

УДК 621.372.54

АНАЛИЗ КВАНТОВАННЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ

Мингазин А.Т., к.т.н., в.н.с. РАДИС Лтд., e-mail: alexmin@radis.ru.

ANALYSIS OF QUANTIZED FIR FILTERS

Mingazin A.T.

The method of a variation of initial parameters is applied to the analysis of FIR filters with quantized coefficients. The description of controlled and initial parameters is given. Dependences of controlled parameters on initial parameters for continued and quantized coefficients of optimum low-pass filters are presented. The piecewise constant nature of the constructed curves is explained. The analysis of similar curves for direct structure narrowband and wideband filters at big and small relations of ripple levels of magnitude response in passband and stopband is carried out. Dependences of the maximum relative error of the magnitude response on the initial ratio of ripple levels for direct and cascade and also for direct and bound real filter structures are compared.

Key words: optimum FIR filters, quantized coefficients, variation of initial parameters, analysis of direct, cascade and bound real structures.

Ключевые слова: оптимальные КИХ-фильтры, квантованные коэффициенты, вариация исходных параметров, анализ прямой, каскадной и ограничивающей структуры.

Введение

Для анализа/синтеза КИХ-фильтров с квантованными коэффициентами (квантованных КИХ-фильтров) часто используют прямой метод, который благодаря своей наглядности и простоте нашел широкое распространение во многих публикациях и книгах по цифровой обработке сигналов. Действительно степень влияния квантования коэффициентов на изменение АЧХ фильтра оценивается, как правило, лишь для одного набора исходных параметров. При этом длина слова коэффициентов может быть заданной или подбирается итеративно для нахождения ее минимального значения без нарушения требований к АЧХ. Однако при использовании одного или даже нескольких наборов исходных параметров не всегда корректно судить о преимуществе той или иной аппроксимации АЧХ или структуры фильтра. С помощью вариации исходных параметров (ВИП) можно улучшить результаты прямого метода синтеза квантованных КИХ-фильтров и даже найти решения, сопоставимые с полученными методами вариации коэффициентов на дискретном множестве их значений [1-5]. Кроме того, построенные зависимости контролируемых параметров АЧХ фильтра от выбранного исходного параметра можно непосредственно использовать для анализа (ВИП-анализа) степени влияния квантования коэффициентов, подобно тому, как это было выполнено в [6] применительно к пяти структурам БИХ-фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра.

В данной статье ВИП-анализ применен к оптимальным КИХ-фильтрам нижних частот с симметричной импульсной характеристикой, синтезируемым на основе алгоритма Ремеза-Паркса-Мак-Клеллана (см., например, функцию `cemez (...)` в среде MATLAB). Дано описание контролируемых и исходных параметров. На

Метод вариации исходных параметров применен к анализу КИХ-фильтров с квантованными коэффициентами. Дано описание контролируемых и исходных параметров. Представлены зависимости контролируемых параметров от исходных для непрерывных и квантованных коэффициентов оптимальных фильтров нижних частот. Пояснен кусочно-постоянный характер построенных кривых. Проведен анализ подобных кривых для узкополосных и широкополосных фильтров прямой структуры при больших и малых отношениях уровней пульсаций АЧХ в полосе пропускания и задерживания. Выполнено сравнение зависимостей максимальной относительной ошибки АЧХ от исходного отношения уровней пульсаций для прямой и каскадной структуры, а также для прямой и ограничивающей структуры фильтров.

примере фильтров прямой структуры с непрерывными и квантованными коэффициентами представлены и обсуждены варианты построения зависимостей контролируемых параметров от исходных. Пояснен кусочно-постоянный характер построенных кривых. Проведен анализ подобных кривых для узкополосных и широкополосных КИХ-фильтров прямой структуры при больших и малых отношениях уровней пульсаций АЧХ в полосе пропускания и задерживания. Проиллюстрированы зависимости максимальной относительной ошибки АЧХ от исходного отношения уровней пульсаций для прямой и каскадной структуры, а также для прямой и ограничивающей структуры фильтров.

Контролируемые и исходные параметры АЧХ

Относительные ошибки АЧХ для БИХ- или КИХ-фильтров со стандартными требованиями должны удовлетворять следующим условиям

$$\begin{cases} e_p = \delta_p^\# / \delta_{p \max} \leq 1, \\ e_s = \delta_s^\# / \delta_{s \max} \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

или

$$e = \max(e_p, e_s) \leq 1, \quad (2)$$

где $\delta_p^\#$ и $\delta_s^\#$ – максимальные уровни пульсаций в номинальных полосах пропускания и задерживания АЧХ син-

тезирования фильтра, а $\delta_{p\max}$ и $\delta_{s\max}$ заданные их предельно-допустимые значения; полагается, что максимальный уровень АЧХ нормирован к единице.

Два других условия, эквивалентные (1), имеют вид

$$\begin{cases} \Delta a^\# = -20\lg(1 - \delta_p^\#) \leq \Delta a_{\max}, \\ a_0^\# = -20\lg\delta_s^\# \geq a_{0\min}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\Delta a^\#$ – неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания и $a_0^\#$ – минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания, а Δa_{\max} и $a_{0\min}$ заданные их предельно допустимые значения. Параметры в (3) выражены в децибелах. Максимальный уровень АЧХ нормирован к нулю децибел.

Порядок фильтра N , удовлетворяющий заданным требованиям, определяется по предельно допустимым параметрам АЧХ и номинальным граничным частотам f_{kn} . Обычно $k = 2$ или 4. Напомним, что для КИХ-фильтров, в отличие от классических БИХ-фильтров, точных аналитических соотношений для определения порядка не существует.

При фиксированном N контролируемые параметры, определяемые (1)-(3), зависят от исходных параметров, по которым рассчитывается фильтр. В общем случае это Δa , a_0 (или соответствующие δ_p , δ_s) и f_k – граничные частоты полос пропускания и задерживания. Расчет собственно фильтра может быть выполнен по любым значениям Δa , a_0 и f_k , принадлежащим определенной области допустимых исходных параметров. При этом рассчитанный фильтр будет удовлетворять условиям (1)-(3).

Зависимости контролируемых параметров

Хотя статья посвящена КИХ-фильтрам, в данном разделе уделим некоторое внимание и БИХ-фильтрам. Здесь и далее ограничимся рассмотрением только фильтров нижних частот. При выбранном порядке N для расчета БИХ-фильтров Золотарева-Кауэра или оптимальных КИХ-фильтров в качестве независимых можно взять любые три из четырех исходных параметров Δa , a_0 , f_1 и f_2 .

Положим $f_1 = f_{1n}$, $f_2 = f_{2n}$ и будем для БИХ-фильтров рассматривать зависимости контролируемых параметров (2) и (3) от исходной Δa или от вспомогательного

параметра c , введенного в [7], поясненного и использованного в [6]. Связь Δa и c определяется как

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\min} (\varepsilon_{1\max} / \varepsilon_{1\min})^c,$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{10^{\Delta a/10} - 1}$, а $\varepsilon_{1\min}$ и $\varepsilon_{1\max}$ соответствуют Δa_{\min} и Δa_{\max} .

Аналогично поступим и для оптимальных КИХ-фильтров, но вместо исходных Δa или c , используем отношение пульсаций в полосе пропускания и задерживания

$$r = \frac{\delta_p}{2\delta_{s\max}} = \frac{1}{2} \frac{1 - 10^{-\frac{\Delta a}{20}}}{10^{-\frac{a_{0\min}}{20}}}.$$

Для КИХ-фильтров на основе окна Кайзера в качестве исходного используем параметр окна β , который связан известными эмпирическими соотношениями с ослаблением a_0 .

Поясним зависимости максимальной ошибки (2) от выбранного исходного параметра для конкретных требований к АЧХ [6]:

$$f_{1n} = 0,04, f_{2n} = 0,08, \Delta a_{\max} = 0,8 \text{ дБ}, a_{0\min} = 80 \text{ дБ}. \quad (4)$$

Здесь и далее все приводимые частоты нормированы относительно частоты дискретизации.

Рассмотрим идеальные зависимости, соответствующие непрерывным коэффициентам обсуждаемых фильтров.

На рис. 1 а для фильтров Золотарева-Кауэра для трех значений порядка N , начиная с минимального, показаны зависимости максимальной ошибки АЧХ e (2) от исходной неравномерности Δa в диапазоне от Δa_{\min} до Δa_{\max} . Там же можно наблюдать пунктирную прямую допуска $e = 0$ дБ. При $\Delta a < \Delta a_{\min}$ требования (1)-(3) нарушаются. Значение Δa_{\min} можно вычислить аналитически. При желании диапазон вариации Δa можно увеличить. Согласно (1) и (2) каждая кривая ошибки e формируется из двух кривых, пересекающихся в точке минимума $e = e_p = e_s$ в (2). Слева от этой точки $e = e_s > e_p$, а справа – $e = e_p > e_s$. Как видим, с увеличением N существенно уменьшается минимум ошибки e . При этом диапазон вариации Δa увеличивается, за счет уменьшения Δa_{\min} . Любая точка на представленных кривых соответствует допустимой АЧХ с $e \leq 0$ дБ.

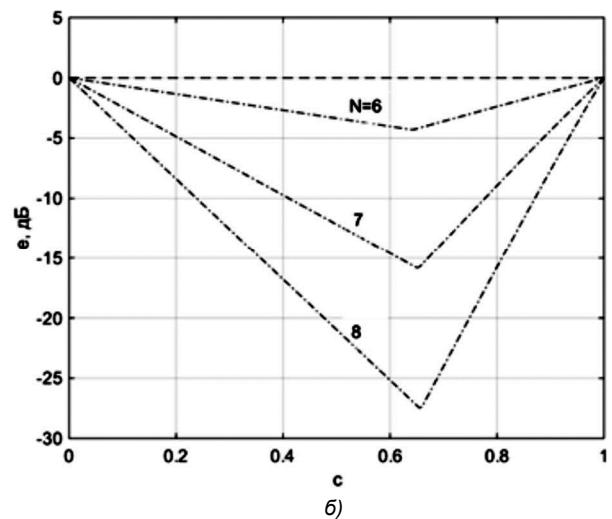
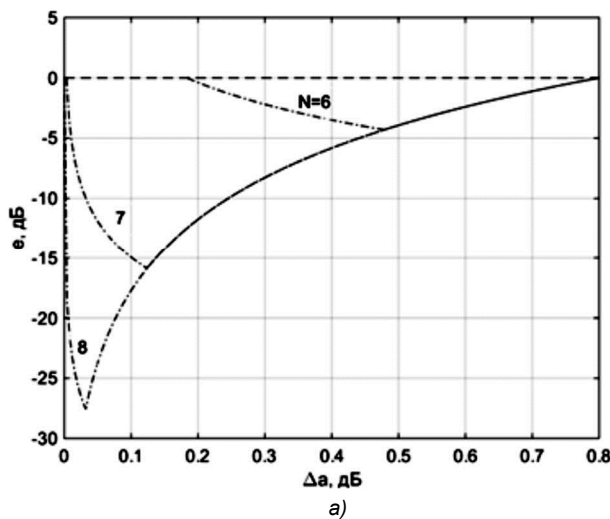


Рис. 1. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от исходной неравномерности Δa (а) и от вспомогательного параметра c (б) для БИХ-фильтров Золотарева-Кауэра

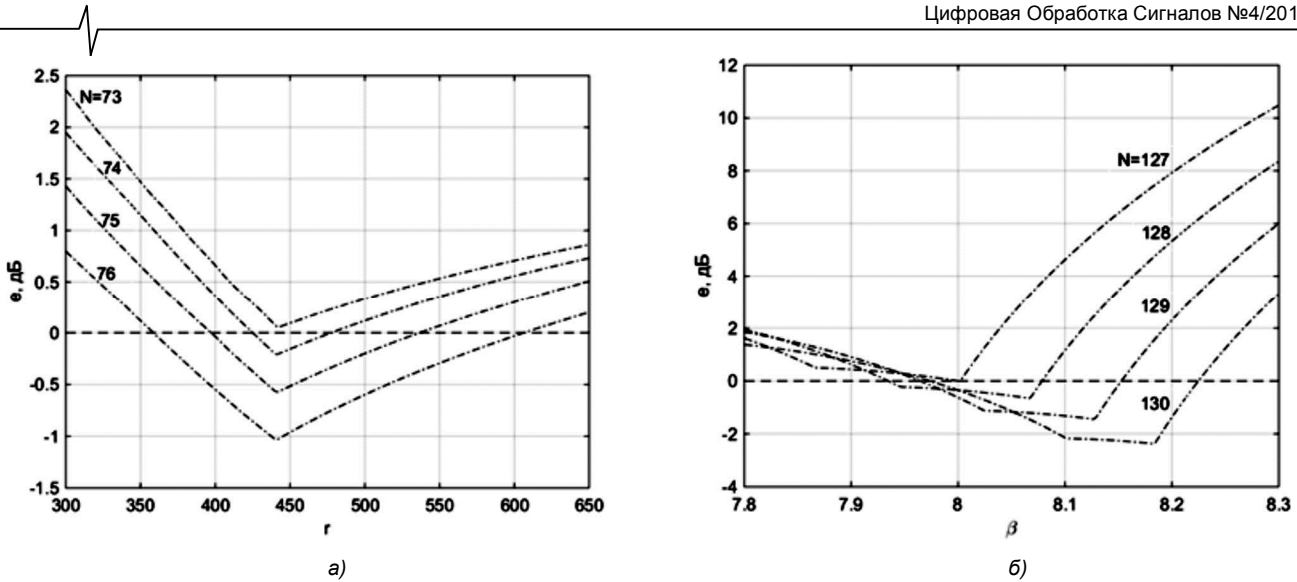


Рис. 2. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от исходного отношения пульсаций r для оптимальных КИХ-фильтров(а) и от исходного параметра окна β для КИХ-фильтров на основе окна Кайзера (б)

На рис. 1 б для сравнения показаны зависимости ошибки e от исходного вспомогательного параметра c . При $c = 0$ имеем $\Delta a = \Delta a_{min}$, а при $c = 1$ значение $\Delta a = \Delta a_{max}$. Параметр c , кроме точки $c = 1$, не несет информации о значениях Δa . Однако его использование вместо Δa позволяет, как видим, «растянуть» кривые слева от точки минимума e , что оказывается полезным для лучшего разрешения, особенно в случае квантования коэффициентов [6].

Обратимся теперь к подобным зависимостям для КИХ-фильтров. На рис. 2 а показаны зависимости ошибки e от исходного отношения пульсаций r для оптимальных КИХ-фильтров, а на рис. 2 б – от исходного параметра β для КИХ-фильтров на основе окна Кайзера. В отличие от БИХ-фильтров Золотарева-Кауэра, здесь невозможно заранее указать точки пересечения кривых с линией $e = 0$ дБ. Желаемый диапазон вариации параметров r и β можно установить путем пробных расчетов в окрестности их номинальных значений r_n и β_n , соответствующих минимуму e . Для оптимальных фильтров

$$r_n = \frac{\delta_{p \max}}{2\delta_{s \max}} = \frac{1}{2} \frac{1 - 10^{-\frac{\Delta a_{\max}}{20}}}{10^{-\frac{a_{0 \min}}{20}}} \quad (5)$$

Приближенное номинальное значение параметра окна на β_n зависит от $a_{0 \min}$, находится в интервале 0-10 и определяется по известным эмпирическим соотношениям.

Для требований (4) нет особого смысла в переходе от вариации параметров r и β к вспомогательному параметру c , как для БИХ-фильтров. Однако вместо исходного r все же можно использовать параметр c или Δa , δ_p или известные другие. Дело лишь в требованиях к АЧХ, удобстве или привычке пользователя.

Далее ограничимся рассмотрением зависимостей e , $\Delta a^\#$ и $a_0^\#$ только от параметра r и лишь для оптимальных КИХ-фильтров. На каждом рисунке для сравнения будем приводить две зависимости, соответствующие непрерывным ($M = \infty$) и квантованным коэффициентам ($M \neq \infty$), а также линию допуска, обусловленную выполнением условий (2) или (3). Здесь M – длина слова

дробной части коэффициентов, связанная с шагом квантования как $q = 2^{-M}$.

Влияние квантования коэффициентов на зависимости контролируемых параметров

Проведем ВИП-анализ оптимального КИХ-фильтра прямой структуры для требований (4) и порядка $N = 75$. Заметим, что они соответствуют узкополосной АЧХ, т.к. $f_{1n} \ll 0,25$, и номинальному отношению пульсаций $r_n = 439,9 \gg 1$.

Перед квантованием (округлением) все коэффициенты фильтра нормируем относительно их максимального значения. На рис. 3 показаны зависимости квантованных коэффициентов КИХ-фильтра от отношения пульсаций r при длине слова коэффициентов $M = 14$. Поскольку импульсная характеристика фильтра симметрична, на рис. 3 а показаны кривые лишь для половины коэффициентов, т.е. для $h_1 - h_{38}$. Из-за большого разброса их значений разная крутизна кривых здесь мало заметна. По этой же причине и из-за достаточно большого значения M дискретность кривых здесь не видна, но ее можно наблюдать для выборочных коэффициентов на рис. 3 б-г. Такое поведение кривых приводит к тому, что зависимости контролируемых параметров от отношения r становятся кусочно-постоянными и нерегулярными. Убедимся в этом.

На рис. 4 а показаны зависимости максимальной ошибки e от отношения пульсаций r для длины слова коэффициентов $M = 17$, а на рис. 4 б – для минимальной длины $M = 14$, при которой практически удовлетворяются требования (2) для некоторых точек в правой части кривой. Здесь также показаны идеальные зависимости при $M = \infty$ и пунктирные линии допуска.

Согласно рис. 4 а, квантование коэффициентов сильнее влияет на левую часть идеальной кривой, соответствующую полосе задерживания. Такой вывод по рис. 4 б сделать затруднительно. Эту проблему снимают зависимости неравномерности $\Delta a^\#$ и ослабления $a_0^\#$ (3) от отношения пульсаций r на рис. 5 а, б, построенные для $M = 14$. Действительно при любых r квантование коэффициентов, согласно рис. 5 а, практи-

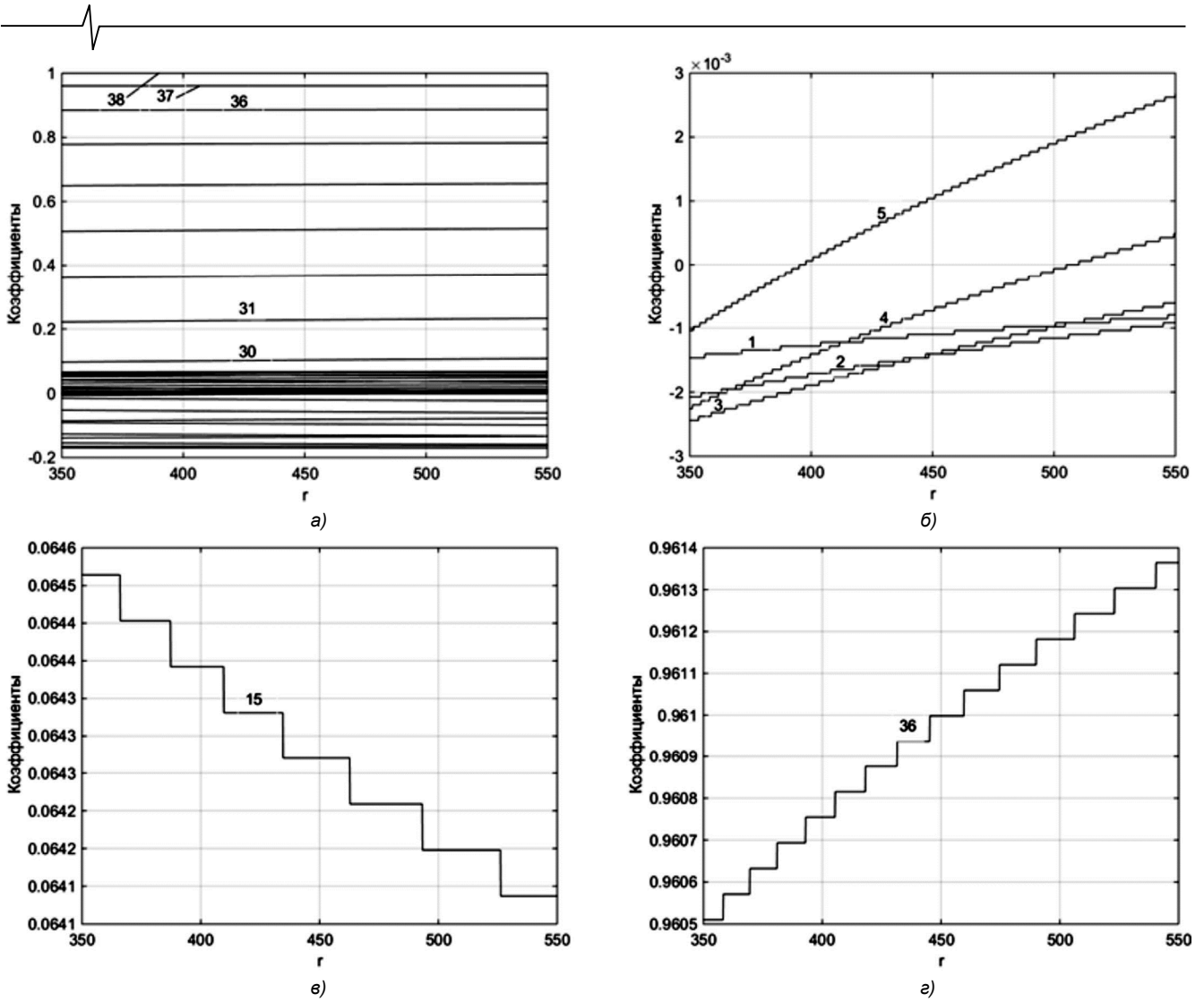


Рис. 3. Зависимости коэффициентов h_1 - h_{38} (а), h_1 - h_5 (б), h_{15} (в) и h_{36} (г) для фильтра с $N = 75$ от исходного отношения пульсаций r при $M = 14$

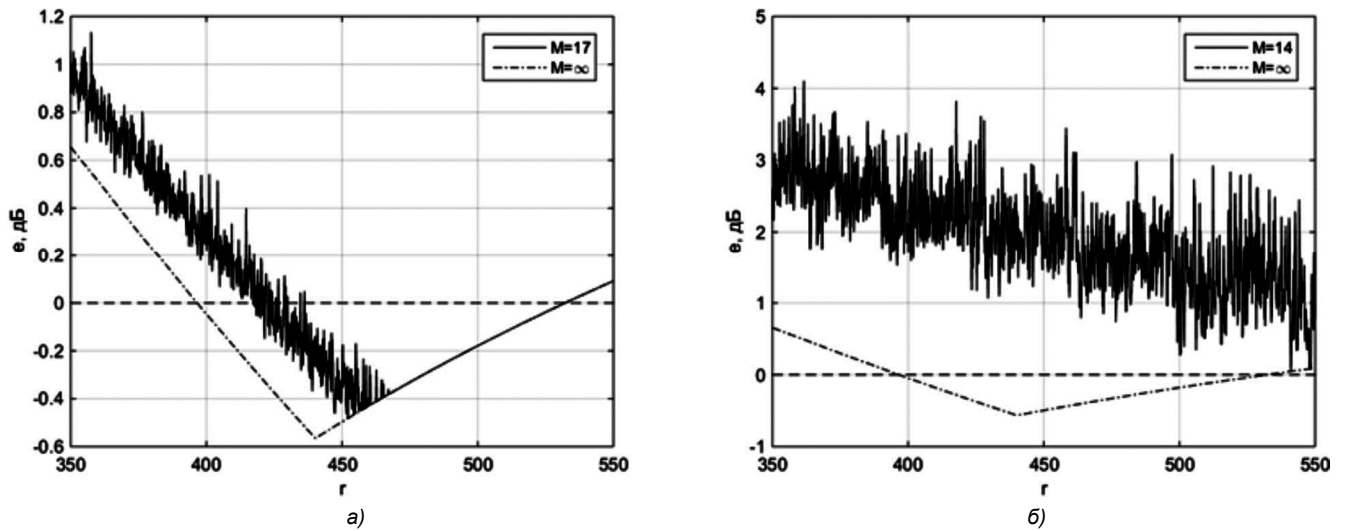


Рис. 4. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для фильтра с $N = 75$ при $M = 17$ (а) и $M = 14$ (б)

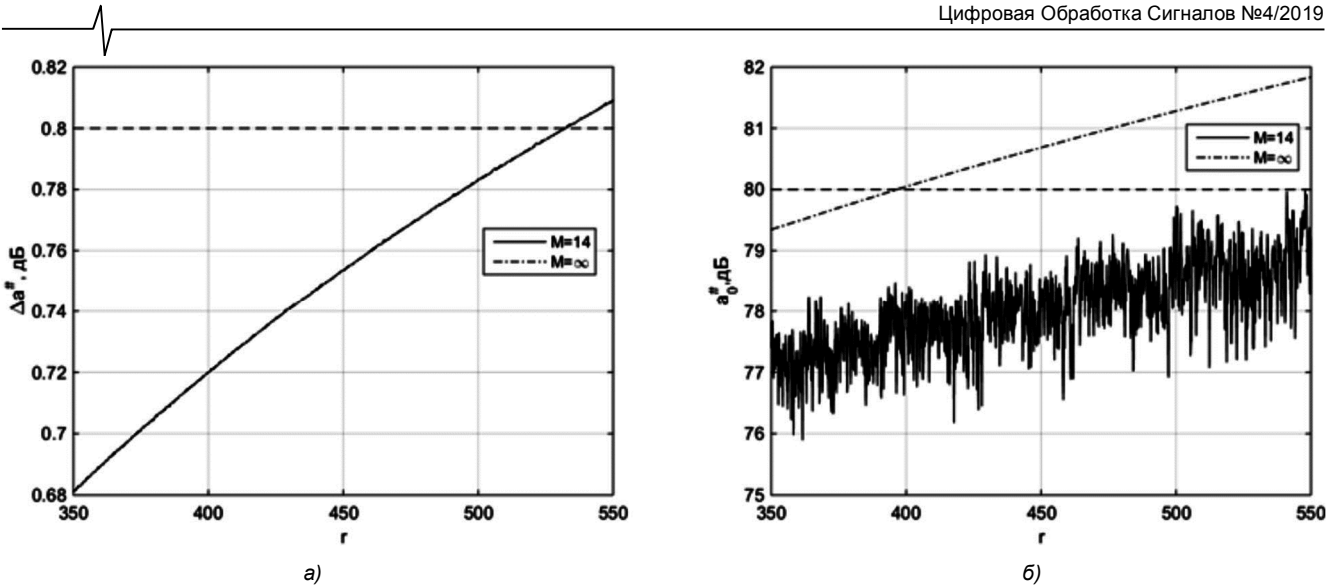


Рис. 5 Зависимости неравномерности (а) и ослабления АЧХ (б) от отношения пульсаций r для фильтра с $N = 75$

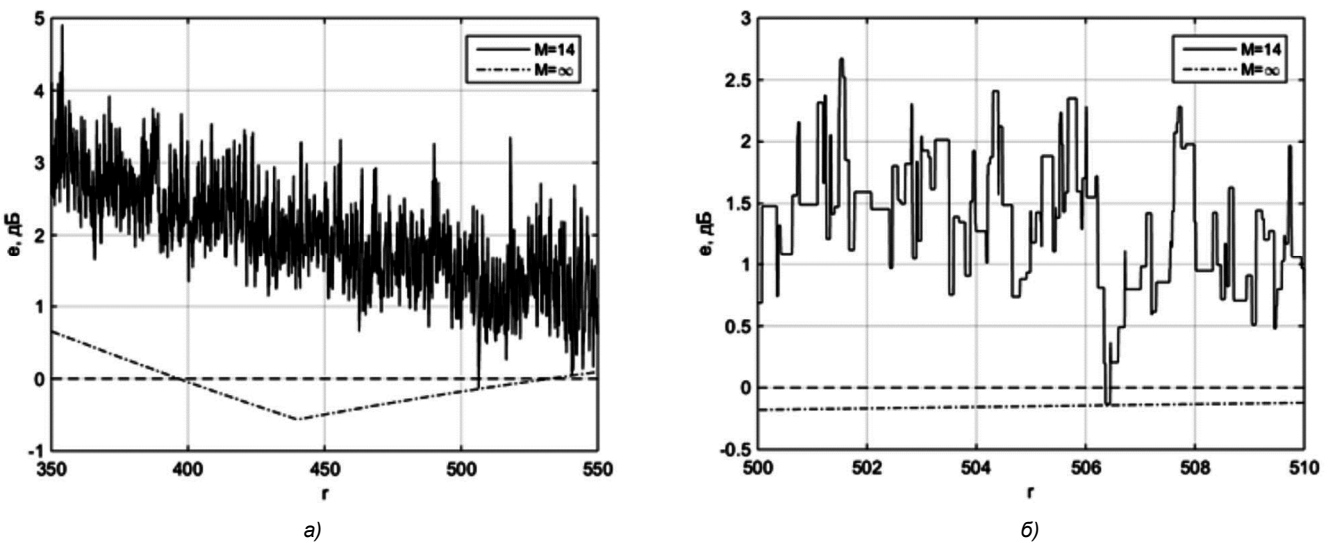


Рис. 6. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для фильтра с $N = 75$ при $A = 0,9975$ в широком (а) и узком (б) диапазоне анализа

чески не сказывается на изменение неравномерности в полосе пропускания, а согласно рис. 5 б – заметно влияет на ослабление в полосе задерживания. Поэтому отклонение зависимостей $e(r)$ при $M \neq \infty$ на рис. 4 обусловлено отклонением АЧХ только в полосе задерживания. При этом в (2) имеет место равенство $e = e_s$.

В конкретных ситуациях, связанных с требованиями к АЧХ и значением $M \neq \infty$, зависимость $e(r)$, в отличие от идеальной – при $M = \infty$, может сводиться к $e_p(r)$ или $e_s(r)$, как для обсуждаемого фильтра, или к комбинации $e_p(r)$ и $e_s(r)$. В последнем случае, одной четкой границы между кривыми $e_p(r)$ и $e_s(r)$, как для идеальных кривых, может и не быть.

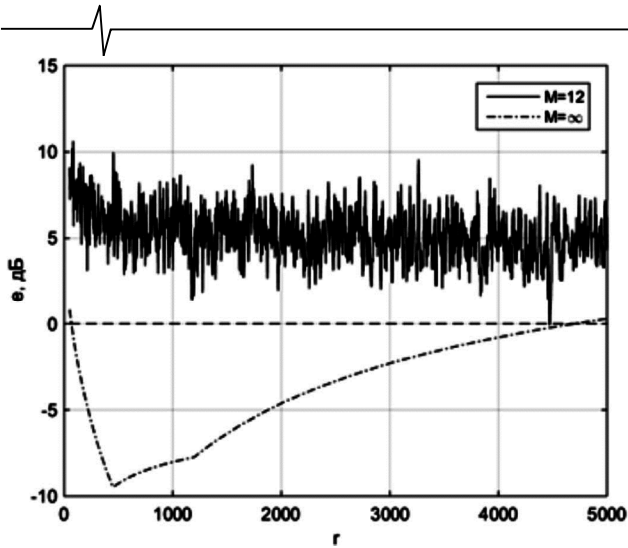
Таким образом, если важно знать о степени влияния квантования коэффициентов на АЧХ в каждой из двух полос и особенно при грубом квантовании коэффициентов, то лучше обратиться к построению кривых, как на рис. 5, или к построению кривых $e_p(r)$ и $e_s(r)$.

На рис. 6 показаны зависимости ошибки e от отношения r при $M = 14$ для случая, когда перед квантованием нормированных коэффициентов все они умножаются на константу $A = 0,9975$. При этом из рис. 6 а вид-

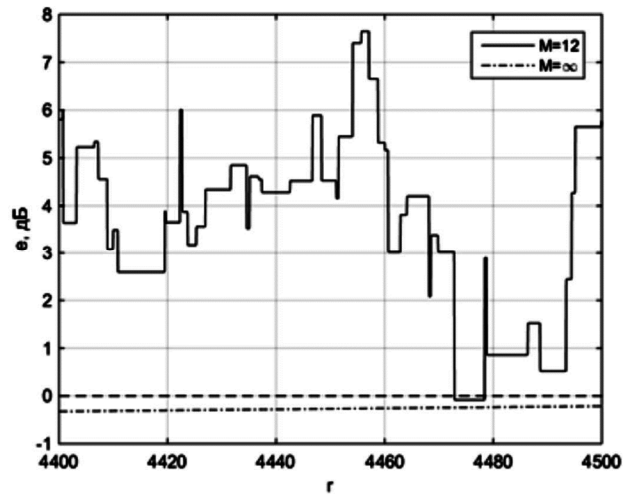
но, как изменилась кривая ошибки на рис. 3 б, построенная при $A = 1$. В частности появился очень маленький интервал значений r для которого $e < 0$ дБ. На рис. 6 б это иллюстрируется в более узком диапазоне изменения r , что наглядно показывает и кусочно-постоянный характер обсуждаемых зависимостей.

Кусочно-постоянный характер кривых ошибки $e(r)$ по существу объясняет возможный однопараметрический алгоритм ВИП для синтеза КИХ-фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. Смысл его заключается в полном переборе интервалов постоянства ошибки e для $M = M_0, M_0+1, \dots$ до тех пор, пока для некоторых M и r не будут выполнены заданные требования к АЧХ. Здесь M_0 – начальное значение M . Из-за сильной хаотичности поведения кривых какая-либо логика здесь не подходит. При переборе важно не пропускать интервалы постоянства e , делая на каждом из них для экономии компьютерного времени лишь одну оценку ошибки e . Это учтено в более сложных алгоритмах ВИП [1-5].

Отметим, что предварительный ВИП-анализ позволяет локализовать и тем самым улучшить и ускорить поиск допустимых решений какими-либо алгоритмами

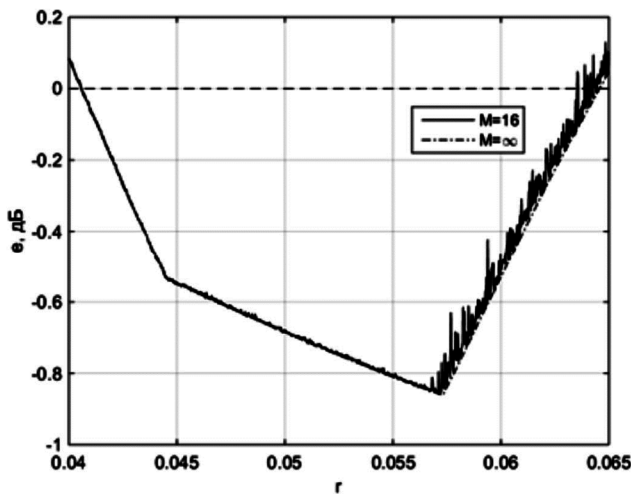


а)

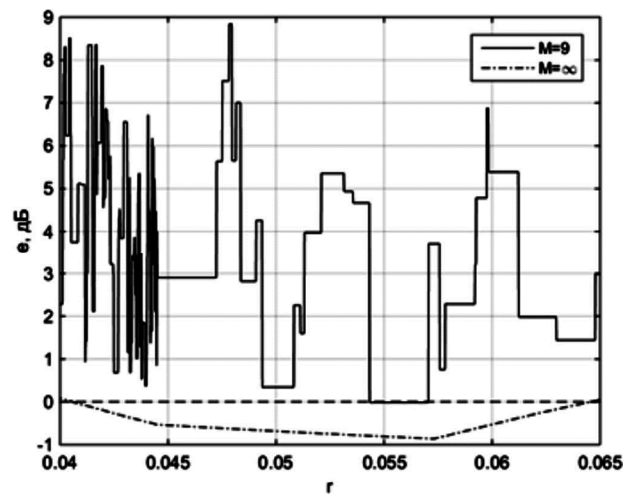


б)

Рис. 7. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для фильтра с $N = 89$ в широком (а) и узком (б) диапазоне анализа



а)



б)

Рис. 8. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для узкополосного фильтра с $N = 66$ при $M = 16$ (а) и $M = 9$ (б)

синтеза квантованных КИХ-фильтров. Так, например, при требованиях (4) такой поиск лучше проводить для окрестности $r = r_{max}$ ($e = 0$ дБ), а не $r = r_n$ ($e = e_{min}$), как это обычно делается.

Хорошо известно, что, преднамеренно увеличивая порядок фильтра, можно уменьшить длину слова коэффициентов. Применение однопараметрического алгоритма ВИП для требований (4) и константы $A = 1$ при $N = 76$ и 77 приводит к $M = 14$, при $N = 78 - 88$ – к $M = 13$ и при $M = 89$ – к $M = 12$. Дальнейшее увеличение N сопровождается ростом M . На рис.7 представлены зависимости ошибки e от отношения r для $N = 89$. На рис. 7 а кривые соответствуют широкому диапазону анализа, а на рис. 7 б – его узкой части с наличием допустимого решения с $e < 0$ дБ.

Анализ фильтров для разных полос и отношений пульсаций

Выполним ВИП-анализ для узкополосных и широкополосных фильтров прямой структуры при больших и малых значениях отношения пульсаций r . Вначале приведем зависимости ошибки e от r для узкополосного

фильтра с номинальным $r_n \ll 1$ и сопоставим их с уже построенными зависимостями на рис. 4 для $r_n = 439,9 \gg 1$ при тех же самых частотах, что и в (4). Для этого зададим следующие требования к АЧХ фильтра:

$$f_{1n} = 0,04, f_{2n} = 0,08, \Delta a_{max} = 0,01 \text{ дБ}, a_{0min} = 40 \text{ дБ}.$$

В результате расчетов получим $r_n = 0,0575 \ll 1$ и минимальный порядок $N = 66$. На рис.8 показаны зависимости подобные представленным на рис. 4. Как видим, в случае малых r_n (рис. 8 а) в сравнении с большими (рис. 4 а) квантование коэффициентов сказывается более существенно в полосе пропускания, а не в полосе задерживания. Такой вывод по рис. 4 б сделать затруднительно, а по рис. 8 б – невозможно.

Теперь зададим требования к АЧХ двух широкополосных фильтров:

$$f_{1n} = 0,4, f_{2n} = 0,44,$$

$$\Delta a_{max} = 1 \text{ дБ}, a_{0min} = 50 \text{ дБ} (r_n = 17,19 \gg 1) \text{ и}$$

$$\Delta a_{max} = 0,01 \text{ дБ}, a_{0min} = 40 \text{ дБ} (r_n = 0,0575 \ll 1).$$

Для первого фильтра выберем $N = N_{min} = 43$, а для второго $N = 73 > N_{min} = 71$. Соответствующие зависимости

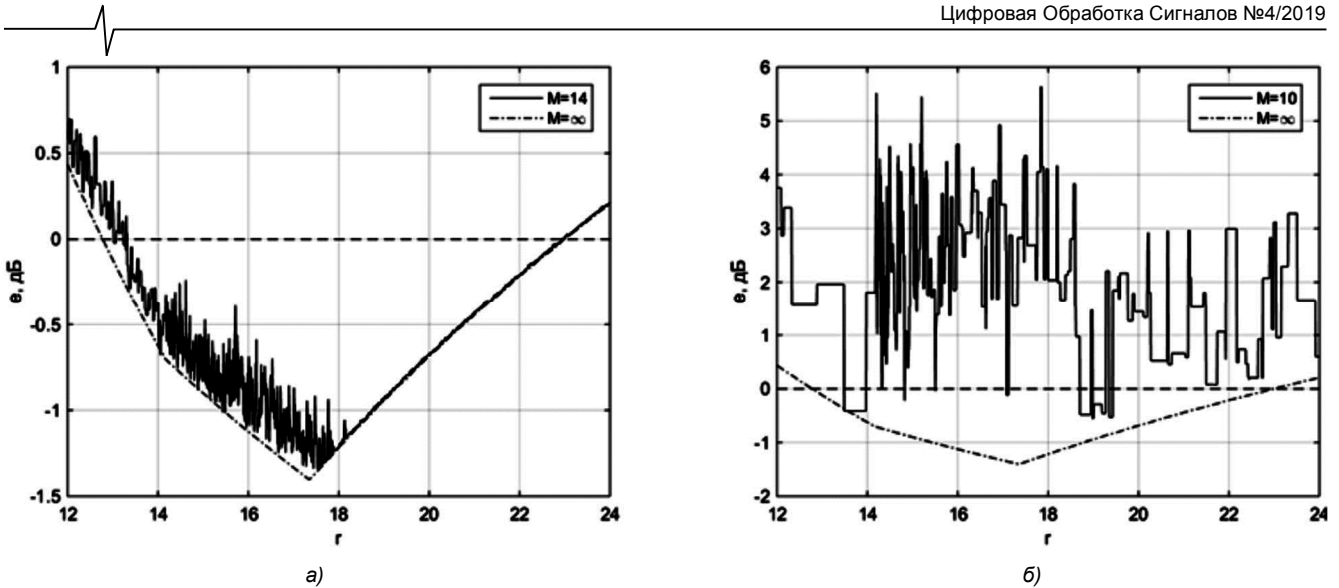


Рис. 9. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для широкополосного фильтра с $N = 43$ при $M = 14$ (а) и $M = 10$ (б)

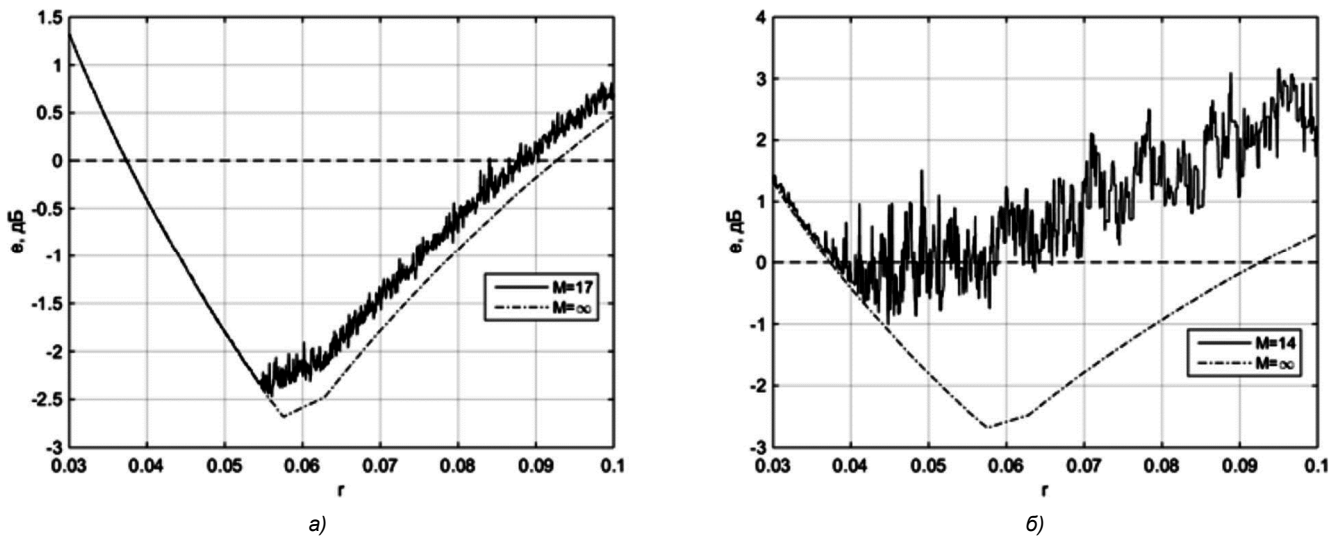


Рис. 10. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для широкополосного фильтра с $N = 73$ при $M = 17$ (а) и $M = 14$ (б)

ти, подобные представленным на рис. 4 и рис. 8 для узкополосных фильтров, показаны на рис. 9 и рис. 10. Как видим из рис. 9 а и рис. 10 для широкополосных фильтров при малых r_n в сравнении с большими, квантование коэффициентов сказывается более существенно в полосе пропускания, чем в полосе задерживания. Вывод о степени влияния на полосы по кривой на рис. 9 б для минимального значения M сделать невозможно.

Таким образом, влияние квантования коэффициентов на изменение АЧХ в каждой из двух полос зависит от отношения пульсаций и не связаны с шириной полосы пропускания. Замечено, что для значений r_n в окрестности единицы степени влияния становятся близкими.

Сравнение прямой и каскадной структуры

До этого момента рассмотрена только прямая структура КИХ-фильтров. Другая структура – каскадная. Известно, что для того, чтобы квантование коэффициентов этой структуры не влияло на ФЧХ фильтров с симметричной импульсной характеристикой, отдельные

звенья должны быть линейно фазовыми или пары звеньев должны быть зеркально-симметричными.

В частных случаях, когда передаточная функция фильтра имеет в z -плоскости лишь нули на единичной окружности и на действительной оси, каскадный фильтр с линейной ФЧХ может быть построен на звеньях не выше второго порядка. Однако, даже в этих случаях возможна оптимальная факторизация передаточной функции в виде звеньев более высокого порядка, приводящая к упрощению реализации КИХ-фильтров [8-10].

Зададим требования к АЧХ фильтра с $N = 59$ [9]:

$$f_{1n} = 0,021, f_{2n} = 0,07, \Delta a_{max} = 0,20847 \text{ дБ}, a_{0min} = 60,1 \text{ дБ}.$$

Можно убедиться, что в данном случае $r_n = 12$. На рис. 11 показаны диаграммы нулей передаточной функции этого фильтра. Диаграмма на рис. 11а соответствует $r = 12$, а на рис. 11 б – $r = 9,5$. Начиная с $r \cong 9,45$ фильтр удовлетворяет заданным требованиям, причем, начиная с $r \cong 9,7$ и по крайней мере до $r = 16$, имеет диаграмму нулей подобную изображенной на рис. 11 а и может быть реализован на пяти звеньях первого и 27 звеньях второго порядка.

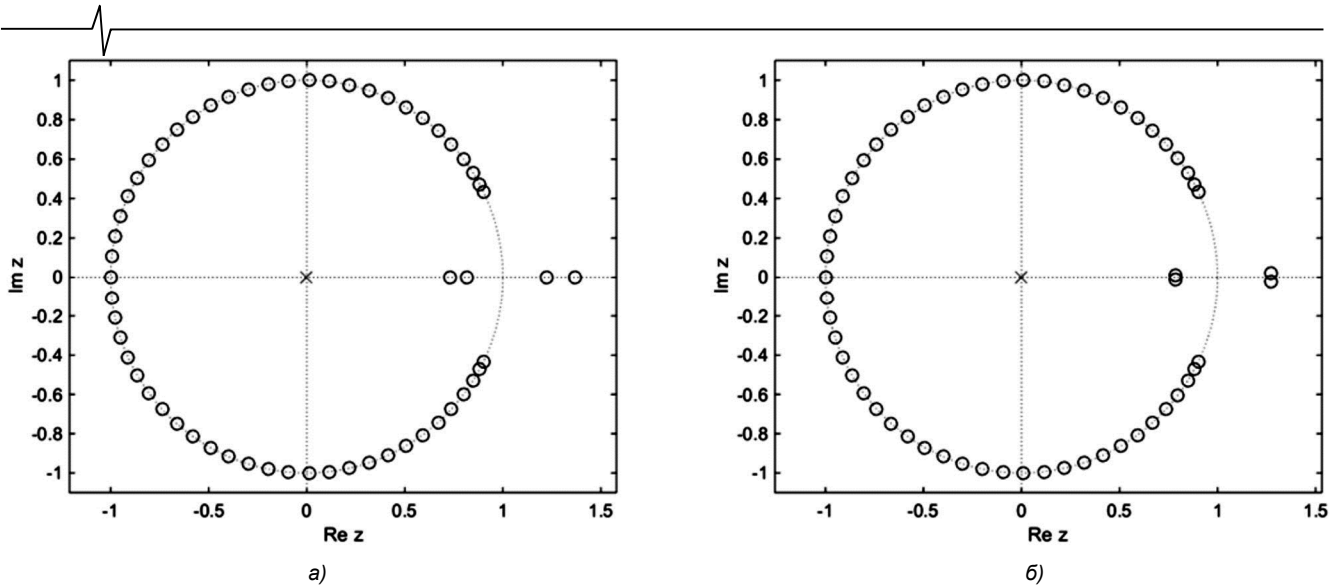


Рис. 11. Диаграммы нулей фильтра с $N = 59$ для $r = 12$ (а) и $r = 9,5$ (б)

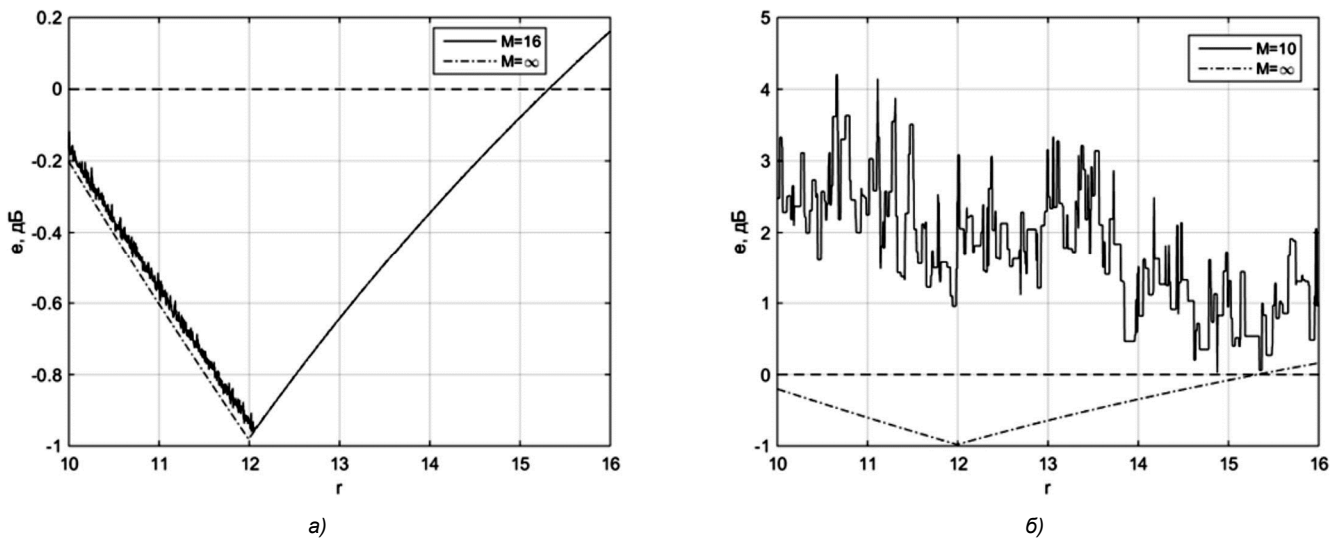


Рис. 12. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для прямой структуры фильтра с $N = 59$ при $M = 16$ (а) и $M = 10$ (б)

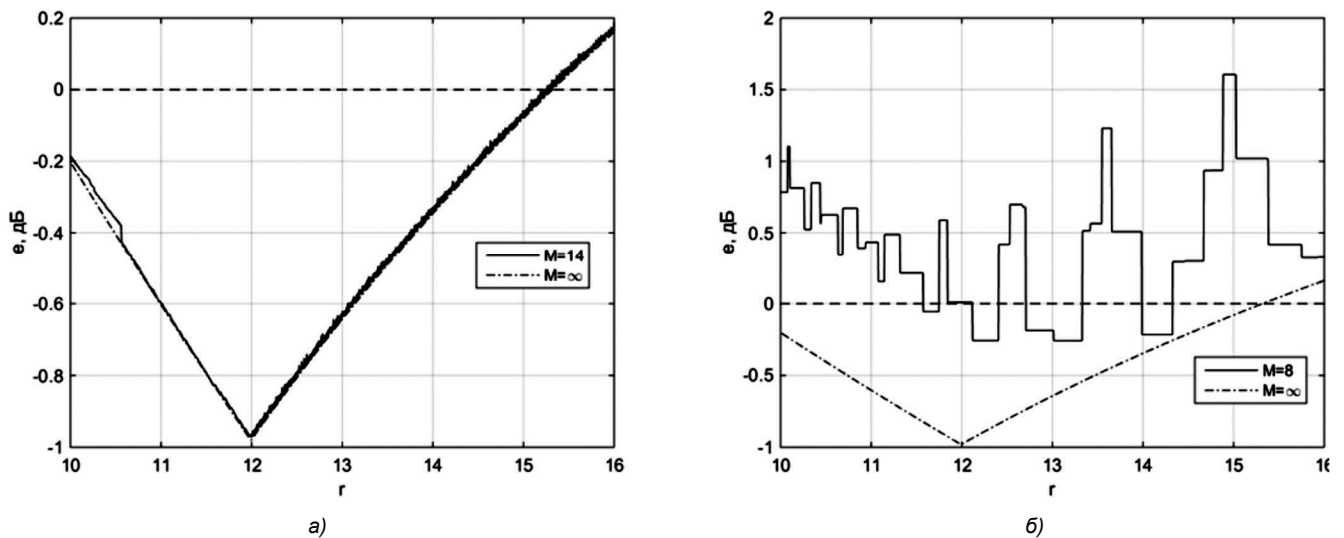


Рис. 13. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для каскадной структуры фильтра с $N = 59$ при $M = 14$ (а) и $M = 8$ (б)

Проведем сравнительный ВИП-анализ прямой и каскадной структуры этого фильтра в диапазоне $10 \leq r \leq 16$. Перед квантованием все коэффициенты прямой струк-

туры фильтра нормируем относительно их максимального значения. Передаточную функцию каскадной структуры обсуждаемого фильтра представим в виде

$$H(z)(1+z^{-1}) = \prod_{i=1}^2 (1+b_i z^{-1})(b_i+z^{-1}) \prod_{i=3}^{29} (1+b_i z^{-1}+z^{-2}),$$

где $b_i < 1, i = 1, 2$.

На рис. 12 для прямой и на рис. 13 для каскадной структуры показаны зависимости максимальной ошибки e от отношения пульсаций r подобные приведенным ранее. Как видим из рис. 12 а и рис. 13 а, прямой структуре свойственно большее влияние квантование коэффициентов на АЧХ в полосе задерживания, а каскадной – в полосе пропускания. Для прямой структуры (окрестность точки $r = 15$ на рис. 12 б) требования к АЧХ почти удовлетворяются при $M = 10$, а для каскадной (окрестности ряда точек на рис. 13 б) – требования удовлетворяются при $M = 8$. Однако, заметим, что абсолютные значения всех коэффициентов прямой структуры меньше 1, за исключением одного, равного 1, а каскадной – могут превышать 1.

Сравнение прямой и ограничивающей структуры

Выполним ВИП-анализ еще для одной структуры, а именно для ограничивающей КИХ-структуры (в оригинале [11]: FIRBR structure, FIR – КИХ, BR – bounded real), предполагающей симметричную импульсную характеристику и четный порядок оптимальных КИХ-фильтров. Ограниченность АЧХ в полосе пропускания единицей для таких фильтров структурно обусловлена и позволяет получить низкую коэффициентную чувствительность в полосе пропускания. Детали и примеры для широкополосных фильтров нижних частот см. в [11, 12].

Для фильтра с $N = 34$ зададим следующие номинальные граничные частоты [11]: $f_{1n} = 0,4, f_{2n} = 0,45$.

Расчет оптимального фильтра прямой структуры с непрерывными коэффициентами приводит, судя по АЧХ в [11], к $\Delta a^\# \approx 0,06$ дБ и $a_0^\# \approx 19$ дБ. Для фильтра с квантованными коэффициентами положим

$$\Delta a_{max} = 0,0785 \text{ дБ}, a_{0min} = 17 \text{ дБ}.$$

Согласно [11], исходную передаточную функцию фильтра нижних частот $H(z)$ прямой структуры можно представить в виде

$$H(z) = z^{-\frac{N}{2}} - G(z) = z^{-\frac{N}{2}} - G_1(z)G_2(z), \tag{6}$$

где для рассматриваемого фильтра $G_1(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \prod_{i=1}^7 (1 + b_i z^{-1} + z^{-2})^2$

и $G_2(z) = \sum_{i=1}^5 h_i z^{-i+1}$.

Правая часть в (6) определяет ограничивающую структуру. Передаточная функция $G(z)$, соответствует фильтру верхних частот и находится через исходную $H(z)$, причем $\max|H(z)|$ должен быть равен 1.

Переопределим передаточную функцию $G_1(z)$ как

$$G_1(z) = g_0(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \prod_{i=1}^{14} g_i (1 + b_i z^{-1} + z^{-2}),$$

где $g_i, i = 0, 1, \dots, 14$ – масштабные множители.

Для конфигурации $G(z) = G_2(z)G_1(z)$ применим L_∞ – масштабирование, которое не должно влиять на $G(z)$ в (6). Масштабирование $G_2(z)$ выполним путем изменения ее коэффициентов. Перед введением множителей g_i в $G_1(z)$ звеня второго порядка расположим в порядке возрастания частот их нулей.

Для прямой структуры, используемой для сравнения, L_∞ – масштабирование выполним путем изменения коэффициентов ее передаточной функции так, чтобы $\max|H(z)| = 1$.

На рис. 14 для прямой и на рис. 15 для ограничивающей структуры показаны зависимости максимальной ошибки e от отношения пульсаций r , подобные представленным ранее. Как видим из рис. 14 а для прямой структуры свойственно большее влияние квантования коэффициентов на АЧХ в полосе пропускания, чем в полосе задерживания. Для ограничивающей структуры степень влияния квантования зависит от участков в полосах пропускания и задерживания. Так, например, вблизи точки минимума ошибки e большему влиянию подвержена АЧХ в полосе задерживания. Требования к АЧХ фильтра для прямой структуры, согласно рис. 14 б, удовлетворяются при $M = 10$, а для ограничивающей структуры, согласно рис. 15 б, – при $M = 5$. В том и другом случае имеется целый ряд допустимых решений.

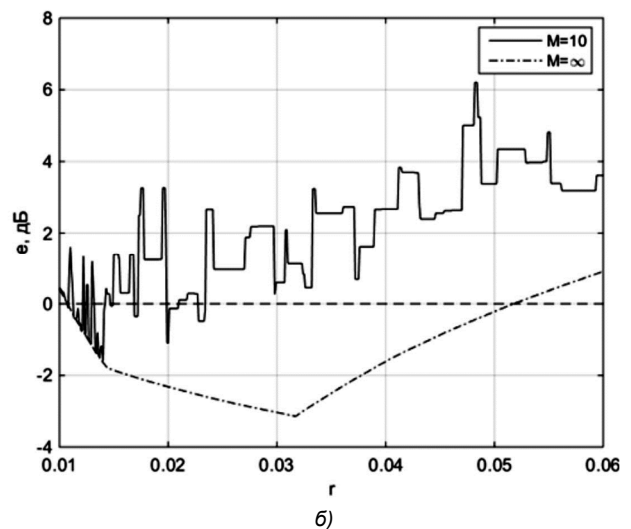
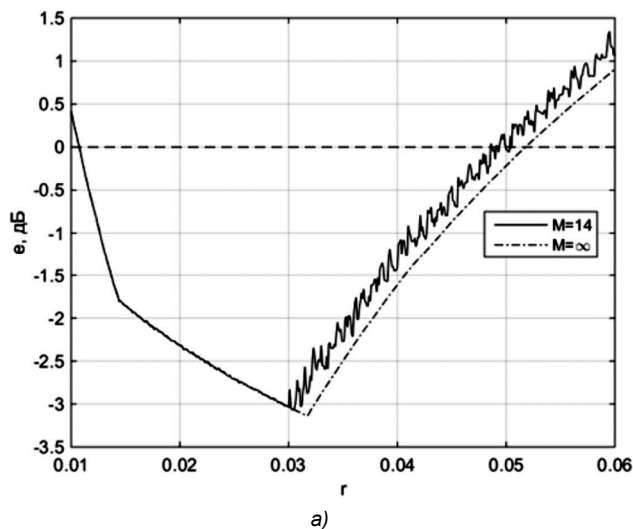
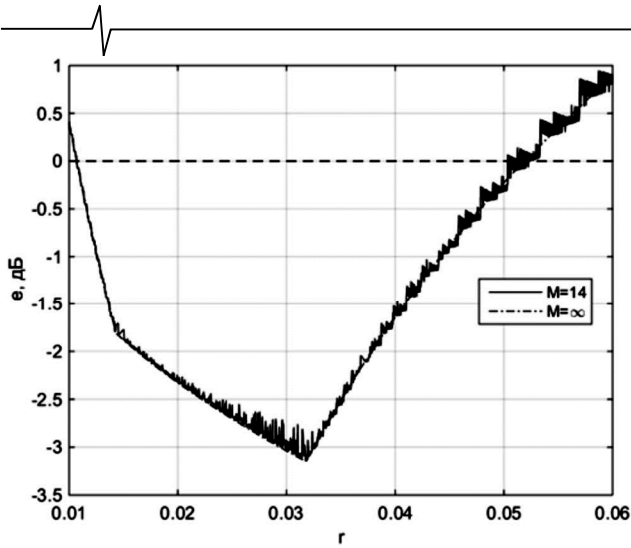
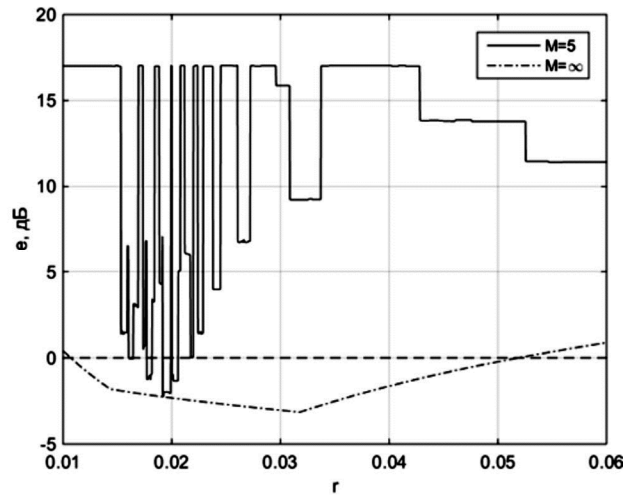


Рис. 14. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для прямой структуры фильтра с $N = 34$ при $M = 14$, (а) и $M = 10$ (б)

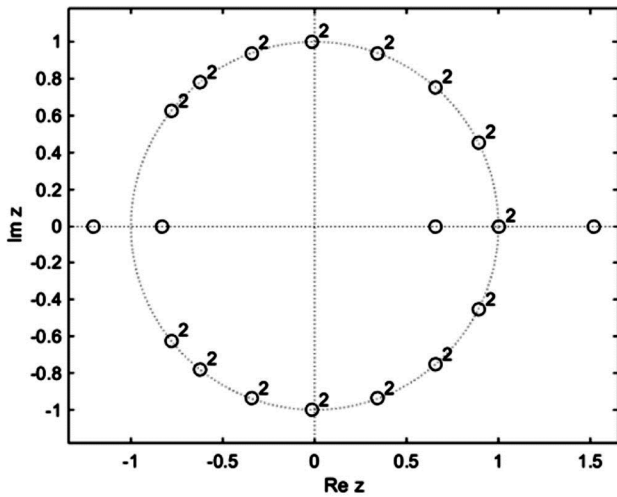


а)

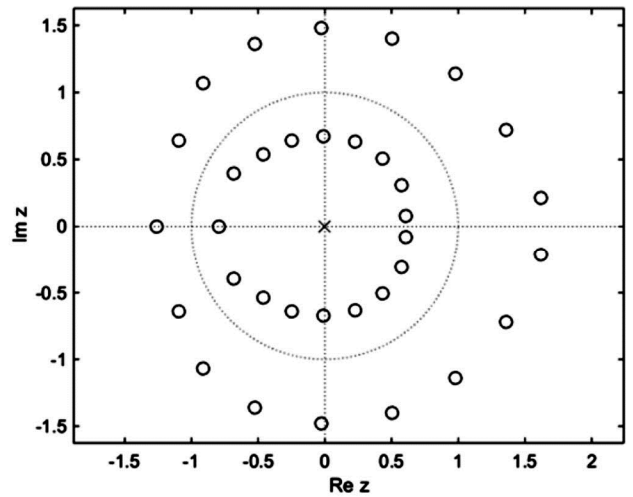


б)

Рис. 15. Зависимости максимальной ошибки АЧХ от отношения пульсаций r для ограничивающей структуры фильтра с $N = 34$ при $M = 14$ (а) и $M = 5$ (б)

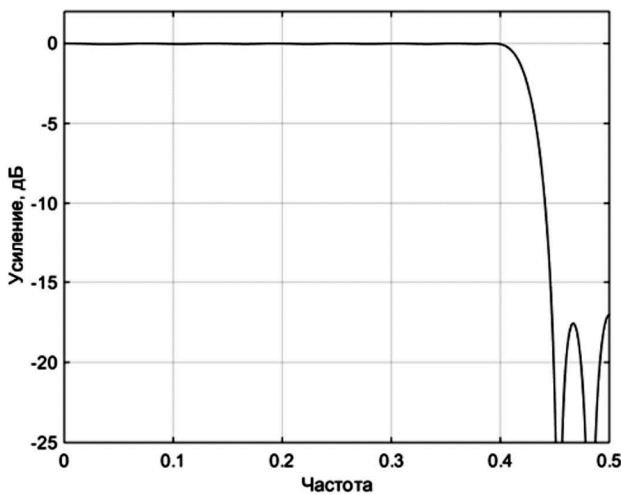


а)

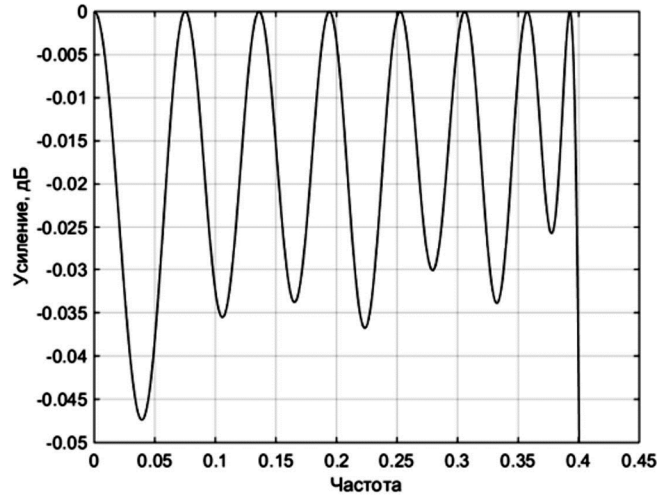


б)

Рис. 16. Диаграммы нулей $G(z)$ (а) и $H(z)$ (б) для точки $r = 0,01603$ на рис. 15 б



а)



б)

Рис. 17. АЧХ фильтра на базе ограничивающей структуры с $N = 34$ в основной полосе (а) и в полосе пропускания (б) для точки $r = 0,01603$ на рис. 15 б

Заметим, что для прямой структуры коэффициенты фильтров с допустимыми АЧХ на рис. 14 б по модулю меньше 0,9, а для ограничивающей структуры – могут

превышать 2. Во втором случае в этом можно убедиться по таблице, где представлены коэффициенты $G_1(z)$, рассчитанные для точки $r = 0,01603$ на рис. 15 б, соот-

ветствующей одному из допустимых решений. Коэффициенты $G_2(z)$ равны $h_1 = h_5 = 0,21875$, $h_2 = h_4 = -0,03125$, $h_3 = -0,53125$.

Для этого же решения на рис. 16 а, б представлены диаграммы нулей $G(z)$ и $H(z)$. На рис.16а цифрой 2 помечены кратные нули. АЧХ фильтра показана на рис. 17 а в основной полосе, а на рис. 17 б – в полосе пропускания. Из рис. 17 б видим, что для фильтра на базе ограничивающей структуры, как и следовало ожидать, все максимумы АЧХ равны 1.

Коэффициенты $G_1(z)$

i	g_i	b_i
0	0,4375	-2
1	0,375	-1,78125
2	0,34375	-1,78125
3	0,375	-1,3125
4	0,375	-1,3125
5	0,4375	-0,6875
6	0,4375	-0,6875
7	0,59375	0,03125
8	0,59375	0,03125
9	0,90625	0,6875
10	0,875	0,6875
11	1,59375	1,25
12	1,5625	1,25
13	2,71875	1,5625
14	2,9375	1,5625

Заключение

Метод ВИП применен к анализу оптимальных КИХ-фильтров нижних частот. Метод предполагает построение и анализ зависимости контролируемого параметра АЧХ от значений выбранного исходного параметра, используемого для расчета фильтров. На примере прямой структуры фильтров с непрерывными и квантованными коэффициентами представлены варианты построения этих зависимостей. В качестве исходного параметра использовано отношение уровней пульсаций в полосе пропускания и задерживания, а в качестве контролируемого - максимальная относительная ошибка АЧХ или неравномерность в полосе пропускания и минимальное ослабление в полосе задерживания. Пояснен кусочно-постоянный характер построенных кривых.

Анализ подобных кривых для узкополосных и широкополосных фильтров показывает, что степени влияния квантования коэффициентов на изменение АЧХ в полосе пропускания и задерживания зависят от отношения пульсаций и не связаны с шириной полосы пропускания. Для отношений в окрестности единицы степени влияния становится примерно идентичным.

Для прямой, каскадной и ограничивающей структуры фильтров проиллюстрированы зависимости максимальной относительной ошибки АЧХ от исходного от-

ношения уровней пульсаций. Для рассмотренных требований к фильтрам большему влиянию квантования коэффициентов подвержены зависимости, построенные для прямых структуры.

Применение ВИП-анализа дает возможность наглядно по графикам анализировать различные квантованные фильтры, причем при произвольном шаге квантования их коэффициентов, и может служить хорошим средством для выявления наилучшего сочетания исходных параметров, типа аппроксимации АЧХ и структуры.

Литература

1. Мингазин А.Т. Вариация исходных параметров в задачах синтеза цифровых КИХ-фильтров с конечной длиной слова коэффициентов // 3-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение». DSPA-2000. Т.1. С. 162-166.
2. Мингазин А.Т. Вариация исходных параметров взвешенной чебышевской аппроксимации в задаче синтеза КИХ-фильтров без умножителей // 7-я Международная конференция. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». DSPA-2005. Т. 1. С. 54-56.
3. Мингазин А. Синтез цифровых полуполосных КИХ-фильтров без умножителей // Современная электроника. 2006. № 3. С. 44-46.
4. Мингазин А.Т. Два примера синтеза совершенных банков решетчатых фильтров без умножителей // 11-я международная конференция. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». DSPA-2009. Т. 1. С. 99-102.
5. Мингазин А. Синтез КИХ-фильтров с произвольной АЧХ при ограниченной длине слова коэффициентов // Компоненты и технологии. 2014. № 2. С. 98-100.
6. Мингазин А. Вариация исходных параметров в задаче анализа БИХ-фильтров // Компоненты и технологии. 2018. № 11. С. 95-102.
7. Dehner G. On the design Causer filters with coefficients of limited wordlength // AEU. 1975. Vol. 29. No 4. Pp. 165-168.
8. Mehrnia A., Willson A. N. FIR filter design via extended optimal factoring // IEEE Trans. 2016. SP-64. No. 4. Pp. 1061-1075.
9. Mehrnia A., Willson A.N. A lower bound for the hardware complexity of FIR filters // IEEE CAS Magazine. 2018. No. 1. Pp. 10-28.
10. Mehrnia A., Willson A.N. Optimally factored IFIR filters // Circuits, Systems and Signal Processing. 2019. Vol. 38. No. 1. Pp. 259-286.
11. Vaidyanathan P.P., Mitra S.K. Very low sensitivity FIR filter implementation using «structural passivity» concept // IEEE Trans. 1985. CAS-32. No. 4. Pp. 360-364.
12. Vaidyanathan P.P., Mitra S.K. Robust digital filter structures: a direct approach // IEEE CAS Magazine. 2019. No. 1. Pp. 14-32.