

ПРЯМОЕ БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО ОСНОВАНИЮ ДВА С ВЫСОКИМ ЧАСТОТНЫМ РАЗРЕШЕНИЕМ

Осипов О.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова, e-mail: osipov.fft@yandex.ru.

DIRECT FAST FOURIER TRANSFORMATION ON THE RADIX-2 WITH HIGH FREQUENCY RESOLUTION

Osipov O.V.

A simple-to-implement FFT algorithm for constructing a spectral characteristic of a signal with a high frequency resolution is presented, which has algorithmic complexity $O(N \cdot R \cdot \log_2 N)$, where N is the number of signal samples, $N \times R$ is the length of a set of frequencies. The algorithm can be used to develop Russian systems of digital signal processing with high resolution.

Key words: FFT algorithm, spectral characteristic, high frequency resolution, digital signal processin.

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье (БПФ), спектральный анализ, высокое разрешение, сдвиг частоты, проблемы цифровой обработки сигналов (ЦОС), частотно-временное разрешение, численный алгоритм БПФ, амплитудно-частотная характеристика.

Введение

Классический алгоритм БПФ [1] используется для представления дискретного сигнала в виде суммы гармоник с равноотстоящими друг от друга частотами. Так как длина набора частот при этом равна количеству отсчётов исходного сигнала, возникают определённые проблемы [2, 3] при использовании БПФ:

Трудно определить амплитуду гармоники какой-либо промежуточной частоты, не входящей в набор частот;

Для увеличения разрешения по частоте приходится увеличивать длительность сигнала, что приводит к задержкам при обработке входного сигнала в системах реального времени, а также потере информации о высоких частотах;

Малое количество информации о низкочастотных гармониках, особенно при обработке данных в логарифмической шкале частот (распознавание нот) [4].

Существует ряд приёмов, позволяющих увеличить разрешение по частоте: увеличение длины исходной последовательности за счёт добавления нулевых элементов, полифазное БПФ [5, 6]. Но такие методы являются неестественными, поскольку вычисляют преобразование Фурье не исходного сигнала, а предварительно изменённого.

Для создания алгоритма, не искажающего исходный сигнал, способного за приемлемое время вычислять спектральные характеристики сигналов с высоким частотным разрешением для сигналов небольшой длины, проанализируем математический вывод алгоритма обычного БПФ с прореживанием по времени. В основе своей он опирается на так называемую операцию «бабочка», которая оптимизирует процесс численного инте-

Представлен простой в реализации алгоритм БПФ для построения спектральной характеристики сигнала с высоким частотным разрешением, имеющий алгоритмическую сложность $O(N \cdot R \cdot \log_2 N)$, где N – количество отсчётов сигнала, $N \times R$ – длина набора частот. Алгоритм может быть использован для разработки российских систем цифровой обработки сигналов с высокой разрешающей способностью.

грирования двух функций, аргументы которых отличаются на величину $F/2$, где F – частота дискретизации сигнала:

$$\begin{aligned} A(v) &= \sum_{i=0}^{N-1} S_i e^{-2\pi j i v} = \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} S_{2i} e^{-2\pi j i_2 v} + e^{-2\pi j i_2 v} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} S_{2i+1} e^{-2\pi j i_2 v}, \\ A\left(v + \frac{F}{2}\right) &= \sum_{i=0}^{N-1} S_i e^{-2\pi j i (v + F/2)} = \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} S_{2i} e^{-2\pi j i_2 v} - e^{-2\pi j i_2 v} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} S_{2i+1} e^{-2\pi j i_2 v}. \end{aligned} \quad (1)$$

При выводе различных алгоритмов БПФ обычно записывают $N/2$ пар таких полиномов для частот

$$v_k = \frac{kF}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

После этого можно рекурсивно, либо с помощью обратной перестановки битов быстро вычислять значения сумм $A(v_k)$, разделяя исходную последовательность на две равные части и повторяя для них ту же операцию (1). Идея найденного метода основывается на наблюдении, что операция «бабочка» (1) сокращает при каждом её использовании в 2 раза количество вычислений даже в том случае, если равномерно сдвинуть весь набор частот v_k на произвольную частоту Δv . Последовательно увеличивая Δv , можно несколько раз выполнить БПФ, а из результатов собрать амплитудно-частотную характеристику, которая будет иметь малый шаг по частоте, а сле-

довательно – высокое разрешение. Длину исходного сигнала S при этом увеличивать не требуется.

Постановка задачи

Для комплексного сигнала S_i ($i=0, \dots, N-1$) с частотой дискретизации F , заданного в моменты времени t_i с шагом Δt , необходимо за приемлемое время получить значения $A(v_m)$, $v_m = \frac{mF}{NR}$, $m=0, \dots, NR-1$, $N \in 2^p$, $R, p \in \mathbb{N}$. Параметр R определяет разрешение спектральной характеристики.

Алгоритм БПФ с частотным сдвигом

Сначала построим упомянутый выше алгоритм вычисления БПФ для набора частот

$$\frac{kF}{N} + \Delta v \quad (k=0, \dots, N-1), \quad (2)$$

где Δv – произвольная частота (сдвиг частоты).

Полагая $F\Delta t = 1$ в (1), введём обозначения:

$$B(S, N, k) = \sum_{i=0}^{N-1} S_i e^{-2\pi j \frac{ik}{N}}, \quad W(k, N) = e^{-2\pi j \frac{k}{N}},$$

$$S^{(0)} = \{S_{2i}\}_{i=0, \dots, \frac{N}{2}-1}, \quad S^{(1)} = \{S_{2i+1}\}_{i=0, \dots, \frac{N}{2}-1}.$$

Если сдвинуть набор частот на величину $\Delta v = \Delta k \frac{F}{N}$, то БПФ будет иметь вид:

$$B(S, N, k + \Delta k) = B(S^{(0)}, \frac{N}{2}, k + \Delta k) +$$

$$+ W(k + \Delta k, N) \cdot B(S^{(1)}, \frac{N}{2}, k + \Delta k),$$

$$B(S, N, k + \Delta k + \frac{N}{2}) = B(S^{(0)}, \frac{N}{2}, k + \Delta k) -$$

$$- W(k + \Delta k, N) \cdot B(S^{(1)}, \frac{N}{2}, k + \Delta k),$$

$$k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1;$$

$$B(S, \frac{N}{2}, k + \Delta k) = B(S^{(0)}, \frac{N}{4}, k + \Delta k) +$$

$$+ W(k + \Delta k, \frac{N}{2}) \cdot B(S^{(1)}, \frac{N}{4}, k + \Delta k),$$

$$B(S, \frac{N}{2}, k + \Delta k + \frac{N}{4}) = B(S^{(0)}, \frac{N}{4}, k + \Delta k) -$$

$$- W(k + \Delta k, \frac{N}{2}) \cdot B(S^{(1)}, \frac{N}{4}, k + \Delta k),$$

$$k = 0, \dots, \frac{N}{4} - 1;$$

...

$$B(S, 2, \Delta k) = B(S^{(0)}, 1, \Delta k) + W(\Delta k, 2) \cdot B(S^{(1)}, 1, \Delta k),$$

$$B(S, 2, \Delta k + 1) = B(S^{(0)}, 1, \Delta k) - W(\Delta k, 2) \cdot B(S^{(1)}, 1, \Delta k),$$

$$B(S, 1, \Delta k) = S_0.$$

Значение функции B всегда зависит только от результатов вычислений на предыдущих шагах. На последнем шаге B зависит только от S_0 . На предпоследнем шаге определяется как:

$$B(S, 2, k + \Delta k) = S_0 + W(k + \Delta k, 2) \cdot S_1.$$

На рис. 1 представлен самый простой – рекурсивный алгоритм вычисления сдвинутого на частоту $\Delta k \frac{F}{N}$ БПФ для набора частот (2):

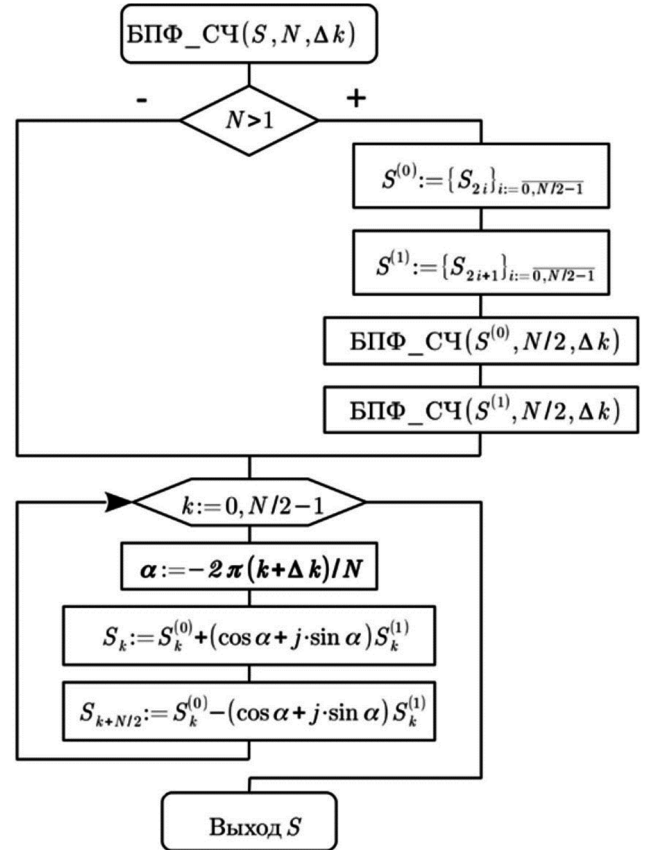


Рис. 1. Рекурсивный алгоритм БПФ с частотным сдвигом

В результате вычислений амплитуды гармоник записываются в исходный массив S . После выполнения алгоритма (рис. 1) массив S содержит значения $B(S, N, k + \Delta k)$, $k=0, \dots, N-1$.

Алгоритм построения амплитудно-частотной характеристики с малым шагом по частоте

Построим общий алгоритм решения исходной задачи. Для того, чтобы получить R -кратное частотное разрешение, необходимо процедуру БПФ_СЧ выполнить R раз с $\Delta k = \frac{r}{R}$, $r=0, \dots, R-1$. На рис. 2 представлена блок-схема алгоритма построения спектральной характеристики сигнала S длительностью N отсчётов с количеством частот $R \times N$.

Результатом работы данного алгоритма является массив A , содержащий значения

$$A_m = \sum_{i=0}^{N-1} S_i e^{-2\pi j i v_m}, \quad v_m = \frac{mF}{NR}, \quad m=0, \dots, NR-1.$$

Из блок-схем видно, что временная сложность построенного алгоритма равна $O(N \cdot R \cdot \log_2 N)$. При полном распараллеливании, например, с использованием ПЛИС, теоретически возможно получать АЧХ с помощью БПФ за $\log_2 N$ тактов процессора. *Описанный алго-*

ритм обеспечивает принципиальную возможность увеличивать частотное разрешение с линейной алгоритмической сложностью по отношению к обычному БПФ без увеличения длины исходной последовательности S .

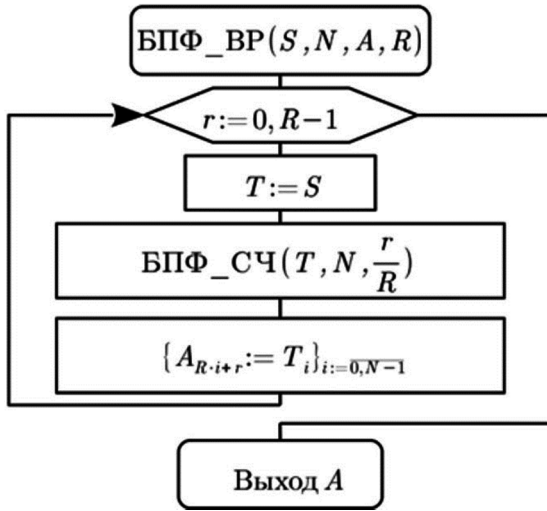


Рис. 2. Общий алгоритм прямого БПФ с R -кратным разрешением

Рассмотрим пример. Предположим, что мы хотим для набора из $N = 2048$ точек получить набор $4N = 8192$

частот при частоте дискретизации 44100 Герц. Для этого сначала нужно вычислить четыре БПФ с различными Δv :

$$\Delta v^{(0)} = 0, \Delta v^{(1)} = \frac{44100}{4N},$$

$$\Delta v^{(2)} = \frac{2 \cdot 44100}{4N}, \Delta v^{(3)} = \frac{3 \cdot 44100}{4N}.$$

После этого элементы $A_0, A_4, A_8, \dots, A_{4N-4}$ инициализировать с помощью процедуры БПФ_СЧ результатами вычисления первого БПФ; $A_1, A_5, A_9, \dots, A_{4N-3}$ – второго; $A_2, A_6, A_{10}, \dots, A_{4N-2}$ – третьего; $A_3, A_7, A_{11}, \dots, A_{4N-1}$ – четвёртого.

Таким же образом можно модифицировать и любой итерационный алгоритм вычисления БПФ. Так как результаты вычисления БПФ с различными Δv не зависят друг от друга, возможно их независимое вычисление, т.е. распараллеливание.

Результаты численных расчётов

Описанный выше алгоритм был реализован на языке C++ в среде Qt Creator для построения АЧХ акустического сигнала длиной $N = 2048$ отсчётов и частотой дискретизации $F = 44100$ Герц. На рис. 3. представлены вычисленные низкочастотные полосы спектров (до 1000 Герц) с различным разрешением R .

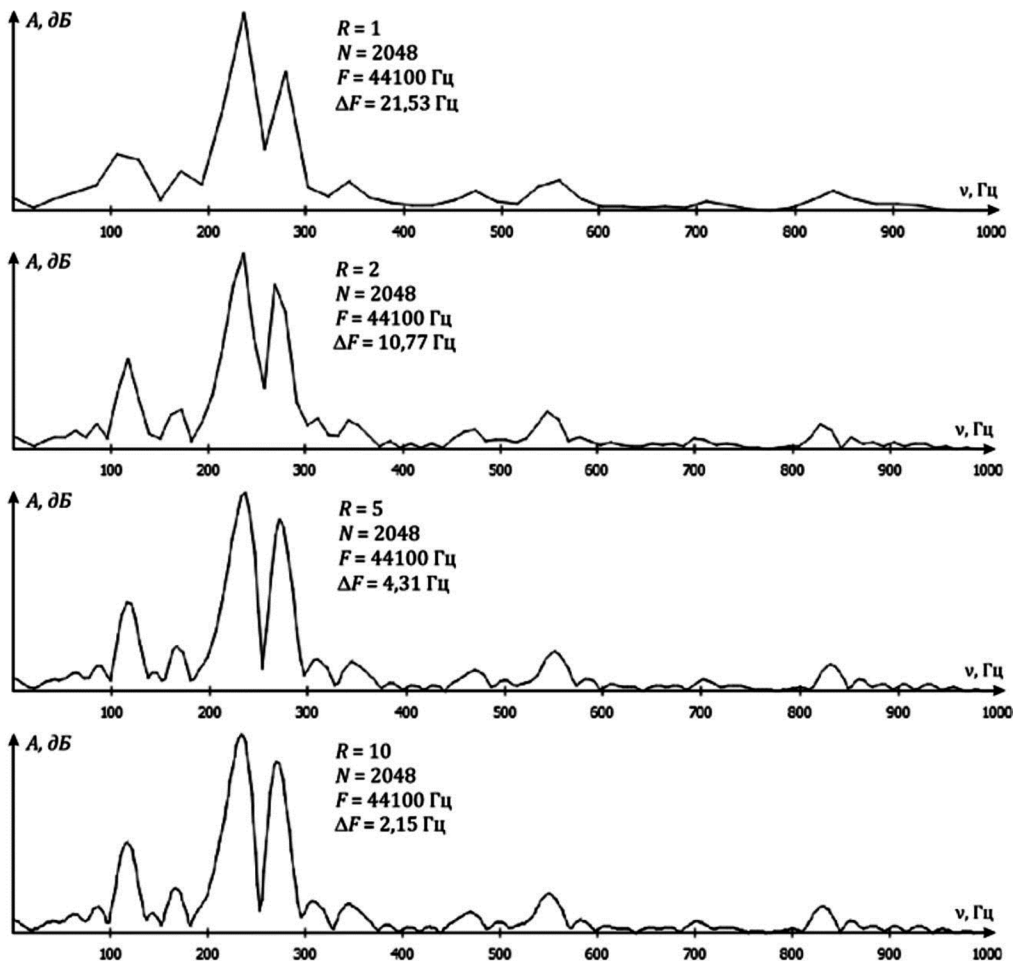
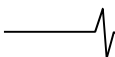


Рис. 3. АЧХ акустического сигнала с различным разрешением R



Из рисунков видно, что увеличение разрешения приводит к ожидаемому сглаживанию АЧХ. Численные эксперименты показали, что на современных процессорах даже при отсутствии оптимизации (распараллеливание, реализация целочисленного БПФ и др.) при данных параметрах возможна обработка аудиосигналов в режиме реального времени при $R < 20$.

Заключение

Описанный алгоритм позволяет создать новое семейство очень простых методов цифровой обработки сигналов с высокой разрешающей способностью. Поскольку для этого не требуется увеличивать длину исходного сигнала, возможно получение качественной спектральной характеристики в режиме реального времени. Описанные алгоритмы предельно просты и пригодны для реализации практически на любом языке программирования, ПЛИС и на отечественных архитектурах [7].

Литература

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.: ил.
2. Кривошеев В.И., Лупов С.Ю. О некоторых возможностях и проблемах современного цифрового спектрального анализа // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 5(3). С. 109-117.

3. Голубинский А.Н. О частотно-временном разрешении кратковременного Фурье-анализа и непрерывного вейвлет-анализа при обработке речевых сигналов / А.Н. Голубинский, Р.А. Асташов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2013. – № 3. – С. 4-11.

4. Алиев Р.М. Оптимизация оконного Фурье и непрерывного вейвлет преобразований для спектрального анализа музыкальных сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2013. № 2. С. 16-19.

5. Петров Д.А., Боголюбов А.Н. Применение полифазного разложения для эффективной вычислительной реализации алгоритма формирования сигнала на основе конечномерного обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга. Журнал радиоэлектроники. 2010. № 3. С. 2.

6. Колегов Н.Е., Жукова И.Н., Быстров Н.Е. Корреляционно-фильтровая обработка амплитудно-фазоманипулированных сигналов с использованием алгоритма полифазного БПФ. В сборнике: Наука в России: перспективные исследования и разработки сборник материалов I Всероссийской научно-практической конференции. 2017. С. 146-152.

7. Логинов В.Е., Ишин П.А. Оптимизация для архитектуры «Эльбрус» быстрого преобразования Фурье применительно к 32-разрядным числам с плавающей точкой / Вопросы радиоэлектроники. 2012. Т. 4. № 3. С. 108-118.

НОВЫЕ КНИГИ

Литвин С.М., Попов О.Б., Чернышева Т.В.

Аудиопроекторная обработка сигналов звукового вещания – М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2017 г. – 222 с.: ил.

Звуковой сигнал, передаваемый по каналам звукового вещания, был и будет востребован в общем ряду с большим количеством альтернативных источников информации. Рассмотрены основные характеристики сигналов и каналов звукового вещания, базовые процедуры, используемые при обработке звукового вещательного сигнала (ЗВС); основные алгоритмы обработки сигнала в канале передачи. Проведен анализ и оценка искажений сигнала на всех этапах его передачи – от первичного цифрового преобразования до аудиопроекторной обработки. Особое внимание уделено алгоритмам обработки и проблеме объективной оценки качества ЗВС в системах, не нормируемых в рамках современного метрологического обеспечения.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров 11.03.02 и 11.04.02 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.03.01 и 11.04.01 – «Радиотехника», 10.05.02 – «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Горшков Ю.Г.

Обработка речевых и акустических биомедицинских сигналов на основе вейвлетов. – М.: Изд-во «Радиотехника», 2017 г. – 240 с.: ил.

Изложены новые перспективные методы речевых и акустических биомедицинских сигналов на основе вейвлетов, аппаратно-программные средства для решения прикладных задач криминалистического исследования фонограмм, оценки эмоционального состояния человека, шумоочистки и засекречивания речи, а также построения биомедицинских систем диагностики заболеваний сердца и легких. Основное внимание уделено разработке вейвлет-технологий высокоточного анализа речевых и акустических биомедицинских сигналов. Впервые предложены решения многоуровневого вейвлет-преобразования, обеспечивающие визуализацию нестационарных сигналов с повышенным частотно-временным разрешением. Представлена система телемедицины нового поколения с засекречиванием акустических биомедицинских сигналов.

Для ученых и инженеров, работающих над созданием средств обработки биомедицинских сигналов на новых принципах. Может быть полезна преподавателям, аспирантам и студентам технических вузов.

