

УДК 621.391.833

О ТОЧНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Поршнев С.В., д.т.н., профессор, директор подразделения «Учебно-научный центр «Информационная безопасность»» Уральского федерального университета, ведущий научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, e-mail: sergey_porshnev@mail.ru;

Кусайкин Д.В., к.т.н., доцент кафедры МЭС УрТИСИ СибГУТИ, доцент подразделения «Учебно-научный центр «Информационная безопасность»» УрФУ, г. Екатеринбург, e-mail: kusaykin@mail.ru.

ON ACCURACY OF TRIGONOMETRIC INTERPOLATION

Porshnev S.V., Kusaykin D.V.

In this paper mean square error Δu_N^2 (N – is order of trigonometric polynomial) of a trigonometric interpolation of a periodic signal $u(t) = \sin(2\pi f_s t)$ is calculated. The results are obtained for the case when interpolation time interval $[0, T_s]$ contains non-integer number of the signal periods ($f_s T_s \neq \text{const}$). It is proved that contrary to popular opinion error $\Delta u_N^2 \neq 0$ even if $N \rightarrow \infty$, but it tend to some value depending on $f_s T_s$. Analytical expressions for the lower bound estimation of Δu_N^2 are obtained.

Key words: trigonometric interpolation, signal reconstruction, interpolation error, trigonometric polynomial, Fourier series, mean square error reconstruction.

Ключевые слова погрешность тригонометрической интерполяции, ошибка восстановления сигнала, интерполяционный тригонометрический полином, ряд Фурье, среднеквадратическая ошибка восстановления.

Введение

Тригонометрическая интерполяция, неразрывно связанная с преобразованием Фурье, сегодня является неотъемлемой частью вычислительной математики и теории сигналов. Она рассматривается как в известных учебниках по высшей математике [1-4 и др.], так и в монографиях, посвященных теории интерполирования и приближения функций [4].

Отметим, что тригонометрическая интерполяция находит широкое применение в цифровой обработке сигналов, например, при решении задачи восстановления дискретного сигнала (ДС), передискретизации ДС [5-10]. При этом, однако, часто не учитывается, что теория тригонометрической интерполяции построена для периодических функций $f(t) = f(t+T)$, для которых доказана следующая теорема [1]:

Теорема. Коэффициенты интерполяционного тригонометрического полинома порядка N

$$g_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_n \cos(k\omega_0 t) + b_n \sin(k\omega_0 t), \quad (1)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_s$, $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{N} – множество натуральных чисел, являющегося решением задачи интерполяции:

$$f(t_i) = x_i, \quad t_i = \frac{T_s}{2N+1} i, \quad i = \overline{0, 2N}, \quad (2)$$

вычисляются по формулам:

Вычислена среднеквадратическая погрешность тригонометрической интерполяции Δu_N^2 , N – порядок тригонометрического полинома, дискретного сигнала (ДС), представляющего собой значения периодической функции $u(t) = \sin(2\pi f_s t)$, вычисленные в узлах временной сетки (ВС) $t_i = \frac{T_s}{2N+1} i$, $i = \overline{0, 2N}$, T_s – интервала интерполяции, для случая $f_s T_s \neq \text{const}$ укладывается нецелое число периодов. Доказано, что предел данной величины, вопреки устоявшимся представлениям, не равен нулю, но стремится к некоторому значению, зависящему от $f_s T_s$. Получены аналитические выражения для вычисления оценок Δu_N^2 при различных значениях $f_s T_s$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j, \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j \cos(k\omega_0 t_j) = \\ &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} x_j \cos\left(\frac{2\pi}{2N+1} j\right), \end{aligned} \quad (3)$$

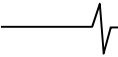
$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} x_j \sin(k\omega_0 t_j) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} x_j \sin\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right),$$

которые совпадают с коэффициентами ряда Фурье. Отметим, что в данном подходе число отсчетов ДС должно быть нечетным.

Однако на практике во многих случаях значения восстанавливаемого ДС оказываются заданными в узлах другой временной сетки:

$$f(t_i) = x_i, \quad t_i = \frac{T_0}{2N+1} i, \quad i = \overline{0, 2N},$$

где $T_0 \neq T_s$, на которой $f(0) \neq f(T_0)$, а в (1) $\omega_0 = 2\pi/T_0$.



В тоже время известно, что в соответствии с теоремой Дирихле для того чтобы ряд Фурье $g_N(t)$, вычисленный на интервале $[0, T_0]$, сходиллся к непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной функции $f(t)$, данная функция должна отвечать условию Дирихле [1]:

$$g_N(0) = g_N(T_s) = \frac{1}{2} [f(0-) + f(T_0+)],$$

которое при $T_s \neq nT$, n – произвольное целое число, не выполняется. В этой ситуации с неизбежностью при формальном использовании тригонометрического полинома будет возникать соответствующая погрешность интерполяции (восстановления ДС). Однако найти формул для оценок значений погрешности, обусловленной невыполнением условий Дирихле на интервале интерполяции, в многочленных работах по теории тригонометрической интерполяции не удается. В этой связи анализ влияния нарушений условий Дирихле на точность тригонометрической интерполяции представляется актуальным.

В статье получены соответствующие формулы для оценки среднеквадратической погрешности тригонометрической интерполяции.

Постановка задачи

Вычислить среднеквадратическую погрешность тригонометрической интерполяции периодического сигнала

$$f(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s}\right) = \sin(2\pi f_s t)$$

при решении следующей интерполяционной задачи:

$$x_j = \sin(2\pi f_s t_j) = \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right), \quad (4)$$

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad j = \overline{0, 2N}.$$

Погрешность тригонометрической интерполяции сигнала при невыполнении условий Дирихле

Для нахождения формулы для вычисления среднеквадратической погрешности тригонометрической интерполяции вычислим значения коэффициентов тригонометрического полинома. Для этого, подставив (4) в (3), получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi f_s T_0}{2N+1} j\right), \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1} j\right), \\ b_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{2N+1} j\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{2N+1}, \quad (6)$$

тогда

$$\alpha + \beta_k = \frac{2\pi \cdot (f_s T_0 + k)}{2N+1}, \quad \alpha - \beta_k = \frac{2\pi \cdot (f_s T_0 - k)}{2N+1} \quad (7)$$

В выбранных обозначениях

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j), \\ a_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \cos(\beta_k j), \\ b_k &= \frac{2}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \sin(\beta_k j). \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} \alpha\right) \sin(N\alpha)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \cos(\beta_k j) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2N} \sin((\alpha + \beta_k) j) + \sin((\alpha - \beta_k) j) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha + \beta_k)\right) \sin(N(\alpha + \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta_k}{2}\right)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha - \beta_k)\right) \sin(N(\alpha - \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta_k}{2}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N} \sin(\alpha j) \cdot \sin(\beta_k j) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2N} \cos((\alpha - \beta_k) j) - \cos((\alpha + \beta_k) j) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha - \beta_k)\right) \cos(N(\alpha - \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta_k}{2}\right)} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} (\alpha + \beta_k)\right) \cos(N(\alpha + \beta_k))}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta_k}{2}\right)}, \end{aligned}$$

и подставив в данные выражения (7) находим искомые выражения для коэффициентов тригонометрического полинома a_0, a_k, b_k :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2(2N+1)} \frac{\sin(\pi f_s T_0) \sin\left(\frac{2\pi N f_s T_0}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2N+1}\right)}, \\ a_k &= \frac{1}{2N+1} \times \\ &\times \left[\frac{\sin(\pi (f_s T_0 + k)) \sin\left(\frac{2\pi N (f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi (f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)} + \right. \\ &\left. \frac{\sin(\pi (f_s T_0 - k)) \sin\left(\frac{2\pi N (f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi (f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\sin(\pi(f_s T_0 - k)) \sin\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} + \right. \\
 & b_k = \frac{1}{2N+1} \times \\
 & \left. \times \left[\frac{\sin(\pi(f_s T_0 - k)) \cos\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 - k)}{2N+1}\right)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\sin(\pi(f_s T_0 + k)) \cos\left(\frac{2\pi N(f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(f_s T_0 + k)}{2N+1}\right)} \right] \right.
 \end{aligned}$$

Из (9) видно, что коэффициенты тригонометрического полинома a_0, a_k, b_k оказываются зависящими, как от числа отсчетов ДС, число которых равняется $2N + 1$, так и от величины $f_s T_0$ являющейся мерой количества периодов восстанавливаемой периодической функции, укладываемых на временном интервале $[0, T_s]$. В связи с тем, что при произвольном выборе T_s на временном интервале $[0, T_s]$ может укладываться, как целое число периодов сигнала $N_p \in \mathbb{N}$, (\mathbb{N} – множество натуральных чисел, функции $f(t)$), так и доля периода ΔN_p , введем следующее обозначение:

$$T_0 f_s = N_p + \Delta N_p. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и выполняя элементарные тригонометрические преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2(2N+1)} \frac{\sin(\pi \Delta N_p) \sin\left(\pi \Delta N_p - \frac{\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}, \\
 a_k &= \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \times \\
 & \times \left[(-1)^{N_p+k} \frac{\sin\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} + \right. \\
 & \left. + (-1)^{N_p-k} \frac{\sin\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right], \\
 b_k &= \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \times
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[(-1)^{N_p-k} \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} - \right. \\
 & \left. - (-1)^{N_p+k} \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Из (11) видно, что при $\Delta N_p = 0$

$$a_0 = a_k \equiv 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \lim_{\Delta N_p \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \Delta N_p)}{2N+1} \left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p-k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p+k+\Delta N_p)}{2N+1}\right)} \right] = \begin{cases} 1, & k = N_p, \\ 0, & \neq N_p, \end{cases}
 \end{aligned}$$

то есть отличным от нуля оказываются все коэффициенты тригонометрического полинома (1) за исключением, коэффициента b_{N_p} при функции

$$\sin(N_p \omega_0 t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s} N_p t\right).$$

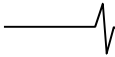
Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $T_0 = N_p \cdot T_s$, получаем

$$\sin(N_p \omega_0 t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s N_p} N_p t\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_s} t\right).$$

Таким образом, тригонометрический полином совпадает с интерполируемым тригонометрическим сигналом, и, соответственно, погрешность интерполяции тождественно равняется нулю. Напомним, что с точки зрения теории ортогональных сигналов, выражение (1) есть разложение функции $f(t)$ по системе ортогональных базисных функций $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$, поэтому в рассматриваемом случае можно говорить о том, что на интервале $[0, T_0]$ функция $f(t)$ оказывается точно ортогональной базису, составленному из тригонометрических функций $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$.

Если $\Delta N_p \neq 0$, то как видно из (11), для всех $a_0, a_k, b_k \neq 0$ и, следовательно, $f(t) \neq g_N(t)$, поэтому среднеквадратическая погрешность интерполяции

$$\Delta_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (f(t) - g_N(t))^2 dt \neq 0, \quad (12)$$



где $\hat{T}_0 = \frac{2N}{2N+1}T_0$ – значение координаты $2N$ -го узла используемой временной сетки.

Данный результат с точки зрения теории ортогональных сигналов означает, что функция $f(t)$ на интервале $[0, T_0]$ оказывается неортогональной использованной системе ортогональных базисных функций $\cos(k\omega_0 t), \sin(k\omega_0 t)$. $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

Отметим, что существует устоявшаяся точка зрения о погрешности тригонометрической интерполяции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N^2 = 0,$$

однако, ее доказательства в многочисленных учебниках, монографиях и статьях, посвященных тригонометрической интерполяции, обнаружить, не удалось. Для подтверждения либо опровержения данной точки зрения следует вычислить интеграл

$$\Delta \bar{u}_N^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \times \int_0^{\hat{T}_0} [f(t) - (a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right)]]^2 dt, \quad (13)$$

где коэффициенты a_0, a_k, b_k вычисляются в соответствии с (11).

Выполнив в (13) очевидные, но достаточно громоздкие вычисления, приведенные в Приложении 1, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_N^2 = & \bar{f}^2 - 2a_0 \bar{f} - \sum_{k=1}^N [a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k] + a_0^2 + \\ & + \left(1 + \frac{1}{2N(2N+1)}\right) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2\right) + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right) - \\ & - 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right)\right)\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) dt, \quad \bar{f}^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f^2(t) dt, \\ \hat{a}_k &= \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt, \\ \hat{b}_k &= \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив в (15) интерполируемую функцию $\sin(2\pi f_s t)$, вычислив соответствующие интегралы и заменив $f_s T_0$ на $N_p + \Delta N_p$ в соответствии с (10), получаем:

$$\bar{f} = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) dt =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2N}\right) \frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \Delta N_p - \pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p)},$$

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin^2(2\pi f_s t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2N}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi \Delta N_p - 2\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p) - \frac{2\pi(N_p + \Delta N_p)}{2N+1}},$$

$$\hat{a}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt =$$

$$= \frac{\sin^2\left(\pi(N_p + \Delta N_p + k) \frac{2N}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p + k) \frac{2N}{2N+1}} -$$

$$- \frac{\sin^2\left(\pi(N_p + \Delta N_p - k) \frac{2N}{2N+1}\right)}{\pi(N_p + \Delta N_p - k) \frac{2N}{2N+1}},$$

$$\hat{b}_k = \frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \sin(2\pi f_s t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(2\pi(N_p + \Delta N_p - k) \frac{2N}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p - k) \frac{2N}{2N+1}} -$$

$$- \frac{\sin\left(2\pi(N_p + \Delta N_p + k) \frac{2N}{2N+1}\right)}{2\pi(N_p + \Delta N_p + k) \frac{2N}{2N+1}} \right).$$

Для анализа зависимости погрешности Δu_N от N вычислим пределы $a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \bar{f}, \bar{f}^2$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi \Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_k = \frac{\sin(\pi \Delta N_p)^2}{\pi} \times$$

$$\times 2(N_p + \Delta N_p) \left(\frac{1}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_k = \frac{\sin(2\pi \Delta N_p)}{\pi} \left(\frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right).$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}_k = \frac{\sin(\pi \Delta N_p)^2}{\pi} \times$$

$$\times 2(N_p + \Delta N_p) \left(\frac{1}{(N_p + \Delta N)^2 - k^2} \right),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_k = \frac{\sin(2\pi\Delta N_p)}{\pi} \left(\frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)}$$

Анализ выражений для пределов $a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k, \bar{f}, \bar{f}^2$ позволяет сделать вывод о том, что при $N \rightarrow \infty$ данные коэффициенты оказываются независимыми от N и отличными от нуля. При этом $\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}_k = A_k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} b_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{b}_k = B_k.$

Переходя в (14) к пределу и используя значения вычисленных пределов $a_0, a_k, b_k, \hat{a}_k, \hat{b}_k$ и \bar{f} , находим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta u_N^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N B_k^2 \right] \right), \quad (16)$$

где

$$\sum_{k=1}^N A_k^2 = S_A(N, N_p, \Delta N_p) = \frac{\sin^4(\pi\Delta N_p)}{\pi^2} 4(N_p + \Delta N_p)^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^N B_k^2 = S_B(N, N_p, \Delta N_p) = \left(\frac{\sin(2\pi\Delta N_p)}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2.$$

Так как $\sum_{k=1}^N \left(\frac{\Delta N_p}{(N_p - k)^2 + (\Delta N_p)^2} \right)^2 < \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^4},$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{(N_p + \Delta N_p)^2 - k^2} \right)^2 < \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}, \quad \text{а} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, при $\Delta N_p \neq 0$ и $N \rightarrow \infty$ данные ряды будут сходящимися, что позволяет сразу записать выражение для вычисления оценки нижней границы погрешности тригонометрической интерполяции периодической функции $f(t)$ при $N \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$:

$$[\Delta u_N]_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta N_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left(\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{\pi(N_p + \Delta N_p)} \right)^2 -$$

$$- \frac{\pi^4}{180} \sin^2(\pi\Delta N_p) - \frac{\sin^2(\pi\Delta N_p)}{24}. \quad (17)$$

Из (17) видно, что минимальное значение погрешности тригонометрической интерполяции при $N \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$ оказывается зависящим от $N_p, \Delta N_p$ и отличным от нуля. Таким образом, выражение (17) доказывает, что при $N \rightarrow \infty, \forall \Delta N_p \neq 0$ предположение $\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta u_N^2} = 0$, оказывается неверным.

Анализ влияния длительности интервала интерполяции на точность тригонометрической интерполяции периодического ДС

Для изучения вопроса о зависимости точности тригонометрической интерполяции периодического ДС от длительности интервала интерполяции введем в рассмотрение временную сетку

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad j = 0, 2(N + \Delta N) = 0, 2\tilde{N}, \quad (18)$$

использование которой эквивалентно переходу от решения задачи тригонометрической интерполяции на временном интервале $[0, T_0]$ к решению данной задачи на

интервале $[0, \tilde{T}_0]$, где $\tilde{T}_0 = T_0 \left(1 + \frac{2\Delta N}{2N+1} \right)$: N – число от-

счетов ДС на интервале $[0, T_0]$, $2\Delta N$ – количество добавленных отсчетов. Тогда в рассматриваемом случае задача имеет следующую формулировку:

восстановить по таблице

$$t_j = \frac{T_0}{2N+1} j, \quad x_j = \sin \left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j \right), \quad j = 0, 2\tilde{N}. \quad (19)$$

с помощью тригонометрического полинома (1) значения периодической функции $f(t)$.

Отметим, что рассматриваемая задача решается на временном интервале $[0, \tilde{T}_0]$, поэтому следует заменить

в (1) $\omega_0 = 2\pi/T_0$ на $\tilde{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\tilde{T}_0} = 2\pi/T_0 \left(1 + \frac{2\Delta N}{2N+1} \right)$ и, со-

ответственно, вычислять коэффициенты интерполирующего полинома $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j, \\ \tilde{a}_k &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \cos(k\omega_0 t_j) = \\ &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \cos \left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j \right) = \\ &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} \sin \left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j \right) \cos \left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j \right), \\ \tilde{b}_k &= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \sin(k\omega_0 t_j) = \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} x_j \sin\left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j\right) = \\
&= \frac{2}{2\tilde{N}+1} \sum_{j=0}^{2\tilde{N}} \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} j\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} j\right).
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1}, \tilde{\beta}_k = \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1},$$

тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}_k &= \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} - \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} = \\
&= 2\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right) / (2\tilde{N}+1),
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}_k &= \frac{2\pi \cdot f_s T_0}{2N+1} + \frac{2\pi k}{2\tilde{N}+1} = \\
&= 2\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right) / (2\tilde{N}+1).
\end{aligned}$$

Сравнивая (21) и (7), видим, что для получения выражений для вычисления коэффициентов тригонометрического полинома \tilde{a}_k, \tilde{b}_k следует заменить в (9) $f_s T_0$ на $f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[\frac{\sin\left(\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[\frac{\sin\left(\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} - k \right)\right)} - \right. \\
&\left. - \frac{\sin\left(\pi \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} \left(f_s T_0 \frac{(2\tilde{N}+1)}{(2N+1)} + k \right)\right)} \right],
\end{aligned} \tag{22}$$

но

$$\frac{2\tilde{N}+1}{2N+1} = 1 + \frac{2\Delta N}{2N+1},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin\left(\pi f_s T_0 \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right) \sin\left(2\tilde{N} \frac{2\pi f_s T_0}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2N+1}\right)} = \\
&= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin\left(\pi f_s T_0 \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right) \sin\left(\frac{2\pi f_s T_0 2\tilde{N}}{2\tilde{N}+1} \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f_s T_0}{2\tilde{N}+1} \frac{2\tilde{N}+1}{2N+1}\right)}, \\
\tilde{a}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[\frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 + k)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 - k)\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)} \right],
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_k &= \frac{1}{2\tilde{N}+1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left[\frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 - k)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 - k)\right)} - \right. \\
&\left. - \frac{\sin\left(\pi (f_s \tilde{T}_0 + k)\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{N}}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\tilde{N}+1} (f_s \tilde{T}_0 + k)\right)} \right].
\end{aligned}$$

Обозначив, как и ранее (см. (10)),

$$f_s \tilde{T}_0 = \tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p,$$

и сравнив (23) с (9), соответственно, сразу записываем окончательные выражения для вычисления значений коэффициентов тригонометрического полинома \tilde{a}_k, \tilde{b}_k , аналогичные выражениям (11):

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{2(2\tilde{N}+1)} \frac{\sin(\pi \Delta \tilde{N}_p) \sin\left(\pi \Delta \tilde{N}_p - \frac{\pi(\tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}, \\
\tilde{a}_k &= \frac{\sin(\pi \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi \tilde{N}(\tilde{N}_p + k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p + k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} + \right. \\
&\left. + \frac{\sin\left(\frac{2\pi \tilde{N} \pi(\tilde{N}_p - k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p - k + \Delta \tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} \right],
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\tilde{b}_k = \frac{\sin(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1} \left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi\tilde{N}(\tilde{N}_p - k + \Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\tilde{N}_p - k + \Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi N(\tilde{N}_p + k + \Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(N_p + k + \Delta\tilde{N}_p)}{2\tilde{N}+1}\right)} \right]$$

а также выражения для среднеквадратического значения погрешности тригонометрической интерполяции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\Delta\tilde{u}_N^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\pi(N_p + \Delta N_p)} - \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{A}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \tilde{B}_k^2 \right] \right],$$

где

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{A}_k^2 = S_A(\tilde{N}, \tilde{N}_p, \Delta N_p) = \frac{\sin^4(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi^2} 4(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{1}{(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 - k^2} \right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^N \tilde{B}_k^2 = S_B(\tilde{N}, \tilde{N}_p, \Delta\tilde{N}_p) = \left(\frac{\sin(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)^2 - k^2} \right)^2$$

и выражение для вычисления оценки нижней границы погрешности тригонометрической интерполяции периодической функции $f(t)$ при $\tilde{N} \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$:

$$\left[\overline{\Delta\tilde{u}_N^2} \right]_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2\pi\Delta\tilde{N}_p)}{2\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} - \left(\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{\pi(\tilde{N}_p + \Delta\tilde{N}_p)} \right)^2 - \frac{\pi^4}{180} \sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p) - \frac{\sin^2(\pi\Delta\tilde{N}_p)}{24}. \tag{25}$$

Из (25) видно, что минимальное значение погрешности тригонометрической интерполяции при $N \rightarrow \infty, N_p \gg 1, \Delta N_p \neq 0$, как и в предыдущем случае, оказывается зависящим от $N_p, \Delta N_p$ и отличным от нуля.

Заключение

Проведен анализ погрешности тригонометрической интерполяции периодического сигнала, результаты которого свидетельствуют о том, что вне зависимости от способа увеличения числа отсчетов ДС среднеквадратическая погрешность тригонометрической интерполяции, в том случае, когда восстанавливаемая периодическая функция не удовлетворяет условиям Дирихле

($f(0) \neq f(T_0)$, что эквивалентно $\Delta N_p \neq 0$), вопреки устойчивым представлениям стремится не к нулю, но к некоторому значению, зависящему от $N_p, \Delta N_p$, как в случае $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p = \text{const}, \Delta N_p \neq 0$, так и в случае $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$.

Получены выражения для оценки нижней границы среднеквадратической ошибки тригонометрической интерполяции периодической функции для случаев $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p = \text{const}, \Delta N_p \neq 0$ и $\tilde{N} \rightarrow \infty, N_p \rightarrow \infty, \Delta N_p \neq 0$.

Данные результаты, объясняют результаты численного исследования точности тригонометрической интерполяции, опубликованные авторами в [11-12].

Приложение 1

$$\Delta u_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[f(t) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) \right]^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f^2(t) dt -$$

$$- \frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt.$$

Вычисляем второй интеграл в (П.1):

$$\frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} f(t) \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right) dt = 2a_0 \bar{f} + \sum_{k=1}^N \left[a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k \right], \tag{П.2}$$

где $\bar{f}, \hat{a}_k, \hat{b}_k$ определены в (19).

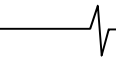
Вычисляем третий интеграл в (П.1):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt = a_0^2 + \frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt \tag{П.3}$$

Вычисляем второй интеграл в (П.3):

$$\frac{2}{T_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt = \frac{a_0 T_0}{\pi \hat{T}_0} \sum_{k=1}^N \left[\frac{a_k}{k} \sin\left(\frac{2\pi \hat{T}_0}{T_0}\right) + \frac{b_k}{k} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \hat{T}_0}{T_0}\right) \right) \right]. \tag{П.4}$$

Принимая во внимание, что $T_0/\hat{T}_0 = (2N+1)/2N$, получаем



$$\frac{2}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} a_0 \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] dt = \quad (\text{П.5})$$

$$= \frac{2N+1}{2N} \frac{a_0}{\pi} \sum_{k=1}^N \left[-\frac{a_k}{k} \sin\left(\frac{2\pi}{2N+1}\right) + \frac{2b_k}{k} \sin^2\left(\frac{\pi}{2N+1}\right) \right].$$

Вычисляем третий интеграл в (П.3):

$$\frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt = \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{2N+1}{2N} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt + \right.$$

$$\left. \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt \right).$$

Вычислим первый интеграл в (П.6):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \left[\left(a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right) \right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N a_k^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt + \sum_{k=1}^N b_k^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2.$$

Здесь принято во внимание, что функции $\cos\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi m}{T_0} t\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right)$ при $k \neq m$ ортогональны друг другу.

Вычисляем второй интеграл в (П.6):

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{T_0}{2N+1} - \frac{1}{2} \frac{T_0}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) -$$

$$- \frac{T_0}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) + \frac{1}{2} \frac{T_0}{2N+1} + \frac{1}{2} \frac{T_0}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right]^2 dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$- 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right) +$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right).$$

Записываем окончательное выражение для интеграла (П.6):

$$\frac{1}{\hat{T}_0} \int_0^{\hat{T}_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right] \right)^2 dt =$$

$$a_0^2 + \frac{2N+1}{2N} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2N(2N+1)} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) + \quad (\text{П.7})$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right).$$

Подставляя (П.2), (П.3), (П.7) в (П.1) записываем окончательное выражение для вычисления среднеквадратической погрешности:

$$\Delta \bar{u}_N^2 = \bar{f}^2 + 2a_0 \bar{f} + \sum_{k=1}^N \left[a_k \hat{a}_k + b_k \hat{b}_k \right] +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{2N(2N+1)} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k^2}{2} \left(\frac{1}{4\pi k} \sin\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^N a_k b_k \left(\frac{1}{8\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi k}{2N+1}\right) \right) \right).$$

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
2. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. – Минск: Высшая школа, 1968. – 320 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1964. – Т. 2. – 463 с.
4. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций 1954. 327 с.
5. Schmitter D., Delgado R., Unser M., Trigonometric Interpolation Kernel to Construct Deformable Shapes for User-Interactive Applications, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 22, No. 11, November, 2015.

6. Fu D., Willson A. N., Trigonometric polynomial interpolation for timing recovery, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, Volume: 52, Issue: 2, Feb. 2005, pp. 338-349.

7. Petra N., Willson A.N., A High-Speed and High-Accuracy Interpolator for Digital Modems, 2008 15th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, 31 Aug. – 3 Sept. 2008.

8. Li J., Song L., Ch. Liu, The Cubic Trigonometric Automatic Interpolation Spline, IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, Volume 5, Issue: 6, November 2018, pp. 1136-1141.

9. Abbas S., Irshad M., Hussain M. Z., Adaptive image interpolation technique based on cubic trigonometric B-spline

representation, IET Image Process., 2018, Vol. 12 Issue 5, pp. 769-777.

10. Selva J., Convolution-Based Trigonometric Interpolation of Band-Limited Signals, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 56, No. 11, Nov. 2008, pp. 5465-5477.

11. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Точность восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Электросвязь, №7, с. 45-50, 2017.

12. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Особенности восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Известия высших учебных заведений. Приборостроение, №6, с. 504-512, 2017.

Секция 8: Системы технического зрения, искусственного интеллекта и робототехники

Новая секция была введена вместо секции «Многомерная обработка сигналов», общие теоретические вопросы которой, связанные с многомерной фильтрацией, были переданы на секцию «Теория и методы цифровой обработки сигналов», а вопросы обработки изображений, как пример двумерной обработки, логически были отнесены к обработке изображений, расширяя ее в область технического зрения, распознавания образов, искусственного интеллекта и робототехники.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:



– биологически подобные методы анализа видеоинформации для систем технического зрения;

– применение шрифт-преобразования для внедрения цифровых водяных знаков на изображение;

– идентификация колебательных систем в кадрах видеопоследовательности;

– структурные особенности сверточных нейронных сетей для задач распознавания изображений;

– метод повышения разрешения с использованием сверточной нейронной сети;

– интерпретация весовых коэффициентов и функций активации искусственных нейронных сетей;

– автоматический анализ эндоскопических

изображений для выявления и сегментации полипов;

– уравнения управления параметрами работы фотоприемной матрицы в прикладных телевизионных системах, адаптивных к динамике наблюдаемой сцены;

– использование нейронных сетей ALEXNET и U-NET в задаче сегментации гистологических изображений;

– использование сверточной нейронной сети SSD для детектирования патологий при эндоскопии желудка;

– редактирование шума в изображении на основе пороговой нейронной сети;

– диагностирование болезни Альцгеймера с помощью трёхмерной сверточной нейросети, основанной на архитектуре INCEPTION;

– разработка архитектуры нейронной сети с адаптивной точкой экстремума функции активации;

– адаптивная обработка сигналов в масштабируемых и реконфигурируемых мемристивных синаптических структурах для сетей искусственных импульсных нейронов;

– обзор сферических мобильных роботов;

– реализация алгоритмов технического зрения на манипуляторе, расположенного на мобильной платформе;

– обзор применения аппарата мультиагентных систем в робототехнике.