

УДК 621.391

АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ ОЦЕНКИ СПЕКТРА СИГНАЛА

Туяков С.В., к.ф.-м.н., АО НПП «СПЕЦ-РАДИО», начальник отдела, e-mail: sem_t@inbox.ru.

ALGORITHM TO IMPROVE SPECTRAL ESTIMATION

Tuayakov S.V.

Task is to increase the sampling rate of the Fourier transform (improve spectral estimation), having a sequence of data of a fixed length. To solve such problems, there is an algorithm based on the application of the FFT to the data sequence, supplemented with the necessary number of zeros. However, this approach leads to an increase in the number of complex multiplications. A new algorithm propose to improve spectral estimation with a smaller number of complex multiplications, not requiring increasing order FFT, and allowing for efficient parallel implementation.

Key words: algorithm, the discrete Fourier transform, the fast Fourier transform, computational complexity, approximation of the continuous Fourier transform, to improve spectral estimation.

Ключевые слова: алгоритм, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье, вычислительная сложность, аппроксимация трансформанты Фурье, улучшение оценки спектра.

Введение

Как известно [1, 2], прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) выполняется на основе следующего соотношения

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{m \cdot n},$$

$$W_N^{m \cdot n} = e^{-j2\pi \frac{n \cdot m}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

Необходимо отметить, что ДПФ представляет собой аппроксимацию непрерывной трансформанты Фурье [3] или, как это определено в [1], аппроксимацию непрерывного спектра сигнала. Данная аппроксимация является дискретной и определена в следующих точках частотной оси

$$m \cdot \frac{f_s}{N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где m – индекс анализируемой частоты, f_s – частота дискретизации сигнала.

Очевидно, чем больше количество данных (значение N) доступно для анализа, тем точнее (подробнее) ДПФ аппроксимирует непрерывный спектр сигнала. Однако не всегда есть возможность в накоплении необходимого количества данных. Для таких случаев (значение N фиксировано) существует подход для улучшения оценки спектра с помощью ДПФ, известный как дополнение нулями исходной последовательности данных [1]. Под улучшением оценки спектра понимается увеличение частоты дискретизации непрерывной трансформанты Фурье. Так, например, для увеличения частоты дискретизации непрерывной трансформанты Фурье в 2 раза необходимо исходную последовательность данных длиной N отсчетов дополнить N нулями и выполнить ДПФ размерности $2N$. На практике реализация метода

Ставится задача увеличения частоты дискретизации трансформанты Фурье (улучшения оценки спектра сигнала), имея в распоряжении последовательность данных фиксированной длины. Для решения подобных задач существует алгоритм, основанный на применении БПФ к последовательности данных, дополненной необходимым количеством нулей. Однако данный подход приводит к увеличению количества комплексных умножений. Предлагается новый алгоритм улучшения оценки спектра сигнала с меньшим количеством комплексных умножений, не требующий увеличения порядка БПФ и допускающий эффективный параллельный режим реализации.

ДПФ осуществляется посредством применения алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), вычислительная сложность которого составляет $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$ комплексных умножений [1].

Таким образом, существующее решение задачи улучшения оценки спектра основано на использовании алгоритма БПФ к последовательности данных, дополненной необходимым количеством нулей (здесь и далее классический алгоритм). Применение классического алгоритма требует вычисления определенного количества комплексных умножений.

Далее представляется для обсуждения альтернативный алгоритм улучшения оценки спектра без дополнения нулями исходной последовательности данных требующий меньшее количество комплексных умножений, чем классический алгоритм.

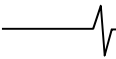
Алгоритм улучшения оценки спектра сигнала

Пусть дана последовательность данных, предназначенная для частотного анализа

$$\{x_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

где N равно целой степени двух.

Через K обозначим коэффициент улучшения оценки спектра, под которым будем понимать увеличение в K раз частоты дискретизации непрерывной трансформанты Фурье.



Через m_K обозначим индекс анализируемой частоты для заданного коэффициента K .

Для начала рассмотрим случай, когда $K = 2$.

Запишем формулу ДПФ для $K = 2$

$$F(m_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_{2 \cdot N}^{m_2 \cdot n}, \quad (4)$$

$$m_2 = 0, 1, \dots, (2 \cdot N) - 1,$$

где

$$W_{2 \cdot N}^{m_2 \cdot n} = e^{-j2\pi \frac{n \cdot m_2}{2 \cdot N}}. \quad (5)$$

Очевидно, что для индексов

$$m_2 = 0, 2, \dots, (2 \cdot N) - 2 \quad (6)$$

значения результатов ДПФ, вычисленных по формулам (1) и (4), тождественно равны

$$F(m_2) \equiv F(m),$$

$$m_2 = 0, 2, \dots, (2 \cdot N) - 2, \quad (7)$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Таким образом, для индексов, указанных в (6), вычисления можно осуществлять через «обычный» ДПФ размерности N .

На рис. 1 а) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (1), а на рис. 1 б) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (4).

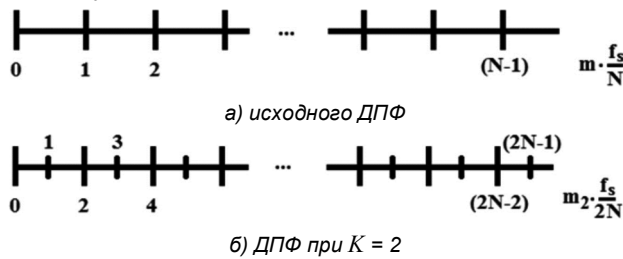


Рис. 1. Отсчеты на частотной оси

Для оставшихся индексов

$$m_2 = 1, 3, \dots, (2 \cdot N) - 1, \quad (8)$$

количество которых равно N , вычисления также можно производить на основе ДПФ размерности N

$$F(m_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_{2 \cdot N}^{m_2 \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{\bar{m} \cdot n},$$

$$m_2 = 1, 3, \dots, (2 \cdot N) - 1, \quad (9)$$

$$\bar{m} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2N-1}{2},$$

где

$$W_N^{\bar{m} \cdot n} = e^{-j2\pi \frac{n \cdot \bar{m}}{N}}. \quad (10)$$

Важно отметить, что базисные функции в правой части последнего соотношения (10) образуют ортогональный базис в N -мерном пространстве. Новые базисные функции определены в следующих точках частотной оси (рис. 1)

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{f_s}{N}, m = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (11)$$

Таким образом, исходная задача вида (4) свелась к вычислению двух N -точечных ДПФ (БПФ), что может быть записано следующим образом

$$F(m_2) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{m \cdot n}, & \text{если } m_2 = 0, 2, \dots, (2 \cdot N) - 2, \\ \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{\bar{m} \cdot n}, & \text{если } m_2 = 1, 3, \dots, (2 \cdot N) - 1, \end{cases}$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (12)$$

$$\bar{m} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2N-1}{2} = m + \frac{1}{2}.$$

Если проанализировать формулы (11), (12) и рис. 1, то становится понятным, что

$$\bar{m} = m + \frac{1}{2} = m + \frac{1}{K}, \quad (13)$$

т.е. величина смещения точек на частотной оси определяется на основе заданного K коэффициента улучшения оценки спектра.

Подведем промежуточный итог для случая $K = 2$.

Во-первых, вычисления 2-х БПФ в зависимости от архитектуры вычислителя можно осуществлять как параллельно, так и последовательно.

Во-вторых, вычислительная сложность (количество комплексных умножений) при таком подходе меньше вычислительной сложности классического алгоритма. Для представленного подхода вычислительная сложность при $K = 2$ составляет

$$2 \cdot \left(\frac{N}{2} \cdot \log_2 N\right) = N \cdot \log_2 N \quad (14)$$

комплексных умножений. Выигрыш по отношению к классическому алгоритму составляет

$$V = \frac{N \cdot \log_2(2 \cdot N)}{N \cdot \log_2 N} = 1 + \frac{1}{\log_2 N}. \quad (15)$$

Далее на рис. 2 в графическом виде представлена кривая выигрыша V для $K = 2$ и в зависимости от количества исходных данных.

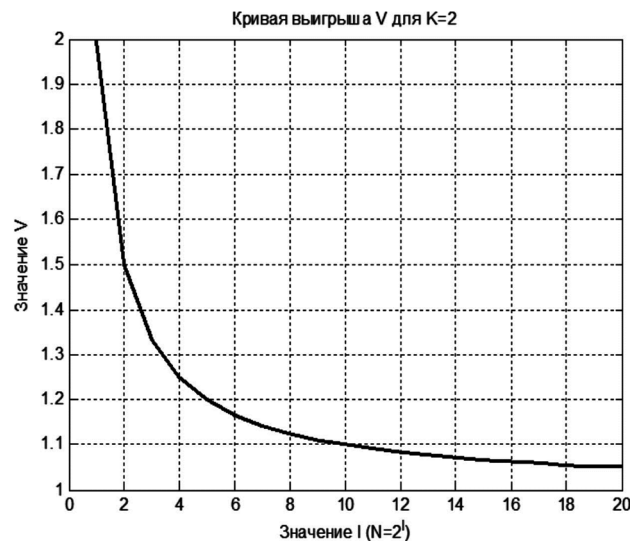


Рис. 2. Оценка вычислительной эффективности ($K = 2$)

Теперь рассмотрим общий случай улучшения оценки спектра сигнала.

Коэффициент улучшения K может быть любым натуральным числом, большим или равным двум $K \in N, K \geq 2$.

Формула ДПФ для фиксированного K имеет вид

$$F(m_K) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_{K \cdot N}^{m_K \cdot n}, \quad (17)$$

$$m_K = 0, 1, \dots, (K \cdot N) - 1.$$

Последнее соотношение представимо в виде объединения K N -точечных ДПФ

$$F(m_K) = \bigcup_{L=0}^{K-1} F_L(m_{K,L}), \quad (18)$$

где

$$F_L(m_{K,L}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{m_{K,L} \cdot n}, \quad (19)$$

$$m_{K,L} = m + \frac{L}{K}, \quad (m = 0, 1, \dots, N - 1),$$

$$W_N^{m_{K,L} \cdot n} = e^{-j2\pi \frac{n \cdot m_{K,L}}{N}}.$$

Как и прежде, ДПФ $F_L(m_{K,L})$ для каждого $L = 0, \dots, K-1$ реализуется на основе алгоритма БПФ с соответствующими коэффициентами.

Рассмотрим более подробно содержание формул (18) и (19). Для наглядности последующих рассуждений зафиксируем $N = 16$ и $K = 4$. Распишем формулу (19) для каждого $L = 0, \dots, 3$

$$F_0(m_{4,0}) = \sum_{n=0}^{15} x_n \cdot W_{16}^{m_{4,0} \cdot n}, \quad (20)$$

$$m_{4,0} = \left(m + \frac{0}{4}\right) = 0, 1, \dots, 15.$$

$$F_1(m_{4,1}) = \sum_{n=0}^{15} x_n \cdot W_{16}^{m_{4,1} \cdot n}, \quad (21)$$

$$m_{4,1} = \left(m + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{61}{4}.$$

$$F_2(m_{4,2}) = \sum_{n=0}^{15} x_n \cdot W_{16}^{m_{4,2} \cdot n}, \quad (22)$$

$$m_{4,2} = \left(m + \frac{2}{4}\right) = \frac{2}{4}, \frac{6}{4}, \dots, \frac{62}{4}.$$

$$F_3(m_{4,3}) = \sum_{n=0}^{15} x_n \cdot W_{16}^{m_{4,3} \cdot n}, \quad (23)$$

$$m_{4,3} = \left(m + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \dots, \frac{63}{4}.$$

На рис. 3 в наглядной форме поясняется алгоритм улучшения оценки спектра для рассматриваемого примера: а) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (20), б) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (21), в) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (22) и г) представлены точки частотной оси для ДПФ, вычисляемого по формуле (23).

Из соотношений (20)-(23), анализируя значения индексов $m_{K,L}$ для каждого $L = 0, \dots, K-1$, и рис. 3 становится понятным содержание соотношения (18) в вопросе объединения K N -точечных ДПФ.

Проведем расчет выигрыша относительно вычислительной сложности (количество комплексных умножений) предлагаемого алгоритма

$$V = \frac{(K \cdot N) \cdot \log_2(K \cdot N)}{K \cdot \left(\frac{N}{2} \cdot \log_2 N\right)}, \quad (24)$$

где в числителе указана вычислительная сложность классического алгоритма, а в знаменателе указана вычислительная сложность предлагаемого алгоритма.

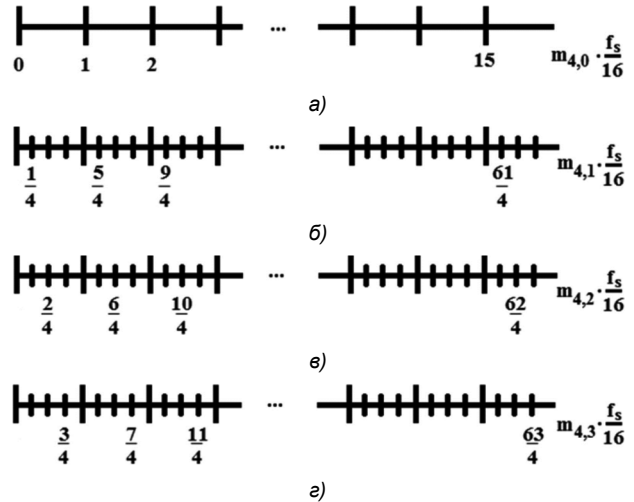


Рис. 3. Отсчеты на частотной оси для ДПФ заданной фиксированной размерности ($K = 4$)

После преобразования последнего выражения величина выигрыша представима в виде

$$V = 1 + \frac{\log_2 K}{\log_2 N}. \quad (25)$$

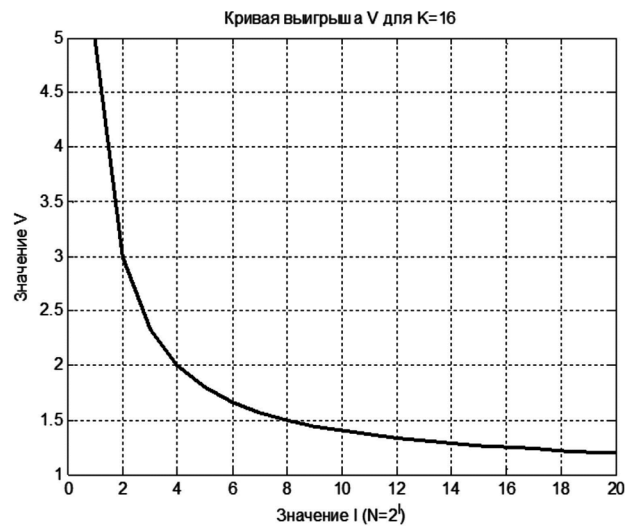


Рис. 4. Оценка вычислительной эффективности ($K = 16$)

На рис. 4 в графическом виде представлена кривая выигрыша V для $K = 16$ и в зависимости от количества исходных данных. Анализируя представленный материал, можно сделать вывод, что величина смещения точек анализа на частотной оси может быть произвольным действительным числом из полуинтервала от $[0; 1)$, т.е. справедливо следующее преобразование

$$F(\bar{m}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{\bar{m} \cdot n}, \quad (26)$$

$$W_N^{\bar{m} \cdot n} = e^{-j2\pi \frac{n \cdot \bar{m}}{N}},$$

$$\bar{m} = (m + r),$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$r \in [0; 1).$$

Преобразование (26) позволяет для последовательности данных фиксированной длины при различных значениях $r \in [0; 1)$ осуществлять дискретизацию непрерывной трансформанты Фурье со сколь угодно малым шагом дискретизации.

Заключение

Предложенный в статье алгоритм для улучшения оценки спектра сигнала позволяет:

– во-первых, осуществлять дискретизацию непрерывной трансформанты Фурье со сколь угодно малым шагом дискретизации (преобразование (26)),

– во-вторых, уменьшить количество комплексных умножений по отношению к классическому алгоритму,

– в-третьих, реализовать вычисления как в параллельном, так и в последовательном режимах, в зависимости от решаемой задачи и архитектуры вычислителя.

Литература

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г. – 656 с.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательство дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
3. Туяков С.В. Разработка методов и алгоритмов субполосного моделирования эмпирических данных: диссертация кандидата физико-математических наук. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, 2011.

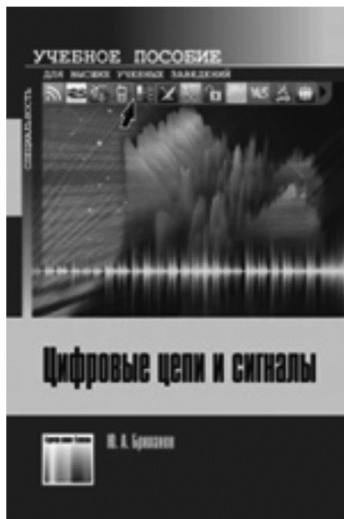
НОВЫЕ КНИГИ

Брюханов Ю.А.

Цифровые цепи и сигналы / Учебное пособие – М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 3-изд. перераб. и доп., 2017 г. – 160 с.: ил.

Приведен математический аппарат для анализа сигналов и цепей дискретного времени. Изложены спектральная теория периодических и непериодических цифровых сигналов, теория цепей дискретного времени. Подробно рассмотрены частотные свойства и временные характеристики базовых нерекурсивных и рекурсивных линейных цепей (цифровых фильтров) первого и второго порядков. Изложены методы изменения частоты дискретизации цифровых сигналов: децимация и интерполяция, а также способы их реализации. Уделено внимание теории случайных сигналов и процессов дискретного времени, протекающих в цифровых цепях. Рассмотрены эффекты квантования в цифровых сигналах и цепях.

Для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Радиофизика», «Радиотехника» и «Информационные технологии и системы связи».



Афанасьев А.А., Рыболовлев А.А., Рыжков А.П.

Учебное пособие для вузов – М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2017 г. – 356 с.: ил.

Изложены базовые теоретические и практические вопросы в области анализа, синтеза и экспериментального исследования систем цифровой обработки сигналов (ЦОС). Приведены основные методы расчета характеристик устройств ЦОС, показаны особенности их анализа в различных условиях функционирования, даны основные подходы к синтезу систем ЦОС, рассмотрены основные происходящие в них физические процессы. Изложенные теоретические сведения сопровождаются практическими примерами решения прикладных задач.

Для студентов вузов, обучающихся по укрупненной группе направлений подготовки 11.00.00 – «Электроника, радиотехника и системы связи».

