

УДК 621.391

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ЯВЛЕНИЯ ГИББСА

Сорока Е.З., к.т.н., гл. научный сотрудник ЗАО «МНИТИ» (Московский научно-исследовательский телевизионный институт), e-mail: soroka@mniti.ru.

THE RESEARCH OF THE REASONS OF THE GIBBS PHENOMENON

Soroka E.Z.

The reasons of occurrence of the Gibbs phenomenon at the spectrum cutoff of discontinuous function have been researched. Methods of decreasing and elimination of this phenomenon by smooth limiting of the spectrum of the discontinuous function have been examined.

Key words: Gibbs phenomenon, spectrum, discontinuous function, smooth limiting.

Ключевые слова: явление Гиббса, спектр, разрывная функция, плавное ограничение.

Введение

Явление Гиббса [1-5] состоит в том, что в случае ограничении числа членов ряда Фурье для функции с разрывами первого рода возникают затухающие колебательные процессы около мест разрыва (на радиотехническом жаргоне – «звон»). Рассмотрим популярный пример – меандр $s_1(t)$ с периодом T (красный график на рис. 1 а).

Будем считать, что меандр $s(t)$ образуется путем периодизации разрывной функции

$$\begin{cases} -1 & \text{при } -T/2 < t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \quad t \geq T/2, \quad t \leq -T/2, \\ 1 & \text{при } 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (1)$$

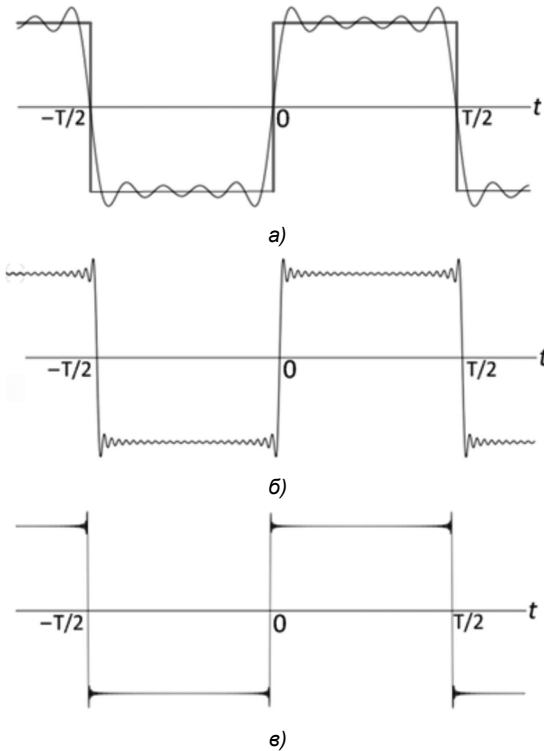


Рис. 1. Графическое представление явления Гиббса

Исследуются причины возникновения явления Гиббса при резком ограничении спектра разрывных функций и рассматриваются методы его ослабления и устранения путем перехода к плавному ограничению спектра разрывной функции.

Для описания процедуры периодизации можно использовать аппарат дискретизирующих функций [6]. При периодизации некоторой функции (ограниченной протяженности) дискретизирующая функция $D(t)$ выражается суммой смещенных дельта-функций

$$D(t) = \sum_k \delta(t - kT), \quad (2)$$

где T – интервал периодизации, $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ (рис. 2).

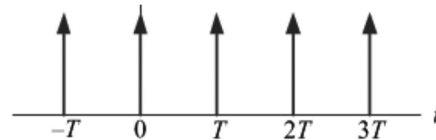


Рис. 2. Дискретизирующая (периодизирующая) функция $D(t)$

Меандр (рис. 1) как результат периодизации выражается сверткой периодизируемой разрывной функции $sig(t)$ с $D(t)$:

$$s_1(t) = \sum_k sig(t)D(t) = \sum_k sig(t - kT). \quad (3)$$

Для дальнейшего анализа используется следующая пара преобразований Фурье [7]:

Частотный спектр сигнала

$$r(f) = \mathcal{F} [r(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j2\pi ft} dt.$$

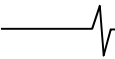
Сигнал

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1} [r(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(f)e^{-j2\pi ft} df. \quad (4)$$

Здесь \mathcal{F} – прямое преобразование Фурье, \mathcal{F}^{-1} – обратное преобразование Фурье, $r(t)$ – сигнал, $r(f)$ – его спектр, t – время, f – частота.

С учетом этого спектр функции $sig(t)$ выражается как

$$\begin{aligned} sig(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} sig(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} sig(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{j}{\pi f} (\cos \pi f T - 1). \end{aligned} \quad (5)$$



На рис. 3 спектр $sig(f)$ представлен синим графиком (принято $T = 1$).

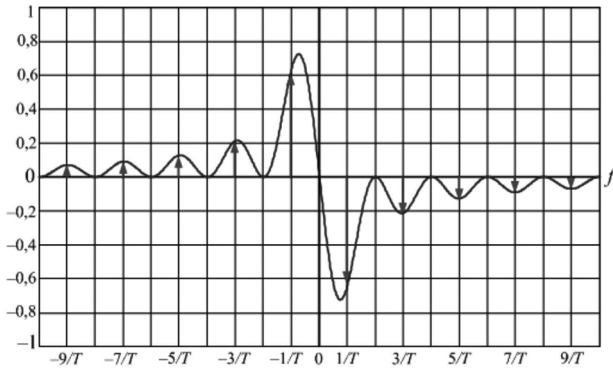


Рис. 3. Графики спектральных функций $sig(f)$ и $sI(f)$

При периодизации сигнала (с периодом T) происходит дискретизация его спектра (с периодом $F = 1/T$), а при дискретизации сигнала с периодом T происходит периодизация его спектра с периодом $F = 1/T$ [6]. При этом дискретизирующие функции $D(t)$ и $D(f)$ связаны между собой парой преобразований Фурье (4), откуда можно получить

$$D(f) = F \sum_m \delta(f - mF), \quad (6)$$

где F – период дискретизации по частоте, причем $F = 1/T$.

Определим частотный спектр меандра (3) с использованием спектральной дискретизирующей функции (6). Для этого требуется выполнить перемножение функций (5) и (6), поскольку операции свертки (при периодизации) в сигнальной области соответствует операция перемножения в области преобразования Фурье (спектральной области):

$$\begin{aligned} s_1(f) &= sig(f) F \sum_m \delta(f - mF) = \\ &= \frac{j}{\pi f} (\cos \pi f T - 1) F \sum_m \delta(f - mF). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом выделяющего свойства дельта-функции и подстановки $F = 1/T$ (при нечетном m) спектр меандра выражается как

$$s_1(f) = \frac{j}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} (\cos m\pi - 1) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right). \quad (8)$$

На рис. 3 этот спектр представлен в виде отсчетов красного цвета.

Анализ искажений из-за явления Гиббса

Как справедливо отмечено в [5], ограничение числа членов ряда Фурье в разложении функции с разрывами первого рода, вызывающее явление Гиббса, эквивалентно пропусканию меандра (или другой подобной разрывной функции) через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ). В результате становится очевидным, что явление Гиббса можно рассматривать как результат операции

свертки меандра $s_1(t)$ с импульсной характеристикой идеального ФНЧ $g_1(t) = \sin(2\pi F_{cp} t) / \pi t$, где F_{cp} – граничная частота ФНЧ:

$$s_2(t) = s_1(t) \otimes g_1(t). \quad (9)$$

При этом чем больше полоса пропускания F_{cp} , тем выше частота возникающего колебательного процесса в $g_1(t)$ и в выходном сигнале $s_2(t)$ (см. рис. 1, черные графики а, б и в).

В большинстве источников, описывающих явление Гиббса, указывается, что колебания в выходном сигнале возникают из-за разрывов в исходном сигнале [1-4 и др.]. Отсюда вытекает, что для предотвращения явления Гиббса следует устранить разрывы во входном сигнале (т.е. сгладить его). Для проверки этого соображения воспользуемся блок-схемой, представленной на рис. 4.

Здесь ФНЧ 1 – идеальный фильтр нижних частот с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$k_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } |f| < F_{cp}, \\ 1/2 & \text{при } |f| = F_{cp}, \\ 0 & \text{при } |f| > F_{cp}, \end{cases} \quad (10)$$

действие которого приводит к возникновению явления Гиббса, ФНЧ 2 – предварительный сглаживающий фильтр, который должен устранить разрывы в сигнале, поступающем на вход ФНЧ 1.

В качестве примера рассмотрим действие идеального ФНЧ 2 с полосой пропускания $k_2(f) = nF_{cp}$, т.е. в n раз более широкой, чем у ФНЧ 1. Под действием ФНЧ 2 функция на входе ФНЧ 1 станет безразрывной. Однако из-за n -кратной разницы в полосах пропускания фильтр ФНЧ 1 просто «не заметит» действия фильтра ФНЧ 2 и того, что входная функция стала безразрывной – результат останется прежним, и явление Гиббса будет таким же, что и без предварительного сглаживающего ФНЧ 2.

По-видимому, само явление возникает не только из-за того, что входная функция имеет разрывы. Фактически его причиной является ограничение спектра входного сигнала идеальным фильтром ФНЧ 1, АЧХ которого имеет разрывы, а импульсная характеристика носит колебательный (осциллирующий) характер.

Отсюда следует, что для полного устранения явления Гиббса нужно, чтобы импульсная характеристика фильтра ФНЧ 1 не содержала колебаний. Соответственно, чтобы ослабить явление Гиббса требуется уменьшение амплитуды колебаний в импульсной характеристике ФНЧ 1. Например, при использовании ФНЧ 1 с безразрывной треугольной АЧХ, имеющей граничную частоту полосы пропускания $2F$, импульсная характеристика будет иметь вид

$$g_{imp}(t) = \sin^2(2\pi Ft) / (\pi t)^2, \quad (11)$$

благодаря чему амплитуда нежелательных колебаний в выходном сигнале существенно ослабляется.

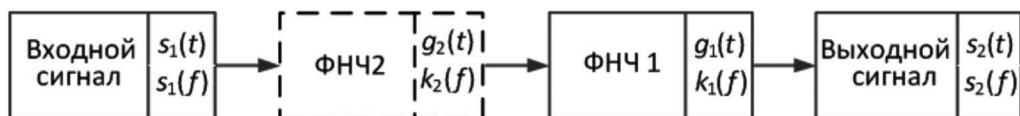


Рис. 4. Блок-схема преобразования сигнала с учетом действия фильтров

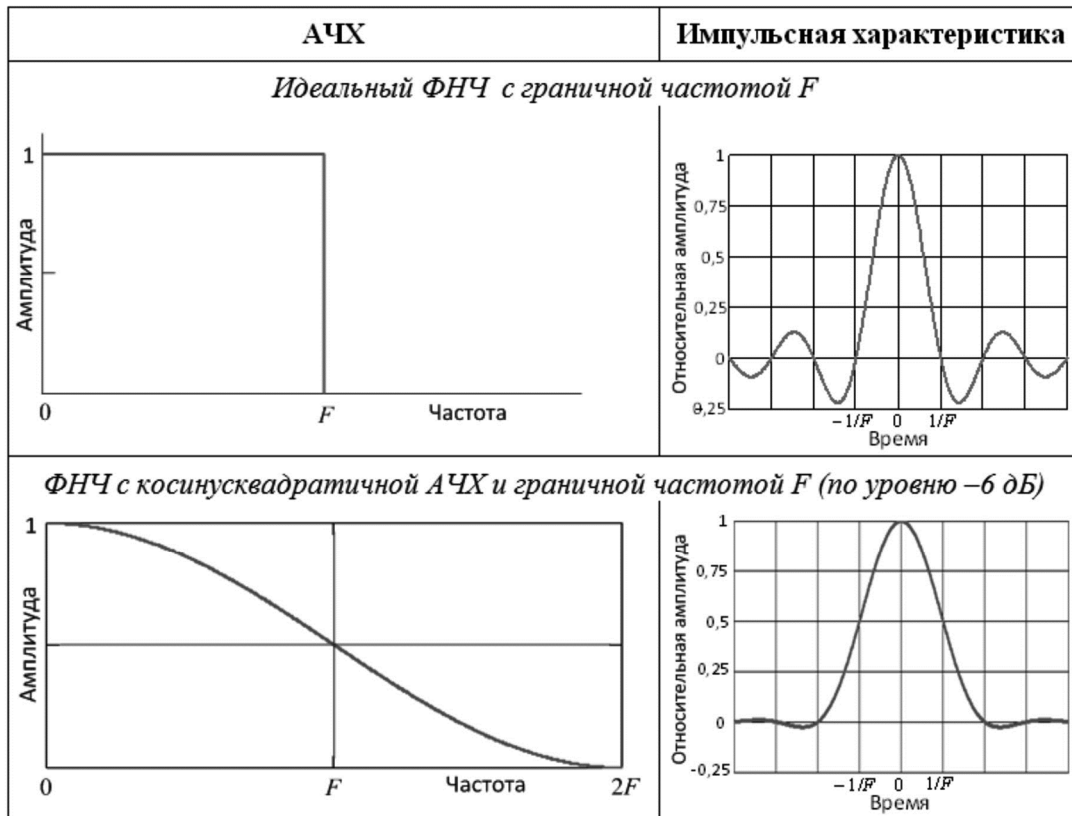


Рис. 5. Характеристики идеального и косинусквадратичного ФНЧ

Для полного устранения явления Гиббса необходимо использовать фильтр ФНЧ 1, в импульсной характеристике которого будут полностью отсутствовать колебательные процессы, что накладывает определенные ограничения на крутизну АЧХ этого фильтра. Изложенные соображения иллюстрирует рис. 5, где представлены АЧХ и импульсные характеристики двух видов фильтров:

– идеального фильтра нижних частот с граничной частотой F и колебательной импульсной характеристикой $\sin x/x$;

– фильтра нижних частот с косинусквадратичной АЧХ с граничной частотой F (по уровню -6 дБ) и импульсной характеристикой, в которой почти отсутствуют колебания (амплитуда колебаний на порядок ниже, чем у идеального фильтра), благодаря чему явление Гиббса для сигналов с разрывами также ослабляется на порядок.

Понятно, что такое ослабление амплитуды колебаний в разрывном сигнале происходит при любой полосе пропускания F фильтра нижних частот с косинусквадратичной АЧХ.

Таким образом, использование для ограничения спектра входной разрывной функции ФНЧ с неколебательной импульсной характеристикой исключает появление колебаний в выходном сигнале, порождающих явление Гиббса. При этом происходит плавное ограничение спектра входной разрывной функции.

Подбор формы характеристик ФНЧ позволяет устанавливать в выходном сигнале любое допустимое значение выбросов в местах разрывов – приблизительно от 9 % (явление Гиббса) до 0.

Применение оконных функций для устранения явления Гиббса

Альтернативный способ устранения или ослабления явления Гиббса основывается на применении оконных функций. Характеристики оконных функций и их фурье-образов подробно рассмотрены в [2, 8-10]. Отметим различия двух методов устранения явления Гиббса.

Действие фильтра нижних частот описывается операцией свертки входного сигнала с (неколебательной) импульсной характеристикой ФНЧ, благодаря чему исходная функция сглаживается, и разрывы устраняются. В частотной области это выражается перемножением спектра сигнала и АЧХ фильтра (фурье-образа импульсной характеристики).

Действие оконной (взвешивающей) функции – при спектральном анализе – описывается операцией перемножения входного сигнала и оконной функции. В частотной области это отображается сверткой спектра сигнала и спектра (фурье-образа) оконной функции. Нетрудно показать, что применение оконных функций в сигнальной области не приводит к сглаживанию спектра сигнала и не позволяет устранить явление Гиббса.

Проиллюстрируем действие оконной функции на том же меандре на примере косинусквадратичной функции, т.е. окна Хэннинга (Ханна) длительностью в k периодов меандра, где k – нечетное число:

$$p(t) = \cos 2(\pi t / kT) \times \Pi(t / kT). \quad (12)$$

Здесь для выделения одного периода косинусквадратичной функции использовано прямоугольное окно $\Pi(t/kT)$, определяемое как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < 1/2, \\ 1/2 & \text{при } |t| = 1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > 1/2. \end{cases} \quad (13)$$

В результате получаем взвешенную функцию меандра в виде

$$\begin{aligned} s_{1\text{эсб.}}(t) &= p(t) \times s_1(t) = \\ &= \cos^2(\pi t / kT) \times \Pi(t / kT) \sum_k \text{sig}(t - kT). \end{aligned} \quad (14)$$

Ее спектр выражается через свертку спектров сомножителей в (14):

$$\begin{aligned} s_{1\text{эсб.}}(f) &= p(f) \otimes s_1(f) = \\ &= \left[\frac{1}{2} \delta\left(f - \frac{1}{kT}\right) + \delta(f) + \frac{1}{2} \delta\left(f + \frac{1}{kT}\right) \right] \otimes \\ &\otimes \frac{\sin(kTf / 2)}{f / 2} \otimes \sum_m \frac{j}{m\pi} (\cos m\pi - 1), \end{aligned}$$

где k и m – нечетные числа.

Рис. 6 иллюстрирует вид спектра оконной функции $p(f)$. Его ширина на уровне 0,5 составляет $2/kT$, где T – период меандра, k – число периодов в анализируемом фрагменте. Понятно, что ширина $p(f)$ уменьшается с ростом k . Свертка $p(f)$ со спектром меандра $s_1(f)$ практически не оказывает влияния на конфигурацию этого спектра, поскольку шаг его составляющих (рис. 3) составляет $2/T$.

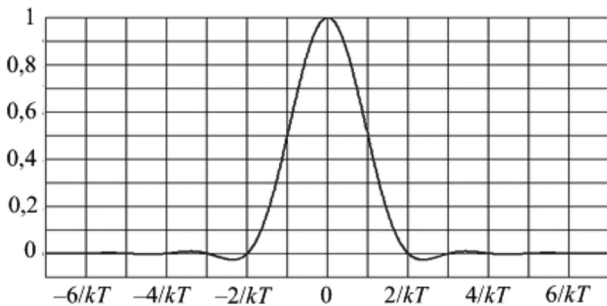


Рис. 6. Спектр оконной функции $p(f)$

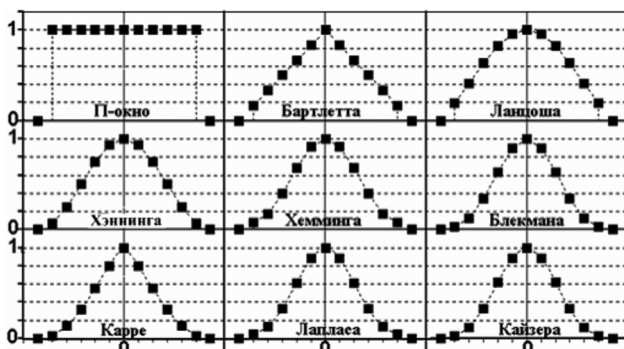


Рис. 7. Спектральные оконные функции (дискретизированные)

Устранение (или ослабление) явления Гиббса достигается применением оконных функций к спектру разрывного сигнала (о чем, правда, не всегда четко говорится в литературных источниках). При этом спектр сигнала перемножается с оконной функцией. Но в этом случае оконная функция может рассматриваться как АЧХ некоторого предварительного сглаживающего фильтра, действие которого подробно рассмотрено в предыдущем

разделе. На рис. 7 показаны некоторые известные оконные функции [9].

В предыдущем разделе действие оконной функции Хэннинга было продемонстрировано на примере ФНЧ с косинус квадратичной АЧХ.

Заключение

Явление Гиббса возникает из-за резкого ограничения спектра входной функции, имеющей разрывы первого рода. С радиотехнической точки зрения явление Гиббса порождается разрывностью амплитудно-частотной характеристики идеального ФНЧ, который описывает операцию ограничения спектра входной разрывной функции (т.е. отбрасывания высокочастотных составляющих ее ряда Фурье).

Для устранения или ослабления явления Гиббса следует ограничивать спектр разрывного сигнала с помощью ФНЧ с импульсной характеристикой, в которой отсутствуют или ослаблены колебательные процессы, т.е. с АЧХ, имеющей достаточно плавный спад. (При этом появляется возможность управления интенсивностью колебаний в выходном сигнале, которые в предельном случае применения идеального фильтра низких частот приводят к возникновению явления Гиббса.)

Применение для устранения или ослабления явления Гиббса спектральных оконных функций эквивалентно выбору для ограничения спектра разрывных функций фильтра низких частот с неколебательной импульсной характеристикой.

Указанные соображения полезно учитывать при изложении явления Гиббса в учебных курсах радиотехнических ВУЗов.

Литература

1. Анго Андре. Математика для электро- и радиоинженеров – М: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1965 – 780 с. – Глава II.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Том 1. – М.: Мир, 1983.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб: Питер, 2002 – 608 с. – главы 1 и 6.
4. Булыгин В.С. Явление Гиббса. – МФТИ, кафедра общей физики – методический материал [Электронный ресурс]. 23.10.2012. – 6 с. URL: https://mipt.ru/education/chair/Physics/S_III/Metod_3/G_t_an.
5. Gibbs phenomenon. [Электронный ресурс] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon/
6. Игнатьев Н.К. Дискретизация и ее приложения – М.: Связь – 1980 – 264 с.
7. Transforms and applications handbook / editor, Alexander D. Poularikas. – 3rd ed. – Boca Raton, FL, USA: Taylor and Francis Group – 2010. – 853 p.
8. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. – ТИИЭР – 1978, т. 66. – № 1. – С. 60-96.
9. Давыдов А.В. Тема 3: Весовая функция [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-davydovleksiipocifrovojobrabotkesignalov03-effektgibbsaivesovie.pdf>. 2004 – 8 с.
10. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов – Издание второе, переработанное и дополненное – М.: Техносфера, 2016. – 208 с.