

УДК 621.396

ДИАГНОСТИКА ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА ФУНКЦИЯХ ГАУССА-ЭРМИТА

*Балакин Д.А., аспирант кафедры ОПТ Научно-исследовательского университета «МЭИ»,
e-mail: Bzzz86.balakin@yandex.ru;*

*Штыков В.В., к.т.н., профессор кафедры ОПТ Научно-исследовательского университета «МЭИ»,
e-mail: ShtykovVV@yandex.ru.*

DIAGNOSTIC OF THE CYCLIC SYSTEMS USING ALGORITHM BASED ON GAUSS-HERMITE FUNCTIONS

Balakin D.A., Shtykov V.V.

The cyclic system is an object which response is a quasi-periodic sequence of impulse signals. Such signals, for example, take place during the operation of dynamic systems: various machines and mechanisms, living organisms and other objects. Today, the actual direction is the digital processing of signals of cyclic systems with the purpose of their diagnostics. The frequency of responses of mechanical devices, along with speed and acceleration, is one of the important kinematic parameters by which the system is tested. The determination of the rhythm of biological signals is also one of the key directions in the diagnosis of biological systems.

The article is described the basic principles of digital implementation of the algorithm for processing quasi-periodic pulse signals using the Gaussian-Hermite functions (FGH). Using this algorithm it is possible not only to detect a defect, but also to trace its dynamics throughout the process under investigation.

Key words: cyclic system, quasi-periodic sequence of impulse signals, Gauss-Hermite functions.

Ключевые слова: циклическая система, квазипериодическая последовательность импульсных сигналов, функции Гаусса-Эрмита.

Введение

Разработанный нами алгоритм обработки квазипериодических импульсных сигналов с использованием функций Гаусса-Эрмита (ФГЭ) базируется на основных свойствах преобразования Эрмита (ПЭ). Изменение масштаба ФГЭ заимствовано из теории вейвлет-преобразования. Принятие решения о наличии сигнала выносится по максимумам корреляционной функции, что соответствует классической теории оптимальной фильтрации (ТОФ). Алгоритм обработки можно представить структурной схемой, показанной на рис 1.

Сигнал $f(t)$, получаемый от исследуемой системы (ИС), представляет собой последовательность квазипериодических импульсов. Причем в различные такты импульсы могут иметь разную длительность. В роли ИС может выступать некое устройство, механизм или биообъект.

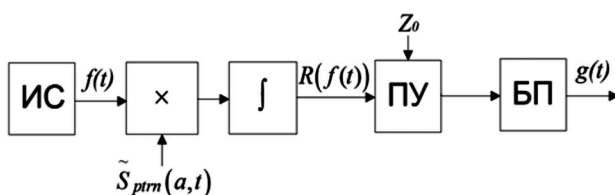


Рис. 1. Структурная схема алгоритма обработки сигнала

Сигнал $f(t)$, получаемый от исследуемой системы (ИС), представляет собой последовательность квазипериодических импульсов. Причем в различные такты им-

Под циклической системой подразумеваются такие объекты, отклики которых представляют собой квазипериодическую последовательность импульсных сигналов. Такие сигналы, например, возникают в процессе функционирования динамических систем: различных машин и механизмов, живых организмов и прочих объектов. Сегодня, актуальным направлением является цифровая обработка сигналов циклических систем с целью их диагностики. Периодичность откликов механических устройств, наряду со скоростью и ускорением, является одним из важных кинематических параметров, по которому осуществляется проверка работоспособности системы. Определение ритмики биологических сигналов также является одним из ключевых направлений в диагностике биологических систем.

В статье излагаются основные принципы цифровой реализации алгоритма обработки квазипериодических импульсных сигналов с использованием функций Гаусса-Эрмита (ФГЭ). С помощью этого алгоритма можно не только обнаружить дефект, но и проследить его динамику на всем исследуемом процессе.

пульсы могут иметь разную длительность. В роли ИС может выступать некое устройство, механизм или биообъект.

С целью диагностики процесса функция $f(t)$ перемножается с опорным сигналом (ОС) $\tilde{S}_{prn}(a, t)$, представляющим собой некоторую особенность или неоднородность в $f(t)$, динамику которой хотим проследить и вычисляется корреляционный интеграл. Результирующее выражение $R(f(t))$, представляющее собой взаимнокорреляционную функцию (ВКФ), поступает на пороговое устройство (ПУ), где осуществляется его сравнение с пороговым значением Z_0 . Согласно статистиче-

ской теории информации пороговое значение может представлять собой диапазон значений ВКФ, в пределах которых можно говорить об исправности устройства или о здоровье пациента. Блок преобразования (БП) осуществляет преобразование $R(f(t))$ в функцию $g(t)$ такого вида, по которой можно судить о состоянии системы. В качестве такой функции, отражающей ритмику процесса, может выступать, как пример, графический аппарат, принятый для отображения variability сердечного ритма – ритмограмма [1].

В целом, схема, показанная на рис. 1, представляет собой классическую схему корреляционного приемника, определенную в ТОФ. Принципиально новым элементом в предлагаемом алгоритме является построение ОС на основе ортогонального базиса функций Гаусса-Эрмита. Отличие от классической трактовки в ТОФ заключается в том, что корреляционный интеграл строится на основе широко известного интегрального выражения вейвлет-преобразования (ВП). Благодаря основным свойствам ВП (масштабирование, локализация), удается построить ОС с меньшими вычислительными затратами, а также проследить динамику изменения длительности ОС в исследуемом процессе. Использование заложенных в ВП математических приемов, переводит алгоритм обработки на качественно новый уровень. Он способен не только обнаружить сигнал, но и диагностировать ту или иную аномалию или дефект в ИС.

Описание алгоритма

На рис. 2 представлена блок-схема алгоритма обработки квазипериодических импульсных сигналов с использованием ФГЭ.

На первом этапе осуществляется построение некоего эталонного сигнала (ЭС), который отражает особенности или неоднородности системы в исправном или, наоборот, в неисправном состоянии. Он может быть построен на основании математической или эмпирической модели. Однако очень часто в реальных задачах невозможно построить адекватную модель, которая описывает все необходимые свойства сигнала. Поэтому ЭС можно получить путем выделения интересующего нас фрагмента непосредственно из записи сигнала исследуемого процесса.

В соответствии с алгоритмом (рис 2) задается значение ошибки аппроксимации. Она определяется статистической информацией об исследуемой системе. Стоит отметить, что если такой информации нет, то путем вариации этой ошибки можно получить статистическую оценку формы сигнала в исследуемой последовательности, что также является дополнительной информацией при диагностике квазипериодической системы.

Далее задается начальное значение масштаба и его шаг вариации, т.е. в каком диапазоне мы будем изменять масштаб. Эти параметры определяются из длительности вырезанного фрагмента с помощью функции Гаусса (ФГЭ нулевого порядка). Меняя масштаб функции Гаусса, можно примерно оценить диапазон значений m , в котором будет построен опорный сигнал. Этот этап необходим только для того, чтобы сузить область

вариации m , что влечет за собой уменьшение вычислительной нагрузки на устройство, в котором реализован алгоритм. В обработке в масштабе реального времени этот этап опускается, и вариация значений q и m осуществляется в широком диапазоне.

Построение ОС осуществляется на основе ЭС. Выделенный фрагмент раскладывается в базисе ФГЭ. Формула (1) описывает спектр сигнала в пространстве ФГЭ:

$$A_q(a) = \sum_{k=-K}^K S_{pivn}(t_k) \Psi_q(t_k/a), \quad (1)$$

где $S_{pivn}(t_k)$ – эталонный сигнал, $t_k = \Delta t \cdot k$, Δt – шаг (период) дискретизации, $k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K$, $K = N_{pivn}/2$, N_{pivn} – число отсчетов ЭС, определяющее его границы по времени (длительность выделенного эталона) по уровню $\pm 3\Delta t = 3/K$, Ψ_q – ФГЭ q -го порядка; a – масштаб ФГЭ, представляемый в дискретном виде как $a = 2^m$.

Дискретный эталонный сигнал представляется в виде вектора

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} * \\ S_{pivn}(t_k) \\ * \end{pmatrix}.$$

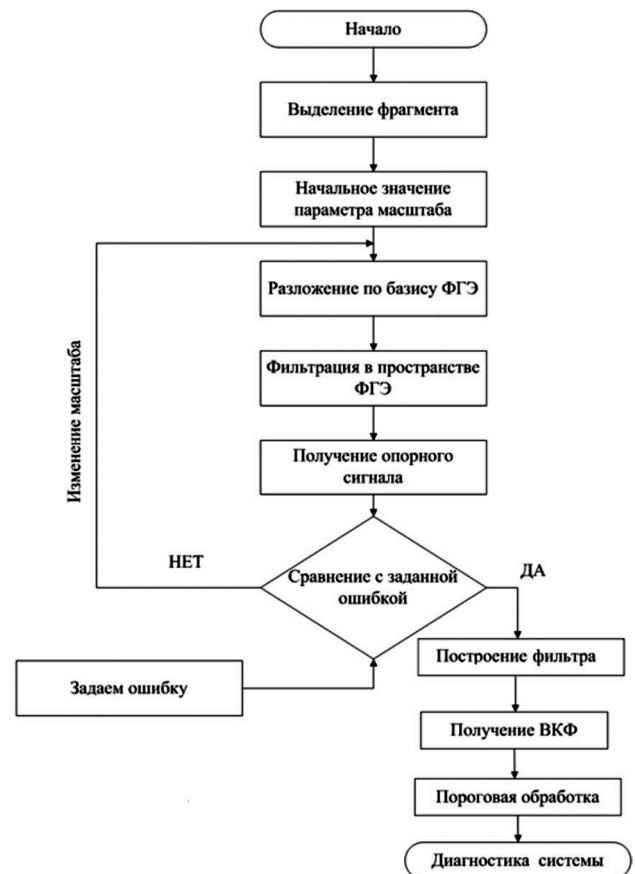


Рис. 2. Блок-схема алгоритма обработки квазипериодических импульсных сигналов ФГЭ имеют вид матрицы с элементами задающими следующим выражением:

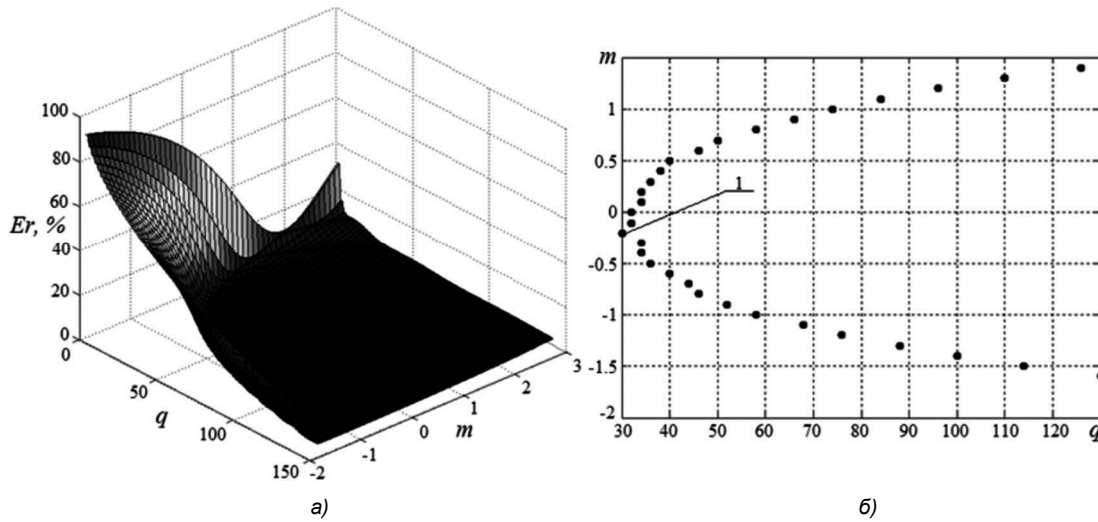


Рис. 3. Общий вид ошибки аппроксимации (а), 1% ошибка аппроксимации прямоугольного импульса (б)

$$\Psi_q(t_k) = \frac{H_q(t_k) \exp\left(-\frac{t_k^2}{2^m}\right)}{\sqrt{q! 2^q} \sqrt{\pi}}, \quad (2)$$

где $H_q(t_k)$ – полиномы Эрмита [2].

Тогда спектр (1) в базисе ФГЭ можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{A} = \tilde{\Psi} \mathbf{S}. \quad (3)$$

Процедура формирования матрицы $\tilde{\Psi}$ выглядит следующим образом: первые две строки заполняем с учетом свойств симметрии ФГЭ, начиная от центра строк.

$$\begin{vmatrix} \Psi_0(t_{-K}) & * & \Psi_0(t_k) & * & \Psi_0(t_k) \\ -\Psi_1(t_{-K}) & * & 0 & * & \Psi_1(t_k) \end{vmatrix}.$$

Последующие строки заполняются с использованием известного рекуррентного соотношения для полиномов Эрмита [2]:

$$\Psi_{q+1}(t_k) = t_k \sqrt{\frac{2}{q+1}} \Psi_q(t_k) - \sqrt{\frac{q}{q+1}} \Psi_{q-1}(t_k).$$

На основе обратного преобразования Эрмита строится опорный сигнал. В дискретной форме он имеет следующее представление:

$$\tilde{S}_{prn}(t_k, m) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{q=0}^Q W(q, q_c) A_q \Psi_q(t_k, m) \rightarrow \tilde{S}_{prn}(t_k, m) = \begin{vmatrix} A'_0 & A'_1 & * & A'_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ * \\ \Psi_n \end{vmatrix} = \mathbf{A}' \Psi(t_k), \quad (4)$$

где $W(q, q_c)$ – коэффициент передачи сглаживающего фильтра в пространстве ФГЭ, A' – вектор произведения $A_q W(q, q_c)$. Сглаживающий фильтр необходим для ослабления «явления Гиббса» в пространстве ФГЭ. Он строится на основе хорошо известных классических аппроксимаций.

После построение опорного сигнала вычисляется ошибка аппроксимации, которая сравнивается с заданной ранее ошибкой ($Er0$).

Изменяя параметр масштаба m , можно добиться реализации опорного сигнала $\tilde{S}_{prn}(t_k, m)$ с заданной точностью при наименьших вычислительных затратах. Ошибка аппроксимации имеет вид:

$$Er(m, Q) = \frac{\sum_{k=-K}^K \left(\tilde{S}_{prn}(t_k, m) - S_{prn}(t_k) \right)^2}{\sum_{k=-K}^K S_{prn}(t_k)^2} 100\% \quad (5)$$

Ее значение характеризует точность или критерий допустимого отклонения между эталоном и опорным сигналом. Функция (5) представляет собой поверхность в пространстве параметров m, Q .

В качестве примера, на рис. 3 а представлена поверхность ошибки аппроксимации прямоугольного импульса. На рис. 3 б показано сечение этой поверхности в плоскости с заданным значением $Er(m, Q)$, равным 1%. На рис. 3 б можно обнаружить точку, в которой заданная точность достигается при наименьшем числе ФГЭ (точка 1). Это уменьшает размерность матрицы ФГЭ и увеличивает скорость вычислений.

После определения минимального q , находим соответствующее ему значение m . В соответствии со схемой, представленной на рис. 1, далее проводится вычисление корреляционного интеграла. Эта процедура требует значительных затрат времени. Поэтому для увеличения скорости вычисления целесообразно перейти из пространства времени в частотную область. В соответствии с теорией оптимальной фильтрации корреляционный интеграл можно заменить перемножением спектра исследуемого процесса и коэффициента передачи согласованного фильтра [3]. В нашем случае его частотная характеристика представляется в виде ряда ФГЭ¹:

¹ Это связано с фундаментальными свойствами ФГЭ [4].

$$\dot{K}_q(f_n, m) = \sum_{n=0}^Q j^q \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{q! 2^{q-1}}} \exp(-0,5(2^m)^2 f_n^2) H_n(2^m f_n), \quad (6)$$

где $f_n = \frac{1}{N\Delta t} n$ – дискретные значения частоты равные, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Формула (6) показывает, что фильтр на основе ФГЭ способен выделить целый набор отличительных признаков сигнала. Это расширяет возможности диагностики состояния объекта по сравнению с традиционным ВП.

На рис. 4 представлена структурная схема цифровой фильтрации. Исследуемый процесс $f(t)$ в дискретной форме записывается как $S_{in}(t_k)$.

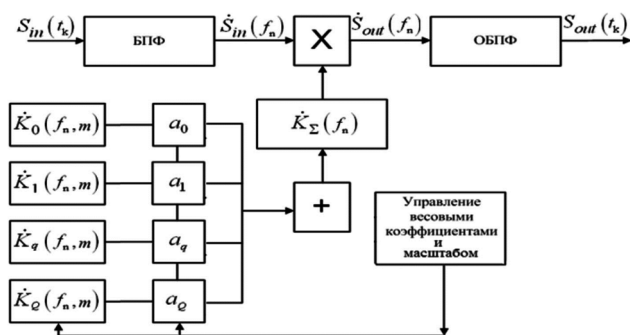


Рис. 4. Структурная схема цифровой фильтрации, выделяющая фрагмент сигнала, состоящий из некоторого набора признаков

Схему фильтрации можно свести к матричной форме, где каждый столбец характеризует тот или иной дефект или патологию (рис. 5). Такая форма представления обладает гибкой структурой, т.е. достаточно записать матрицу весовых коэффициентов фильтров в память программируемой логической интегральной схемы для формирования конечного устройства анализа сигнала. Также появляется возможность параллельной обработки, что увеличивает скорость вычисления.

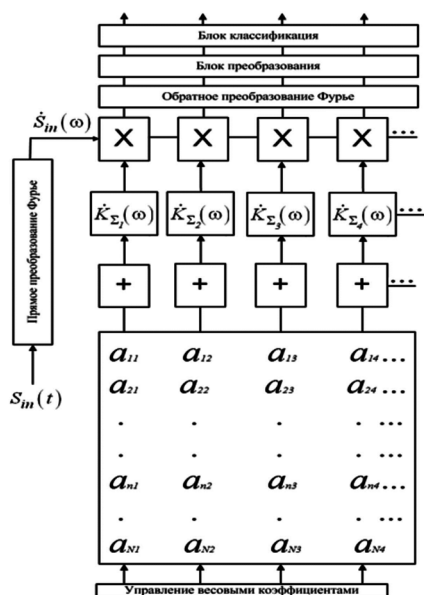


Рис. 5. Матричное представление фильтрации на основе ФГЭ

После пороговой обработки сигнала $S_{out}(t_k)$, осуществляется построение диагностической функции $g(t)$, которая решает конечную задачу диагностики.

В целом полученного результата достаточно для диагностики квазипериодической системы. Однако ритмику можно уточнить, воспользовавшись функционалом, построенного на базе неравенства Коши-Боньяковского [5]:

$$F(t_k, m) = \sqrt{E_s} - \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{S}_{in}(f_n) \dot{K}_q^*(f_n, m) \exp\left(\frac{j2\pi f_n t_k}{N}\right) \right|. \quad (7)$$

Для этого меняется значение параметра масштаба цифрового фильтра. Целесообразно задать новый диапазон m в узком интервале, так как мы осуществляем уточнение координат масштаба и, следовательно, местоположение ОС. В результате формируется функционал или поверхность, на которой присутствуют множество экстремумов (минимумов), соответствующих количеству ОС в исследуемом процессе. Процесс обработки сводится к решению многоэкстремальной задачи. Для решения подобного рода задач используются численные методы, реализующие построение траекторий вдоль которых убывает функция. В частности, в разработанном нами алгоритме используется метод наискорейшего спуска, где в качестве начальных точек выступают координаты рассчитанной ВКФ.

В результате такой обработки мы получаем уточненную информацию о местоположениях ОС, следовательно, более точную ритмограмму или скаттерграмму. Кроме того, имеем зависимость изменения длительности ОС в исследуемом процессе, что также может являться дополнительной диагностической информацией.

Заключение

В статье представлены основные принципы построения алгоритма обработки квазипериодических импульсных сигналов. Цифрой фильтр выделяет фрагмент сигнала, состоящий из некоторого набора признаков. Тем самым удается построить импульсную характеристику фильтра практически любой формы, что расширяет класс анализируемых сигналов. Матричная схема фильтра позволяет сформировать некий банк фильтров, где каждый столбец характеризует тот или иной дефект исследуемой системы. Адаптация фильтра на основе неравенства Коши-Боньяковского позволяет определить не только местоположения каждого импульса на оси времени, но и длительность каждого из них.

Литература

1. Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Рыжиков В.Н. и др. Самоподобие скаттерограммы мгновенного сердца ритма. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. Клиническая информатика и телемедицина, 2014, №3. С. 105-115.
2. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш // Москва: Наука, 1964. – 344 с.
3. Балакин Д.А. Построение ортогонального банка фильтров на основе преобразований Эрмита для обработки сигналов / Д.А. Балакин, В.В. Штыков // Журнал радиоэлектроники. – 2014. – № 9.
4. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
5. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков // Москва: Высш. школа, 2000. – 450 с.

УДК 621.372.54

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ

Сорока Е.З., к.т.н., главный научный сотрудник ЗАО «МНИТИ» (Московский научно-исследовательский телевизионный институт), e-mail: soroka@mniti.ru.

SOME SAMPLING THEORY APPLICATIONS TO NUMERICAL INTEGRATION OF E.Z. FUNCTIONS

Soroka E.Z.

The most popular numerical integration methods (rectangle rule, trapezoidal rule, parabolic rule, and 3/8 rule) have been examined by means of the sampling theory while the reconstruction of functions realized by low-pass filters with certain pulse responses. Verified that (under fixed number of samples) numerical integration gives exactly the same results on application of rectangle rule and trapezoidal rule, as well as under using pulse responses with some symmetry.

Key words: numerical integration, sampling theory, low-pass filter, pulse response.

Ключевые слова: дискретизация, восстановление функции по отсчетам, НЧ-фильтрация, импульсная характеристика.

Введение

Численное интегрирование функций позволяет получить значение определенного интеграла с требуемой степенью точности. Способы численного интегрирования основаны на замене интеграла конечной суммой [1–4]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad (1)$$

где c_k – числовые коэффициенты, значения которых определяются выбранным методом интегрирования, а x_k – узлы интегрирования, причем

$$x_k \in [a, b], k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Интервал интегрирования $[a, b]$ делится на n элементарных одинаковых отрезков, так что длина каждого (шаг отсчетов) составляет

$$h = (b - a) / k. \quad (3)$$

При этом $f(x_k)$ можно рассматривать как значения последовательных дискретных отсчетов функции $f(x)$, следующих с интервалом h , что иллюстрирует рис. 1. Здесь показана исходная функция (синим цветом) и k ее дискретных отсчетов.

Предлагается при изучении численного интегрирования использовать «радиотехнический» подход, при котором решение задачи фактически сводится к оптимальному восстановлению продискретизированной функции по отсчетам.

При этом можно использовать правила дискретизации, вытекающие из теоремы отсчетов Котельникова. В частности, восстановление функции по отсчетам, а, следовательно, и вычисление интеграла получается более точным при использовании:

– во-первых, большего числа отсчетов на заданном интервале;

Возможности численного интегрирования функций с применением наиболее популярных методов – прямоугольников, трапеций, парабол и метода 3/8 – рассмотрены с точки зрения теории дискретизации. Согласно этой теории восстановления функций по дискретным отсчетам выполняется с помощью фильтров низких частот с определенными импульсными характеристиками. Показано, что при одинаковом количестве отсчетов вычисление интеграла дает точно одинаковый результат при использовании методов прямоугольников и трапеций, а также при использовании импульсных характеристик, обладающих определенной симметрией.

– во-вторых, фильтров, восстанавливающих функцию по отсчетам, с оптимизированными характеристиками, которые приближаются к характеристикам идеального фильтра нижних частот.

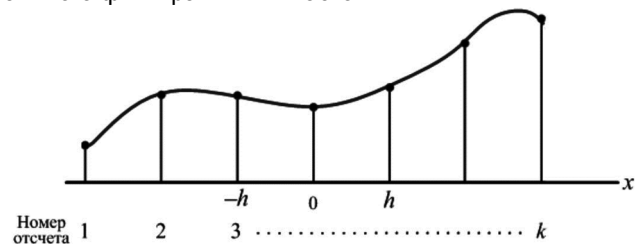


Рис. 1. Дискретизированная функция

Требуется найти оптимальное количество отсчетов и вид импульсной характеристики восстанавливающего фильтра, при которых для численного интегрирования будет достаточно минимального количества операций.

Для вычисления интеграла, т.е. для оценки площади под кривой $f(x)$, можно воспользоваться результатами теории дискретизации [5]. В соответствии с этой теорией дискретные отсчеты образуются путем перемножения исходной функции $f(x)$ на дискретизирующую функцию $D(x)$, которая представляет собой последовательность дельта-функций и записывается в виде

$$D(x) = h \sum_k \delta(x - kh). \quad (4)$$

Результат дискретизации выражается как

$$f^*(x) = f(x)D(x), \quad (5)$$

что с учетом свойства дельта-функции [6]

$$f(x)\delta(x - kh) = f(kh)\delta(x - kh) \quad (6)$$

дает

$$f^*(x) = hf(kh)\sum_k \delta(x - kh), \quad (7)$$

где k – номер отсчета, $k = 1, 2, \dots, k$.

Для восстановления исходной функции следует сгладить отсчеты с помощью фильтра нижних частот. Рассматриваемые преобразования отображаются эквивалентной схемой, показанной на рис. 2.

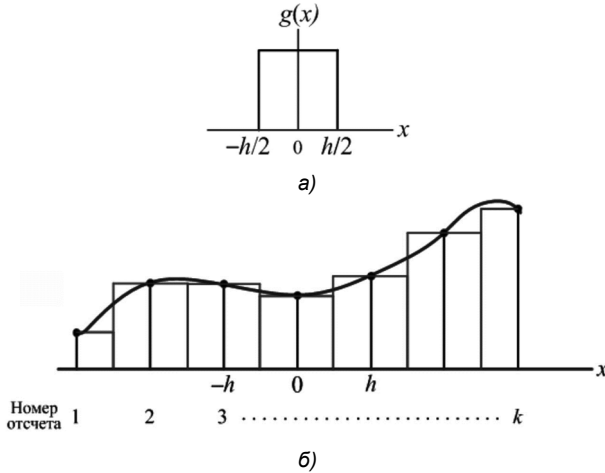


Рис. 2. Эквивалентная схема восстановления функции по отсчетам

Действие фильтра описывается операцией свертки

$$f_1(x) = f^*(x) * g(x), \quad (8)$$

где $f(x)$ – исходная функция; $g(x)$ – импульсная характеристика фильтра; $f^*(x)$ – дискретизированная (выраженная в отсчетах) исходная функция; $f_1(x)$ – функция, восстановленная по отсчетам.

Операция свертки выражается как

$$f^*(x) * g(x) = \int f(z)g(x - z)dz. \quad (9)$$

В частном случае свертки с дельта-функцией получаем

$$\delta(x - a) * g(x) = g(a). \quad (10)$$

Далее рассматриваются некоторые примеры восстановления функции по отсчетам с использованием различных фильтров.

Применение фильтра с импульсной характеристикой $\Pi(x)$

Метод с применением фильтра с прямоугольной импульсной характеристикой $g(x)=\Pi(x)$ в вычислительной технике называется методом прямоугольников. Функция $\Pi(x)$ выражается как

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < h/2; \\ 1/2, & \text{при } |x| = h/2; \\ 0, & \text{при } |x| > h/2. \end{cases} \quad (11)$$

что иллюстрирует рис. 3 а. Здесь h – шаг отсчетов.

Результат действия фильтра иллюстрирует рис. 3 б. Здесь каждый отсчет в результате свертки замещается прямоугольником $\Pi(x)$ с амплитудой, определяемой величиной отсчета.

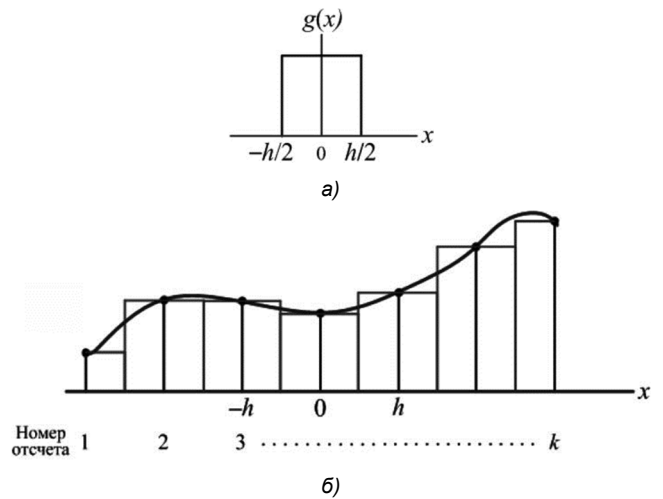


Рис. 3. Восстановление функции с помощью прямоугольников

В этом случае величина интеграла функции вычисляется как сумма площадей отсчетных прямоугольников, причем необходимо учитывать «краевой эффект», который сводится к тому, что левый и правый граничные прямоугольники имеют половинную площадь («краевые» отсчеты учитываются с половинным весом). В результате интеграл выражается как

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \sum_{i=2}^{k-1} f_i + \frac{1}{2} f_k \right]. \quad (12)$$

В области вычислительной техники рассмотренный вариант называют методом средних прямоугольников.

Понятно, что для уменьшения ошибки вычисления интеграла (как и для снижения ошибки восстановления функции) следует увеличивать число отсчетов k .

Применение фильтра с треугольной импульсной характеристикой

Метод с применением фильтра с треугольной импульсной характеристикой в вычислительной технике называется методом трапеций.

Треугольная импульсная характеристика, показанная на рис. 4 а, записывается как

$$g(x) = [1 - |x|/h] \times \Pi(x/2). \quad (13)$$

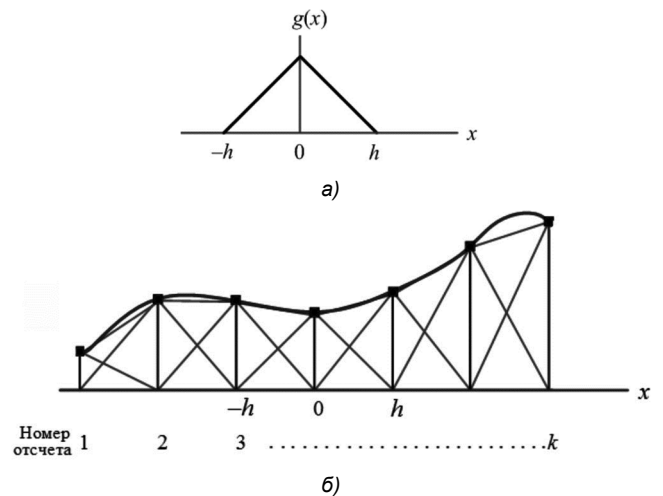


Рис. 4. Восстановление функции с помощью треугольников

Эта импульсная характеристика обеспечивает более высокую точность восстановления функции по отсчетам, что может быть подтверждено исследованием преобразования спектров исходной функции.

Как видно из рис. 4 б, величина интеграла функции выражается суммой площадей отсчетных треугольников, причем здесь также необходимо учитывать «краевой эффект» (использовать половинные веса для левой и правой граничных треугольников).

Таким образом, интеграл функции $f(x)$ выражается суммой площадей треугольников в виде

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_k + \sum_{i=2}^{k-1} f_i \right], \quad (14)$$

что совпадает с выражением для прямоугольников (12).

Применение фильтра с косинусквадратичной импульсной характеристикой

Фильтр с косинусквадратичной импульсной характеристикой вида

$$g(x) = \cos^2(\pi x / 2h) \times \Pi(x / 2), \quad (15)$$

показанной на рис. 5 а, обеспечивает более точное восстановление функции по отсчетам, чем фильтр с треугольной импульсной характеристикой. Рис. 5 б иллюстрирует вычисление интеграла как суммы \cos^2 -импульсов.

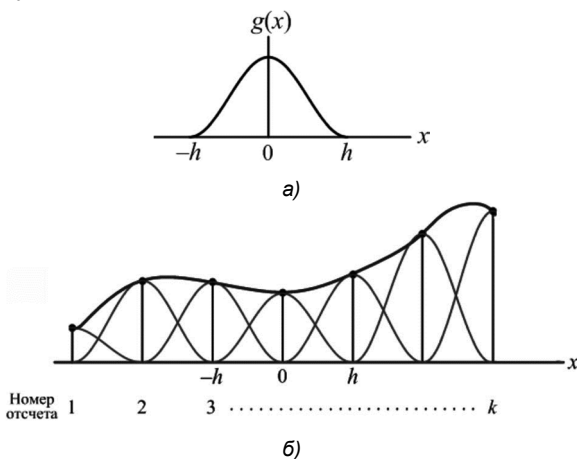


Рис. 5. Восстановление функции с помощью \cos^2 -импульсов

При вычислении интеграла здесь, также как в предыдущих вариантах, необходимо учитывать «краевой эффект».

С учетом значения интеграла [7]

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \quad (16)$$

площадь импульсной характеристики $g(x)$ составляет

$$\int_{-h}^h g(x) dx = \int_{-h}^h \cos^2\left(\frac{\pi}{2h} x\right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{2h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} x\right) \Big|_{-h}^h = h. \quad (17)$$

Таким образом, интеграл функции $f(x)$ выражается как сумма площадей косинусквадратичных отсчетных импульсов $g(x)$ в виде

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_1 + \sum_{i=2}^{k-1} f_i + \frac{1}{2} f_k \right], \quad (18)$$

т.е. совпадает с выражением для прямоугольников (12).

Отсюда нетрудно сделать вывод, что для определения значения интеграла импульсная характеристика используемого линейного фильтра нижних частот должна обладать осевой симметрией относительно оси ординат, а ее правая и левая граничные линии должны иметь центральную симметрию относительно точек с координатами $x = \pm h / 2$.

Интегрирование методом парабол Симпсона

Применение для интегрирования функций метода Симпсона означает переход к интерполяции второго порядка (с использованием парабол) [1].

В качестве исходной функции принимается $f(x)$, представленная на рис. 1. Согласно методу Симпсона для каждого фрагмента исходной функции, представленного тремя последовательными отсчетами, строится парабола, показанная коричневым цветом на рис. 6.

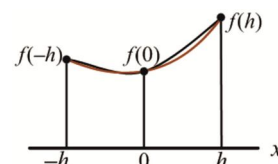


Рис. 6. Фрагмент функции $f(x)$ с тремя отсчетами и параболой

Парабола для трехотсчетного фрагмента функции записывается как

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C. \quad (19)$$

Используя координаты трех отсчетных точек, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh + C &= f(-h); \\ C &= f(0); \quad Ah^2 + Bh + C = f(h), \end{aligned} \quad (20)$$

откуда находятся коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= \frac{[f(h) + f(-h)] - 2f(0)}{2h^2}; \\ B &= \frac{[f(h) - f(-h)]}{2h}; \quad C = f(0), \end{aligned} \quad (21)$$

что и определяет искомую параболу (19).

В результате интегрирования площадь фрагмента функции выражается как

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} [f(-h) + 4f(0) + f(h)]. \quad (22)$$

Восстановление по Симпсону исходной функции $f(x)$, представленной в отсчетах, иллюстрирует рис. 7, где исходная функция обозначена синим, а аппроксимация исходной функции тремя трехотсчетными параболическими фрагментами – коричневым цветом.

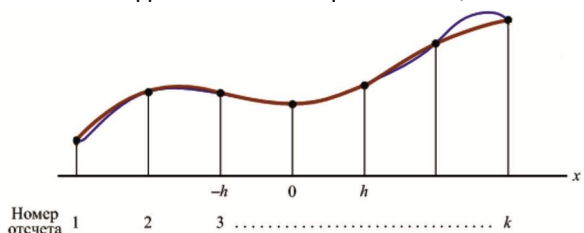
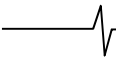


Рис. 7. Аппроксимация по методу Симпсона (параболами)



Как следует из выражения (22), граничные отсчеты парабол (с нечетными номерами $2i+1$) должны учитываться с весом 2, первый и последний отсчеты (с номерами 1 и k) – с весом 1, а отсчеты с четными номерами $2i$ – с весом 4). Таким образом, значение интеграла при использовании метода парабол Симпсона вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f_1 + 4 \sum_{i=1}^n f_{2i} + 2 \sum_{i=1}^n f_{2i+1} + f_k \right], \quad (23)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, k; k = 2n + 1; n = 0, 1, 2, \dots$

Из выражения (23) следует, что площадь под кривой $f(x)$ на интервале $(a; b)$ является суммой площадей прямоугольников, высота которых определяется значениями задействованных отсчетов, а ширина – их положением в последовательности отсчетов, как показано на рис. 8.

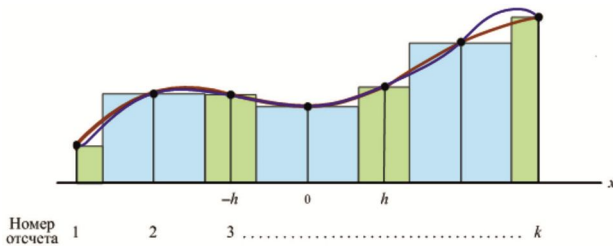


Рис. 8. Прямоугольники, определяющие значение интеграла от $f(x)$

Здесь прямоугольники, соответствующие нечетным отсчетам, показаны зеленым цветом, а соответствующие четным отсчетам – голубым цветом. Краевые прямоугольники, как и ранее, имеют половинную площадь нечетных отсчетов. Для проверки можно воспользоваться простым примером прификсированной $f(x)=1$, тогда площадь под кривой, очевидно, составит $(k-1)h$.

Описанные операции могут быть реализованы эквивалентной схемой, представленной на рис. 9.

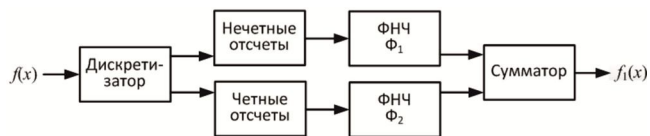


Рис. 9. Восстановление функции с помощью парабол

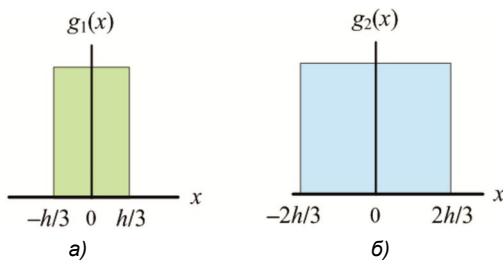


Рис. 10. Импульсные характеристики фильтров Φ_1 и Φ_2

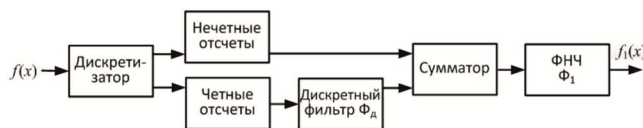


Рис. 11. Упрощенная эквивалентная схема интегрирования по Симпсону

Отсчеты функции $f(x)$ разделяются на четные и нечетные. Затем производится фильтрация последовательностей отсчетов с помощью фильтров, имеющих прямоугольные импульсные характеристики

$$g_1(x) = \Pi(3x/2), \quad g_2(x) = \Pi(3x/4), \quad (24)$$

показанные на рис. 10. Прямоугольная функция $\Pi(x)$ определена выражением (11). Краевые нечетные отсчеты здесь также учитываются с половинным весом.

В результате действия фильтров и сумматора получается функция $f_1(x)$, представленная в виде последовательности зеленых и голубых прямоугольников на рис. 8.

Показанная на рис. 9 эквивалентная схема может быть несколько упрощена за счет введения дискретного фильтра, обеспечивающего сдвигивание четных отсчетов (рис. 11).

В этой схеме четные отсчеты подвергаются дискретной фильтрации с использованием импульсной характеристики

$$g_0(x) = \delta(x - h/3) + \delta(x + h/3), \quad (25)$$

представленной графически на рис. 12.

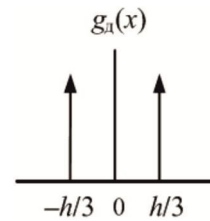


Рис. 12. Импульсная характеристика дискретного фильтра Φ_0

После суммирования образуется последовательность отсчетов, которая на рис. 13 представлена черным (исходные нечетные отсчеты) и красным цветом (четные отсчеты после дискретной фильтрации).

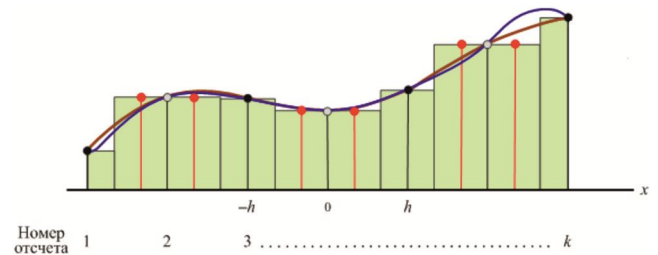


Рис. 13. Прямоугольники, определяющие значение интеграла от $f(x)$

при упрощенной схеме интегрирования по Симпсону

Объединенная последовательность отсчетов подвергается фильтрации с помощью единого фильтра нижних частот Φ_1 с прямоугольной импульсной характеристикой $g_1(x)$, и в результате образуется функция $f_1(x)$, представленная в виде последовательности зеленых прямоугольников на рис. 13.

Таким образом, интегрирование по Симпсону (по методу парабол) сводится к суммированию площадей прямоугольников с использованием дополнительной обработки – удвоения числа четных отсчетов с помощью дискретного фильтра.

Для удобства сравнения с методом Симпсона в исходном методе прямоугольников можно принять общее число отсчетов $k_H = 2n+1$. Общее число исходных отсчетов для метода Симпсона также составит $k_C = 2n+1$. Но полное число отсчетов (с учетом удвоения четных отсчетов при дискретной фильтрации) для метода Симпсона составит $k_{CN} = 3n+1$.

Отсюда можно сделать вывод, что метод Симпсона обеспечивает точность интегрирования в 1,5 раза выше, чем метод прямоугольников (по крайней мере, при достаточно больших k). Но возможно, что метод прямоугольников при числе отсчетов $3k/2$ даст более высокую точность, чем метод Симпсона, поскольку импульсные характеристики не будут попарно повторяться, как для четных отсчетов в методе Симпсона. Для проверки требуется моделирование, например, в среде Matlab.

Интегрирование функции с использованием метода 3/8

Применение для интегрирования функций «метода 3/8» означает переход к интерполяции третьего порядка [1, 4]. По-прежнему, в качестве исходной принимается функция $f(x)$, представленная на рис. 1. При использовании метода 3/8 функция разбивается на фрагменты, каждый из которых содержит четыре отсчета. Площадь под фрагментом функции выражается через отсчеты как

$$\int_0^{3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4] = h \left[\frac{3}{8} f_1 + \frac{9}{8} f_2 + \frac{9}{8} f_3 + \frac{3}{8} f_4 \right], \tag{22}$$

где h – шаг отсчетов. (При $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ площадь составляет $3h$.)

Для каждого фрагмента, представленного четырьмя последовательными отсчетами, строится кривая третьего порядка, как показано на рис. 14.

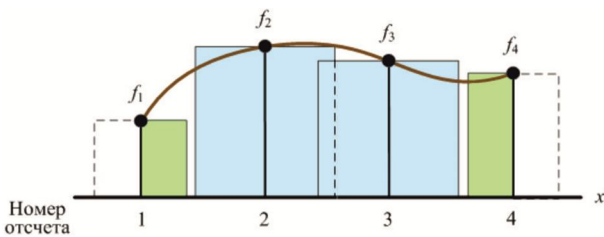


Рис. 14. Фрагмент функции $f(x)$ с четырьмя отсчетами – фильтры с симметричными импульсными характеристиками

При этом весовые коэффициенты отсчетов различаются в три раза. Интегрирование здесь также можно свести к фильтрации отсчетов с использованием прямоугольных импульсных характеристик $g_1(x) = \Pi(4x/3)$ и $g_2(x) = \Pi(4x/9)$, показанных на рисунке зеленым и голубым цветом (с учетом краевого эффекта).

Небольшая модификация прямоугольных фильтров позволяет перейти к «стандартной» диаграмме восстановления функции, где Π -образные импульсные харак-

теристики не пересекаются. В частности, для отсчетов с номерами $(3n+2)$ и $(3n+3)$ можно использовать соответственно фильтры с несимметричными импульсными характеристиками $g_{2L}(x)$ и $g_{2R}(x)$ той же длительности, что $g_2(x)$. Восстановление функции по этому варианту иллюстрирует рисунок 15.

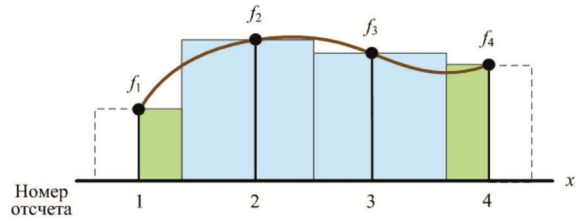


Рис. 15. Фрагмент функции $f(x)$ с четырьмя отсчетами – Π -фильтры с несимметричными импульсными характеристиками

Несимметричные импульсные характеристики выражаются как

$$g_{2L}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -5h/8 < x < h/2; \\ 1/2 & \text{при } x = -5h/8; \\ 1/2 & \text{при } x = h/2; \\ 0 & \text{при } -5h/8 > x > h/2; \end{cases}$$

$$g_{2R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -h/2 < x < 5h/8; \\ 1/2 & \text{при } x = -h/2; \\ 1/2 & \text{при } x = 5h/8; \\ 0 & \text{при } -h/2 > x > 5h/8. \end{cases}$$

Таким образом, восстановление функции с интерполяцией по методу 3/8 может быть реализовано эквивалентной схемой, представленной на рис. 16. Отсчеты с выхода дискретизатора распределяются на три потока – с номерами $(3n+1)$, $(3n+2)$ и $(3n+3)$ и обрабатываются тремя «согласованными» фильтрами с импульсными характеристиками $g_1(x)$, $g_{2L}(x)$ и $g_{2R}(x)$, после чего суммируются, образуя последовательность импульсов, представленную на рис. 15. Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$

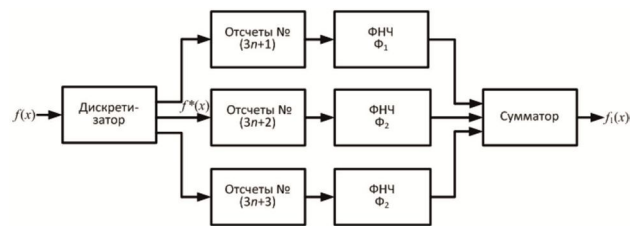
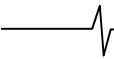


Рис. 16. Эквивалентная схема обработки отсчетов при использовании метода 3/8 и несимметричных фильтров

Общевыражение для интегрирования по «правилу 3/8» получается путем «сцепки» последовательности выражений для фрагментов (22) и имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[f_1 + 2 \sum_{i=1}^n f_{3i+1} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f_{3i+2} + 3 \sum_{i=0}^{n-1} f_{3i+3} + f_k \right], \tag{23}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, (3n+1)$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Нумерацию отсчетов для примера при $n = 3$ поясняют следующие выражения:

$$k = \underbrace{1, 2, 3}, \underbrace{4, 5, 6}, \underbrace{7, 8, 9}, \underbrace{10}.$$

$$i = 0, 1, 2, 3.$$

Оценка точности методов вычисления интеграла

Как показано выше, метод средних прямоугольников и метод трапеций дают одинаковый результат, т.е. при заданном числе отсчетов имеют одинаковую погрешность.

Аналитическая оценка погрешности квадратурной формулы Симпсона во многих случаях весьма затруднительна [1]. Поэтому применяется численная оценка: например, выполняется двойной пересчет с шагом отсчетов h и $2h$, и считается, что совпадающие десятичные знаки получаемых значений принадлежат точному значению интеграла.

Оценка погрешности методов численного интегрирования может быть получена с использованием спектрального подхода. Если функция $f(x)$ представляется дискретными отсчетами (рис. 1), то ее частотный спектр периодизируется, как показано на рис. 17.

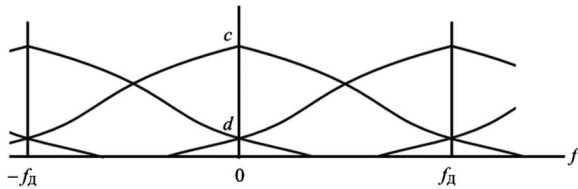


Рис. 17. Спектр дискретизированной функции

При нарушении условий теоремы отсчетов Котельникова побочные спектральные составляющие, возникающие в результате дискретизации, пересекаются с основной составляющей. В результате значение интеграла, выражаемое постоянной составляющей (при $f = 0$), искажается за счет добавления гетеродинированных составляющих от побочных спектров (имеющих центральные частоты $f = \pm f_d$).

Если принять, что истинная постоянная составляющая имеет величину c , а гетеродинированная помеха величину d , то суммарное значение постоянной составляющей составит

$$c_0 = \sqrt{c^2 + 2d^2}.$$

Поскольку, как правило, $c \gg d$, получаем

$$c_0 \approx c + \frac{d^2}{c} = c \left(1 + \frac{d^2}{c^2} \right),$$

и погрешность постоянной составляющей $e = (d/c)^2$.

Таким образом, погрешность интегрирования может оцениваться ошибкой постоянной составляющей функции, возникающей из-за наложения побочных спектров. Понятно, что эту погрешность можно минимизировать путем увеличения частоты дискретизации f_d , т.е. уменьшения шага отсчетов h исходной функции.

Заключение

1. Предложено при изучении численного интегрирования использовать «радиотехнический» подход, при котором решение задачи фактически сводится к оптималь-

ному восстановлению продискретизированной функции по отсчетам, т.е. к более простой и наглядной процедуре.

2. Исследованы особенности восстановления функций таким способом для наиболее популярных методов интегрирования – прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона) и «метода 3/8».

3. Показано, что вычисление интеграла по методам средних прямоугольников и трапеций при одинаковом количестве отсчетов дает точно одинаковый результат (хотя в литературе встречаются и другие утверждения [1]). Тот же результат получается при использовании любых фильтров нижних частот, импульсные характеристики которых обладают осевой симметрией относительно оси ординат, а ее правая и левая граничные линии имеют центральную симметрию относительно точек с координатами $x = \pm h/2$, где h – период отсчетов.

4. Реализация метода парабол Симпсона сводится к использованию при вычислении интеграла двух чередующихся фильтров с прямоугольными импульсными характеристиками, имеющими длительности $2h/3$ и $4h/3$.

5. Реализация метода 3/8 сводится к использованию при вычислении интеграла трех чередующихся фильтров с прямоугольными импульсными характеристиками, имеющими длительности $3h/4$, $9h/4$ и $9h/4$.

6. Объем данных, требуемых для вычисления интегралов, определяется общим числом используемых отсчетов (включая как исходные, так и получаемые при делении начального отсчетного периода на несколько частей).

7. Со спектральной точки зрения вычисление площади под кривой сводится к определению значения постоянной составляющей в спектре функции, т.е. ее среднего значения. Погрешность интегрирования может оцениваться ошибкой в постоянной составляющей функции, возникающей из-за наложения побочных спектров. Понятно, что эту погрешность можно уменьшать до требуемой величины путем увеличения частоты дискретизации f_d .

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М., Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., изд. третье, испр., 1966. – 664 с. Глава XVI.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с. Глава 4.
3. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с. Глава 5.
4. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М., Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1966. – 372 с. Часть 1.
5. Игнатъев Н.К. Дискретизация и ее приложения. – М.: Связь, 1980. – 284 с.
6. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. – М.: Физматгиз, 1960. – 480 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – 13-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1986. – 544 с.