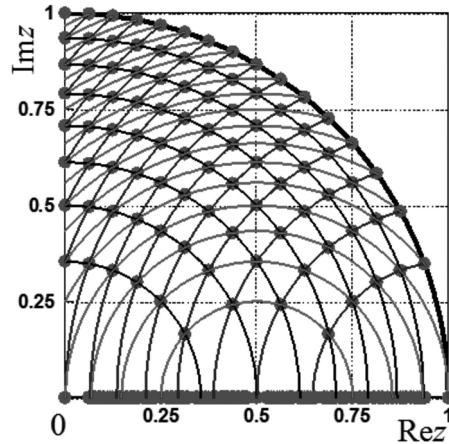


Рис. 1. Системы концентрических окружностей с различными центрами x_c для алгебраических чисел второй степени

Топография алгебраических чисел более высоких степеней

Предположим, что

$$z_{n,n} = z_{n,n-1}^* = \text{Re } z_{n,n} + j \text{Im } z_{n,n} = x + jy \tag{11}$$

– комплексно сопряженные корни полинома

$$P_n = \sum_{i=0}^n c_{n,i} z^{n-i}, \tag{12}$$

где $c_{n,0} = 1$.

Применяя формулы Виеты, получим выражения для коэффициентов в следующем виде

$$\begin{aligned} c_{n,1} &= -((z_{n,n} + z_{n,n-1}) + (z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1})) = \\ &= -(2x + (z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,2} &= z_{n,n}z_{n,n-1} + (z_{n,n} + z_{n,n-1})(z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1}) = \\ &= (x^2 + y^2) - 2x(z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,3} &= - \left(\begin{aligned} &z_{n,n}z_{n,n-1}(z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1}) + \\ &+(z_{n,n} + z_{n,n-1})(z_{n,n-2}z_{n,n-3} + \dots + z_{n,2}z_{n,1}) + \\ &+(z_{n,n-2}z_{n,n-3}z_{n,n-4} + \dots + z_{n,3}z_{n,2}z_{n,1}) \end{aligned} \right) = \\ &= - \left(\begin{aligned} &(x^2 + y^2)(z_{n,n-2} + z_{n,n-3} + \dots + z_{n,1}) + \\ &+ 2x(z_{n,n-2}z_{n,n-3} + \dots + z_{n,2}z_{n,1}) + \\ &+(z_{n,n-2}z_{n,n-3}z_{n,n-4} + \dots + z_{n,3}z_{n,2}z_{n,1}) \end{aligned} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,n} &= (-1)^n (z_{n,n}z_{n,n-1})(z_{n,n-2}z_{n,n-3}z_{n,n-4} \dots z_{n,3}z_{n,2}z_{n,1}) = \\ &= (-1)^n (x^2 + y^2)(z_{n,n-2}z_{n,n-3}z_{n,n-4} \dots z_{n,3}z_{n,2}z_{n,1}). \end{aligned}$$

Полагаем, что $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n-2}$ – корни полинома

$$P_{n-2}(z) = \sum_{i=0}^{n-2} c_{n-2,i} z^{n-2-i}, \tag{14}$$

где $c_{n-2,0} = 1$.

Применяя формулы Виеты для коэффициентов $P_{n-2}(z)$, преобразуем (13) следующим образом [14]:

$$\begin{cases} c_{n,1} = & -2x & +c_{n-2,1}, \\ c_{n,2} = & (x^2 + y^2) & -2xc_{n-2,1} & +c_{n-2,2}, \\ c_{n,3} = & (x^2 + y^2)c_{n-2,1} & -2xc_{n-2,2} & +c_{n-2,3}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,i} = & (x^2 + y^2)c_{n-2,i-2} & -2xc_{n-2,i-1} & +c_{n-2,i}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,n-2} = & (x^2 + y^2)c_{n-2,n-4} & -2xc_{n-2,n-3} & +c_{n-2,n-2}, \\ c_{n,n-1} = & (x^2 + y^2)c_{n-2,n-3} & -2xc_{n-2,n-2}, \\ c_{n,n} = & (x^2 + y^2)c_{n-2,n-2}. \end{cases} \quad (15)$$

Мы будем рассматривать (15) как систему уравнений, из которой необходимо получить функцию $y^2(x)$. Параметры этой функции должны быть коэффициентами полинома $P_n(z)$, и коэффициенты полинома $P_{n-2}(z)$ должны быть исключены. Поэтому (15) должна быть решена относительно y и коэффициентов $c_{n-2,1}, c_{n-2,2}, \dots, c_{n-2,n-2}$. Чтобы число уравнений было равно числу неизвестных величин, будем считать, что один из коэффициентов $c_{n,i}$ неизвестен.

Таким образом, из (15) должны быть получены следующие функции

$$y^2 = y_{n,i}^2(x | c_{n,i}). \quad (16)$$

Множество c_i определено как множество коэффициентов полинома $P_n(z)$, из которого исключены коэффициенты $c_{n,i}$. Учитывая значения квантованных коэффициентов $c_{n,i}$, мы получаем семейство кривых, на которых расположены допустимые значения корней многочлена P . Любая кривая (16) является геометрическим местом всех разрешенных корней. Для решения уравнений использованы возможно-

сти системы компьютерной алгебры Maple компании MapleSoft для выполнения символьных вычислений.

Топография алгебраических чисел третьей степени

Для полиномов $P_3(z)$ (15) преобразуется в

$$\begin{cases} c_{3,1} = & -2x & +c_{1,1}, \\ c_{3,2} = & (x^2 + y^2) & -2xc_{1,1}, \\ c_{3,3} = & (x^2 + y^2)c_{1,1}. \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) получаем решение

$$y_{3,1}^2(x | c_{3,1}) : \{y^2 = 0, 5c_{3,2} \pm 0,5\sqrt{c_{3,2}^2 + 8c_{3,3}x - x^2}\}, \quad (18)$$

$$y_{3,2}^2(x | c_{3,2}) : \left\{y^2 = -\frac{2x^3 + c_{3,1}x^2 - c_{3,3}}{c_{3,1} + 2x}\right\}, \quad (19)$$

$$y_{3,3}^2(x | c_{3,3}) : \{y^2 = 3x^2 + 2c_{3,1}x + c_{3,2}\}. \quad (20)$$

Простое преобразование (18)-(19) приводит к уравнениям:

$$Y_{3,1}(x | c_{3,1}) : \{(x^2 + y^2)^2 - c_{3,2}(x^2 + y^2) - 2c_{3,3}x = 0\}, \quad (21)$$

$$Y_{3,2}(x | c_{3,2}) : \{2x^3 + 2xy^2 + c_{3,1}(x^2 + y^2) - c_{3,3} = 0\}, \quad (22)$$

$$Y_{3,3}(x | c_{3,3}) : \{y^2 - 3x^2 - 2c_{3,1}x - c_{3,2} = 0\}. \quad (23)$$

Уравнения $Y_{3,i}(x | c_{3,i})$ ($i = 1, 2, 3$) описывают плоские алгебраические кривые четвертой (quartics, кватики), третьей (cubics, кубики) и второй (conics, коники) степени соответственно. Каждое из этих уравнений зависит от двух параметров. Для наглядности мы изобразим кривую $Y_i(x | c_{3,i})$ таким образом, чтобы каждое изображение соответствовало сечению пространства коэффициентов плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей. В этом случае мы получаем семейство кривых, определяемых одним параметром (рис. 2).

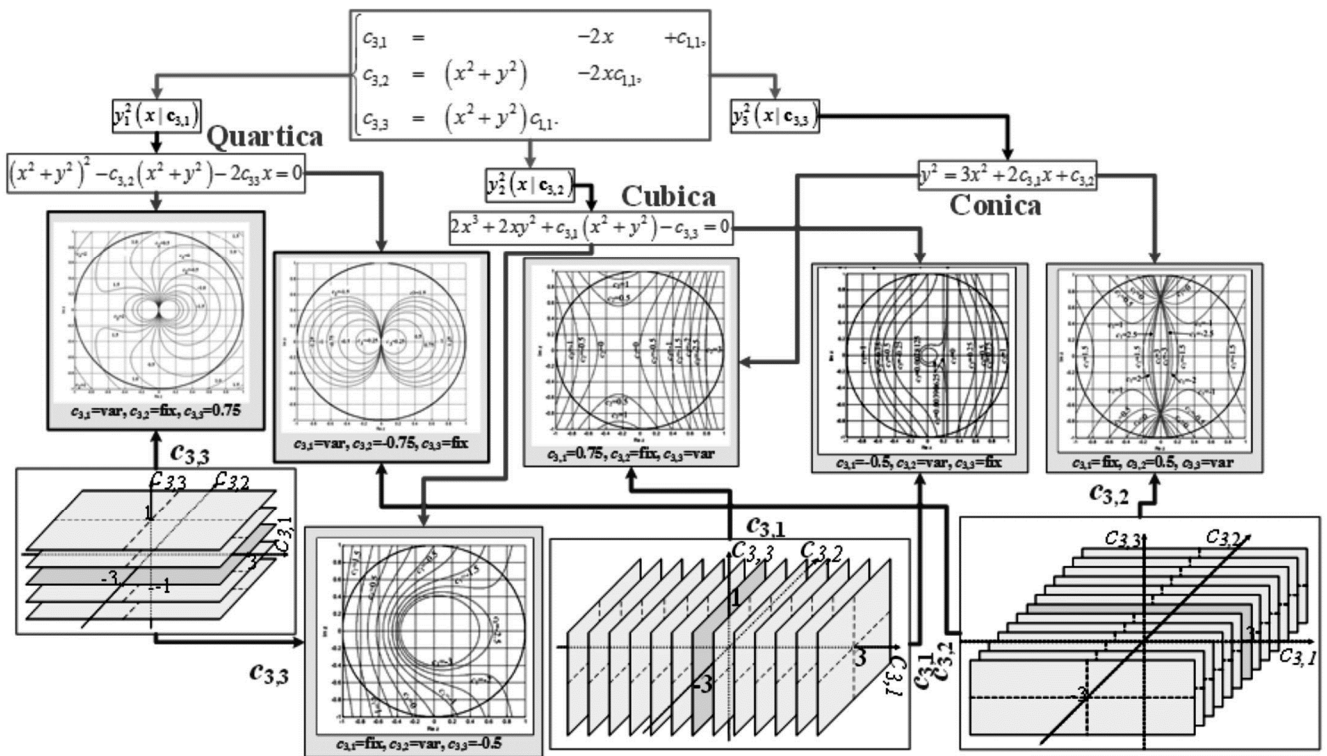


Рис. 2. Вычисление геометрического места алгебраических чисел третьей степени различными способами на разных сечениях пространства полиномиальных коэффициентов

Топография алгебраических чисел четвертой степени

Для полинома $P_4(z)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{4,1} = & -2x & +c_{2,1}, \\ c_{4,2} = & (x^2 + y^2) & -2xc_{2,1} + c_{2,2}, \\ c_{4,3} = & (x^2 + y^2)c_{2,1} & -2xc_{2,2}, \\ c_{4,4} = & (x^2 + y^2)c_{2,2}. \end{cases} \quad (24)$$

Решение для $y_{4,1}^2(x | c_{1,1})$ получаем в виде:

$$\widehat{Y}_1(x | c_{4,1}) : \quad (25)$$

$$\left\{ Y = \frac{c_{4,4}}{\text{RootOf}(X^2Z^3 + (-Xc_{4,3} - c_{4,4})Z^2 + c_{4,2}c_{4,4}Z - c_{4,4}^2)} \right\},$$

где

$$\begin{cases} X = -2x, \\ Y = x^2 + y^2, \end{cases} \quad (26)$$

Функция Maple RootOf является плейсхолдером для представления всех корней уравнения. В этом случае RootOf(F(Z)) описывает корни уравнения

$$F(Z) = 0. \quad (27)$$

Из уравнения (24) следует, что

$$Z = c_{4,4} / Y \quad (28)$$

является корнем уравнения, которое описывает желаемую кривую. После простых преобразований получаем

$$Y_{4,1}(x | c_{4,1}) : \{-(x^2 + y^2)^3 + (x^2 + y^2)^2 c_{4,2} + (x^2 + y^2)(2x - c_{4,4}) + 4x^2 c_{4,4} = 0\}. \quad (29)$$

Промежуточное представление остальных уравнений:

$$\widehat{Y}_{4,2}(x | c_{4,2}) : \{Y = \text{RootOf}((-c_{41} + X) \times \times Z^2 + c_{43}Z - c_{44}X)\}, \quad (30)$$

$$\widehat{Y}_{4,3}(x | c_{4,3}) : \{Y = X^2 - Xc_{41} - -\text{RootOf}(Z^2 + (-X^2 + Xc_{41} - c_{42})Z + c_{44}) + c_{42}\}, \quad (31)$$

$$\widehat{Y}_{4,4}(x | c_{4,4}) : \left\{ Y = \frac{X^3 - X^2c_{41} + Xc_{42} - c_{43}}{2X - c_{41}} \right\}. \quad (32)$$

Окончательная форма уравнений имеет вид:

$$Y_{4,2}(x | c_{4,2}) : \{(-c_{4,1} - 2x)(x^2 + y^2)^2 + c_{4,3}(x^2 + y^2) + 2c_{4,4}x = 0\}, \quad (33)$$

$$Y_{4,3}(x | c_{4,3}) : \{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(4x^2 + 2xc_{4,1} + c_{4,2}) + c_{4,4} = 0\}, \quad (34)$$

$$Y_{4,4}(x | c_{4,4}) : \{8x^3 + (x^2 + y^2) \times \times (-4x - c_{4,1}) + 4x^2c_{4,1} + 2xc_{4,2} + c_{4,3} = 0\}. \quad (35)$$

Полученные уравнения описывают плоские алгебраические кривые шестой (sextics, секстики), пятой (quintics, квинтики) степеней, а также кваттики и кубики.

Топография алгебраических чисел пятой, шестой и седьмой степеней

Данный раздел носит справочный характер. Здесь представлены выражения (16) для уравнений пятой, шестой и седьмой степеней. Для их вывода использована

на та же методика, что и для уравнений четвертой степени.

А. Алгебраические числа пятой степени

Геометрическим местом нулей и полюсов в этом случае являются плоские алгебраические кривые восьмой степени (octics, октики), седьмой степени (septics, септики), а также секстики, квинтики и кваттики:

$$Y_{5,1}(x | c_{5,1}) : \{(x^2 + y^2)^4 - c_{5,2}(x^2 + y^2)^3 + (-2c_{5,3}x + c_{5,4})(x^2 + y^2)^2 + (-4c_{5,4}x^2 + 4c_{5,5}x)(x^2 + y^2) - 8x^3c_{5,5} = 0\}, \quad (36)$$

$$Y_{5,2}(x | c_{5,2}) : \{(-2x - c_{5,1})(x^2 + y^2)^3 + c_{5,3}(x^2 + y^2)^2 + (2c_{5,4}x - c_{5,5})(x^2 + y^2) + 4x^2c_{5,5} = 0\}, \quad (37)$$

$$Y_{5,3}(x | c_{5,3}) : \{(x^2 + y^2)^3 + (-2c_{5,1}x - 4x^2 - c_{5,2}) \times \times (x^2 + y^2)^2 + c_{5,4}(x^2 + y^2) + 2xc_{5,5} = 0\}, \quad (38)$$

$$Y_{5,4}(x | c_{5,4}) : \{(-4x - c_{5,1})(x^2 + y^2)^2 + (4c_{5,1}x^2 + 8x^3 + 2c_{5,2}x + c_{5,3})(x^2 + y^2) - c_{5,5} = 0\}, \quad (39)$$

$$Y_{5,5}(x | c_{5,5}) : \{(x^2 + y^2)^2 + (-4c_{5,1}x - 12x^2 - c_{5,2}) \times \times (x^2 + y^2) + 16x^4 + 8x^3c_{5,1} + 4x^2c_{5,2} + 2xc_{5,3} + c_{5,4} = 0\}. \quad (40)$$

В. Алгебраические числа шестой степени

Ниже приведены уравнения плоских алгебраических кривых десятой степени (decics, десици), девятой степени (nonics, ноники), а также уравнения октик, септик, секстик и квинтик.

$$Y_{6,1}(x | c_{6,1}) : \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2)^5 - c_{6,2}(x^2 + y^2)^4 + \\ &+ (-2c_{6,3}x + c_{6,4})(x^2 + y^2)^3 + \\ &+ (-4c_{6,4}x^2 + 4c_{6,5}x - c_{6,6})(x^2 + y^2)^2 + \\ &+ (-8c_{6,5}x^3 + 12c_{6,6}x^2) \times \\ &\times (x^2 + y^2) - 16x^4c_{6,6} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

$$Y_{6,2}(x | c_{6,2}) : \{(-c_{6,1} - 2x)(x^2 + y^2)^4 + c_{6,3}(x^2 + y^2)^3 + (2c_{6,4}x - c_{6,5})(x^2 + y^2)^2 + (4c_{6,5}x^2 - 4c_{6,6}x)(x^2 + y^2) + 8x^3c_{6,6} = 0\}, \quad (42)$$

$$Y_{6,3}(x | c_{6,3}) : \{(x^2 + y^2)^4 + (-2c_{6,1}x - 4x^2 - c_{6,2}) \times \times (x^2 + y^2)^3 + c_{6,4}(x^2 + y^2)^2 + (2c_{6,5}x - c_{6,6})(x^2 + y^2) + 4x^2c_{6,6} = 0\}, \quad (43)$$

$$Y_{6,4}(x | c_{6,4}) : \{(-4x - c_{6,1})(x^2 + y^2)^3 + (4c_{6,1}x^2 + 8x^3 + 2c_{6,2}x + c_{6,3})(x^2 + y^2)^2 - c_{6,5}(x^2 + y^2) - 2xc_{6,6} = 0\}, \quad (44)$$

$$Y_{6,5}(x | c_{6,5}) : \{(x^2 + y^2)^3 + (-4c_{6,1}x - 12x^2 - c_{6,2})(x^2 + y^2)^2 + (8c_{6,1}x^3 + 16x^4 + 4c_{6,2}x^2 + 2c_{6,3}x + c_{6,4})(x^2 + y^2) - c_{6,6} = 0\}, \quad (45)$$

$$Y_{6,6}(x | c_{6,6}) : \left\{ \begin{aligned} &(-6x - c_{6,1})(x^2 + y^2)^2 + (12c_{6,1}x^2 + \\ &+ 32x^3 + 4c_{6,2}x + c_{6,3})(x^2 + y^2) - \\ &- 32x^5 - 16x^4c_{6,1} - 8x^3c_{6,2} - \\ &- 4x^2c_{6,3} - 2xc_{6,4} - c_{6,5} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (46)$$

С. Алгебраические числа седьмой степени

Степени плоских алгебраических кривых при этом от двенадцатой до шестой:

$$Y_{7,1}(x | c_{7,1}) : \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)^6 - c_{7,2}(x^2 + y^2)^5 + \\ + (-2c_{7,3}x + c_{7,4})(x^2 + y^2)^4 + \\ + (-4c_{7,4}x^2 + 4c_{7,5}x - c_{7,6})(x^2 + y^2)^3 + \\ + (-8c_{7,5}x^3 + 12c_{7,6}x^2 - 6c_{7,7}x) \times \\ \times (x^2 + y^2)^2 + (-16c_{7,6}x^4 + 32c_{7,7}x^3) \times \\ \times (x^2 + y^2) - 32x^5c_{7,7} = 0 \end{array} \right\} \times, \quad (47)$$

$$Y_{7,2}(x | c_{7,2}) : \left\{ \begin{array}{l} (-c_{7,1} - 2x)(x^2 + y^2)^5 + \\ + c_{7,3}(x^2 + y^2)^4 + (2c_{7,4}x - c_{7,5}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^3 + (4c_{7,5}x^2 - 4c_{7,6}x + c_{7,7}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^2 + (8c_{7,6}x^3 - 12c_{7,7}x^2) \times \\ \times (x^2 + y^2) + 16x^4c_{7,7} = 0 \end{array} \right\} \times, \quad (48)$$

$$Y_{7,3}(x | c_{7,3}) : \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)^5 + (-2c_{7,1}x - 4x^2 - c_{7,2}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^4 + c_{7,4}(x^2 + y^2)^3 + \\ + (2c_{7,5}x - c_{7,6})(x^2 + y^2)^2 + \\ + (4c_{7,6}x^2 - 4c_{7,7}x)(x^2 + y^2) + \\ + 8x^3c_{7,7} = 0 \end{array} \right\}, \quad (49)$$

$$Y_{7,4}(x | c_{7,4}) : \left\{ \begin{array}{l} (-4x - c_{7,1})(x^2 + y^2)^4 + \\ + (4c_{7,1}x^2 + 8x^3 + 2c_{7,2}x + c_{7,3}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^3 - c_{7,5}(x^2 + y^2)^2 + \\ + (-2c_{7,6}x + c_{7,7})(x^2 + y^2) - 4x^2c_{7,7} = 0 \end{array} \right\}, \quad (50)$$

$$Y_{7,5}(x | c_{7,5}) : \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)^4 + (-4c_{7,1}x - 12x^2 - c_{7,2}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^3 + (8c_{7,1}x^3 + 16x^4 + \\ + 4c_{7,2}x^2 + 2c_{7,3}x + c_{7,4})(x^2 + y^2)^2 - \\ - c_{7,6}(x^2 + y^2) - 2xc_{7,7} = 0 \end{array} \right\}, \quad (51)$$

$$Y_{7,6}(x | c_{7,6}) : \left\{ \begin{array}{l} (-6x - c_{7,1})(x^2 + y^2)^3 + (12c_{7,1}x^2 + \\ + 32x^3 + 4c_{7,2}x + c_{7,3})(x^2 + y^2)^2 + \\ - (16c_{7,1}x^4 + 32x^5 + 8c_{7,2}x^3 + 4c_{7,3}x^2 + \\ + 2c_{7,4}x + c_{7,5})(x^2 + y^2) + c_{7,7} = 0 \end{array} \right\}, \quad (52)$$

$$Y_{7,7}(x | c_{7,7}) : \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)^3 + (-6c_{7,1}x - 24x^2 - c_{7,2}) \times \\ \times (x^2 + y^2)^2 + (32c_{7,1}x^3 + 80x^4 + \\ + 12c_{7,2}x^2 + 4c_{7,3}x + c_{7,4})(x^2 + y^2) - \\ - 64x^6 - 32x^5c_{7,1} - 16x^4c_{7,2} - \\ - 8x^3c_{7,3} - 4x^2c_{7,4} - 2xc_{7,5} - c_{7,6} = 0 \end{array} \right\}. \quad (53)$$

Таким образом, уравнение $Y_{n,i}(x | c_{n,i})$, где $i = 1, 2, \dots, n$, описывает плоскую алгебраическую кривую, степень которой равна $2n-1-i$.

Заключение

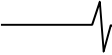
В данной работе получена система уравнений, решение которой позволяет получить уравнения плоских

алгебраических кривых, на которых расположены все возможные нули и полюсы цифровых рекурсивных фильтров произвольного порядка с конечной длиной слова. Решение полученной системы уравнений может осуществляться методами символьной математики. Эта статья использует возможности системы компьютерной алгебры Maple. Представлены уравнения плоских алгебраических кривых, полученные для фильтров до седьмого порядка. Результаты работы будут использованы при реализации разработанного авторами подхода к синтезу БИХ-фильтров с конечной длиной слова, в котором конечная длина слова учитывается при расчете нулей и полюсов еще до стадии структурного синтеза. В этом случае структурный синтез не искажает расчетные значения нулей и полюсов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00986.

Литература

1. DSP system toolbox™: Getting started guide. The MathWorks, Inc. – 2017.
2. Signal processing toolbox™: User's guide. The MathWorks, Inc. – 2017.
3. Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // 8th IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. – Pp. 282-285.
4. Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // 8th IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg, Russia. 17-20 Sept. 2010. – Pp. 156-159.
5. Lesnikov V., Naumovich T. Number-theoretic and algebraic aspects of structural synthesis of digital filters // Global Signal Processing (GSP 2004). The International Embedded Solutions Event (The Embedded Signal Processing Conference). Santa Clara, USA 2004. – Pp. 27-30.
6. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Number-theoretical analysis of the structures of classical IIR digital filters // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2018). Budva, Montenegro. 10-14 June 2018. – 4 p.
7. Weinstein C.J. Quantization effects in digital filters // Technical Report 468. Lincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, Massachusetts. 21 November 1969. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Quantization-Effects-in-Digital-Filters-Weinstein/0e52d6dbb14fb6c137527f7919e0bc380bd276f8>.
8. Hess W. Digitale filter: eine einführung. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. 1993. – 433 p.
9. Bomar B.W. Finite wordlength effects // Digital Signal Processing Handbook / Ed. V.K. Madisetti, D.B. Williams. Boca Raton: CRC Press LLC. 1999. – Chapter 3.
10. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Topography of z-plane which is discretized due to quantization of coefficients of digital biquad filters // 12th International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON 2016). Moscow, Russia. 12-14 May 2016. – 4 p.
11. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The sampling of the z-plane due to the quantization of the digital filter



coefficients // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2018), Budva, Montenegro. 10-14 June 2018. – 4 p.

12. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The topography of a third order IIR digital filter zeros and poles in the z-plane discretized due to the quantization of the direct form coefficients // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2019). Budva, Montenegro. 10-14 June 2019. – Pp. 374-377.

13. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. Topography of the z-plane discretized by quantizing the coefficients of the canonical form of recursive digital filter // Computer Vision in Advanced Control Systems – 6 / M. Favorskaya, L.C. Jain, Eds. В печати (будет опубликовано Springer в 2020 г.).

14. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. The discrete structure of the zeros and poles location in the z-plane of the arbitrary order IIR digital filters with a finite word length // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2019). Batumi, Georgia. 13-16 Sept. 2019.

15. Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В., Лекмцев К.В. Топография z-плоскости, дискретизирован-

ной вследствие квантования коэффициентов канонической формы рекурсивного цифрового фильтра // Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA-2019. 2019. – С. 142-145.

16. Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Синтез рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова: проблемы и их решения // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. М: ИППМ РАН. 2018. Выпуск 4. С. 89-97.

17. Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Synthesis of recursive digital filters with finite word length: problems and their solutions // Problems of Advanced Micro- and Nanoelectronic Systems Development, 2019, Issue III, Moscow, IPPM RAS. С. 46-53.

18. Hilbert D. The theory of algebraic number fields. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1998. 360 p.

19. Ireland K., Rosen M. A classical introduction to modern number theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1990. – 406 p.

20. Rovenski V. Modeling of curves and surfaces with MATLAB. New York-Dordrecht-Heidelberg-London: Springer Science+Business Media, LLC, 2010. – 452 p.