

РЕДУКЦИЯ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Грязных И.В., к.т.н., профессор кафедры телекоммуникационных систем (ТС) Московского технологического университета (МТУ) (МИРЭА), e-mail: martenovsk@mail.ru;

Решетняк С.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: reshets@bk.ru;

Третьяков Г.Н., к.т.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: gennady.tretyakov@rambler.ru;

Шпак А.В., д.т.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: alexandr.shpak@yandex.ru.

REDUCTION OF THE FREQUENCY OF THE SIGNAL IN NONLINEAR FILTERING

Gryaznykh I.V., Reshetnyak S.A., Tretyakov G.N., Shpak A.V.

The active filter containing a nonlinear element with two tunnel diodes is analyzed. The filter circuit is a series oscillating circuit with an active nonlinear element connected to the capacity in parallel. Forced nonlinear oscillations are investigated by numerical simulation. A resonance was found between the input signal and the process leading to self-oscillations. The values of the amplitudes of the input signals and the spectral region where forced oscillations occur are found. The filter parameters are also set, at which it is possible to obtain output harmonics with frequencies lower than the input frequency.

Key words: frequency of signal, reduction, nonlinear filtering, oscillations.

Ключевые слова: частота сигнала, редукция, нелинейная фильтрация, резонанс, автоколебания.

Введение

Фильтрация сигналов нелинейными радиотехническими системами, как правило, описывается дифференциальными уравнениями с различными типами нелинейности. В настоящее время аналитические методы получения их решений далеки от своего завершения. Основным инструментом исследования этих процессов является численный эксперимент. В данной работе был развит метод Эйлера в численном анализе указанных уравнений на примере нелинейного фильтра, в котором экспериментальным путем были обнаружены [1-3] вызывающие внимание эффекты стохастического резонанса и стохастической фильтрации (СФ) сигналов. В результате СФ выходное отношение сигнал/шум превышает аналогичное отношение на входе. Известные в литературе методы получения решений указанных уравнений с автоматическим выбором шага по времени требуют значительных затрат по времени и не вполне приемлемы для получения решений в случае большого числа реализаций сигнала и шума на входе фильтра. В отличие от [1-3] в настоящей работе основное внимание уделяется вопросу нелинейной фильтрации гармонических сигналов.

Схема фильтра представляет собой последовательный колебательный контур с параллельно подсоединенным к емкости активным нелинейным элементом. На входе фильтра действует гармонический сигнал, а реакция снимается в виде напряжения u на емкости. Как было ранее показано [1-3], в рабочей области изменения u вольт-амперная характеристика нелинейного элемента имеет вид $I(u) = -Au + Bu^3$, где коэффициенты ряда по степеням u определяются видом N -

Проанализирован активный фильтр, содержащий нелинейный элемент с двумя туннельными диодами. Схема фильтра представляет собой последовательный колебательный контур с параллельно подсоединенным к емкости активным нелинейным элементом. Путем численного моделирования исследованы вынужденные нелинейные колебания. Было обнаружено существование резонанса между сигналом на входе фильтра и процессом, приводящим к автоколебаниям. Найдены значения амплитуд входных сигналов и области спектра, где возникают вынужденные колебания. Установлены также параметры фильтра, при которых возможно получение гармоник выходного сигнала с частотами, меньшими частотой входного сигнала.

образной вольт-амперной характеристики отдельного туннельного диода. Если напряжение отсчитывать в единицах $(RB)^{-1/2}$, а время в единицах RC , где R и C – величины активного сопротивления и емкости, то безразмерное напряжение x на емкости подчиняется следующему дифференциальному уравнению

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} + W'(x) = e(t), \quad (1)$$

где $e(t) = h \cos(\omega_s t)$, h и ω_s – амплитуда и частота сигнала на входе фильтра, $\mu = L / (R^2 C)$ – параметр инерционности нелинейного фильтра (этот термин используется из-за аналогии уравнений, описывающих нелинейные движения частицы с массой μ и реакции фильтра), L – величина индуктивности в контуре, $\gamma(x) = 1 + \mu(-AR + 3x^2)$ – коэффициент затухания, $W'(x) = -\alpha x + x^3$ – производная потенциальной функции $W(x) = -\alpha x^2 / 2 + x^4 / 4$, $\alpha = AR - 1$.

Для численного решения уравнение (1) представляется системой двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mu} [-\gamma(x)v - W'(x) + e(t)]. \quad (2)$$

После выбора шага по времени Δt из (2) следует

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt,$$

$$v_{n+1} = v_n + \left(AR - \frac{1}{\mu}\right)(x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}^3 +$$

$$+ x_n^3 - \frac{1}{\mu} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [W'(x) - e(t)] dt,$$

где x_n и v_n – значения искоемых величин в точках отсчетов по времени $t_n = n\Delta t$.

Оценивая интегралы методом трапеций, приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}(v_{n+1} + v_n),$$

$$v_{n+1} = v_n + \left(AR - \frac{1}{\mu}\right)(x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}^3 + \quad (3)$$

$$+ x_n^3 - \frac{\Delta t}{2\mu} [W'(x_{n+1}) + W'(x_n) - e_{n+1} - e_n].$$

С уменьшением шага Δt точность формул (3) повышается.

С учетом известной зависимости $W'(x) = -\alpha x + x^3$ из формул (3) нетрудно получить кубическое уравнение относительно x_{n+1} , свободные члены которого содержат только x_n и v_n на предыдущем шаге решения. Так как это уравнение всегда имеет только один вещественный корень, то формулы (3) позволяют при заданных начальных условиях находить все остальные значения x_n и v_n .

В ходе решения было выбрано число точек отсчетов по времени $N = 2^{15}$ с выбранным шагом $\Delta t = 0,05$, что соответствует длительности исследуемых процессов $T = N\Delta t$. Полученные в результате решения представляются зависимостями от номера n шага по времени, так как дискретное значение времени $t_n = n\Delta t$. Спектр процесса на выходе фильтра является дискретным. Номер гармоники m в спектре определяет её частоту $m\Delta f$, $\Delta f = T^{-1}$ – разность между частотами соседних гармоник. Спектры полученных ниже выходных процессов, представляются в виде зависимостей от номера гармоники m в спектре. Для частоты сигнала применяется специальный номер s . Как было показано в [4], при $\mu > 1$ из-за флуктуаций начальных условий в данном активном фильтре развиваются автоколебания, номер основной гармоники которых обозначается s_a .

В работе для критической потенциальной функции ($\alpha = 0$) и нулевых начальных условиях были исследованы вынужденные нелинейные колебания, под которыми понимается наличие в спектре выходного процесса основной гармоники с частотой f_s входного сигнала и амплитудой A_s , превышающей значения амплитуд других гармоник. С точки зрения исследования взаимодействия сигнала и шума наибольший интерес представляют вынужденные колебания с устойчивым пре-

дельным циклом на фазовой плоскости.

На рис. 1 представлены АЧХ нелинейного фильтра – зависимости амплитуды основной гармоники A_s от номера s для трех значений h , удовлетворяющих условию (4).

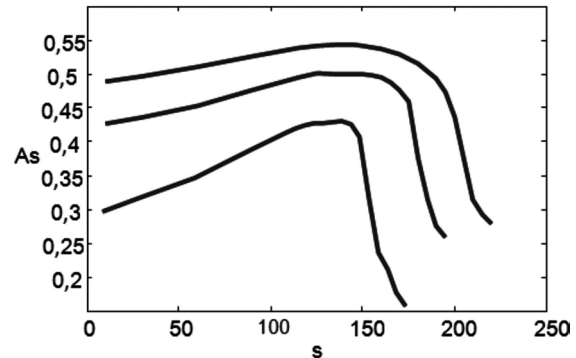


Рис. 1. Зависимость A_s от номера s или частоты входного сигнала при $\mu = 2$. Нижняя, средняя и верхняя кривые соответствуют значениям $h = 0, 0,4$ и $0,6$

При этом было выбрано умеренное значение параметра инерционности $\mu = 2$. Ему согласно [4] соответствовала частота автоколебаний с номером $s_a = 115$.

Из полученных на рис. 1 кривых следует, что наибольшие значения A_s достигаются в области, где частота сигнала близка к частоте автоколебаний ($s \cong s_a$). В этом смысле они указывают на существование резонанса между сигналом на входе фильтра и процессом, приводящим к автоколебаниям. Амплитуды основной гармоники A_s в области высоких частот входного сигнала резко падают.

В работе также были исследованы вынужденные колебания при большом значении параметра инерционности. Для выбранного значения $\mu = 10$ выходной процесс описывается «жестким» дифференциальным уравнением. При этом плавные изменения решений во времени сопровождаются резкими скачками. На рис. 2 приведены АЧХ нелинейного фильтра для $\mu = 10$ и трех значений h , удовлетворяющих условию (4).

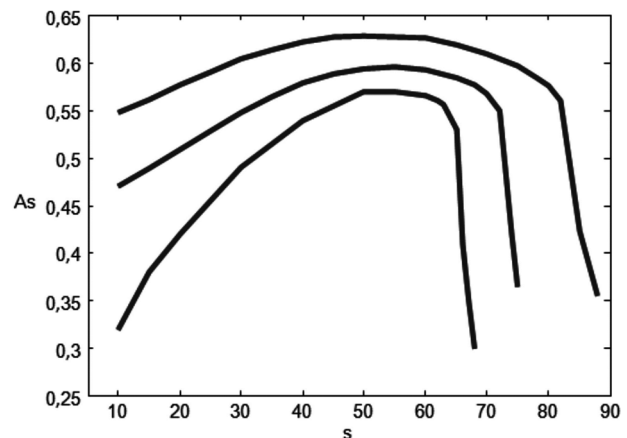


Рис. 2. Зависимость A_s от номера s или частоты входного сигнала при $\mu = 10$. Нижняя, средняя и верхняя кривые соответствуют значениям $h = 0,3; 0,5$ и $0,8$

Для $\mu = 10$ частота основной гармоники автоколебаний имеет номер $s_a = 51$. Из рис. 2 следует, что максимумы кривых АЧХ расположены в области частот входного сигнала с номерами $s \cong s_a$. Они также указывают на существование резонанса между сигналом на входе фильтра и процессом, приводящим к автоколебаниям. С ростом h коэффициент усиления основной гармоники A_s в спектре выходного сигнала падает.

Вынужденные колебания наблюдаются, если амплитуда h входного сигнала имеет достаточно большую величину. Для её оценки амплитуда h сравнивалась с силой $W'(x_0)$ в уравнении (1). Если в качестве характерного значения x_0 выбрать величину, при которой коэффициент затухания обращается в нуль, то приходим к условию на амплитуду входного сигнала $h \geq x_0^3$ или

$$h \geq [(1 - 1/\mu) / 3]^{3/2}. \quad (4)$$

Расчеты показали, что при выполнении условия (4) в области низких частот, выше которых происходит резкое падение A_s от s , действительно имеют место вынужденные колебания, период которых определяется частотой f_s входного сигнала, а на фазовой плоскости им соответствуют устойчивые предельные циклы. Значения h существенно меньше правой части (4), приводят к развитию автоколебаний и воспринимаются системой как ненулевые начальные условия.

Исследование выходного процесса представляет собой многопараметрическую задачу, так как необходимо проанализировать нелинейные колебания в зависимости от амплитуды и частоты входного сигнала, а также от величины параметра инерционности μ фильтра. Из всего множества полученных решений от квазигармонических до квазислучайных в данном случае интерес представляют решения, с помощью которых можно получать основные гармоники с частотами, меньше частоты входного сигнала.

Так для $\mu = 2$, частоты входного сигнала с номером $s = 300$ и амплитудой $h = 0,5$ на рис. 3 изображены соответственно спектр выходного процесса, его зависимость от времени и отвечающий ему предельный цикл на фазовой плоскости.

Из рис. 3 а видно, что основная гармоника с максимальной амплитудой в спектре реакции фильтра имеет частоту $f_s / 3$. Это означает, что с помощью рассматриваемого нелинейного фильтра можно получать на его выходе сигналы с частотами меньшими частоты сигнала – f_s . Процесс деления частоты на три связан с возникновением решения уравнения (1), которое представлено на рис. 3 б и содержит биения в течение периода их колебаний. Биения сопровождается «петлями» на фазовом портрете предельного цикла (см. рис. 3 с).

Проведенные исследования показали также, что выходные сигналы, с частотами меньшими f_s , отражают сложное взаимодействие входного сигнала с процессом, приводящим к возникновению автоколебаний. В

этом можно убедиться, если исследовать зависимость частоты основной гармоники выходного сигнала от параметра инерционности при заданных величинах амплитуды и частоты входного сигнала. Такая зависимость была получена и представлена на рис. 4 для $h = 0,5$ и $s = 300$ (номер, соответствующий частоте входного сигнала).

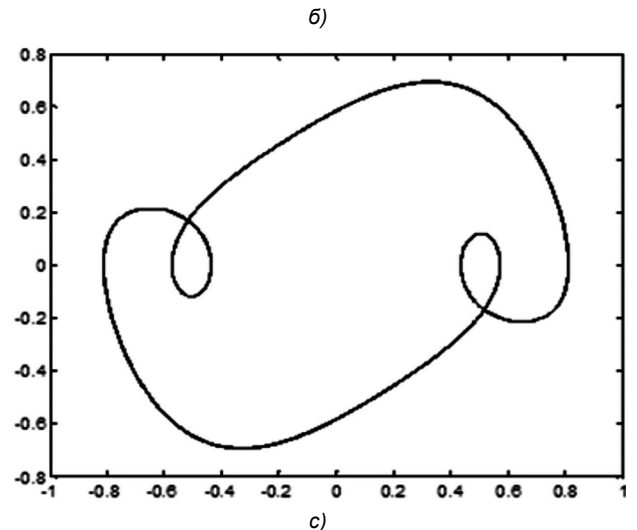
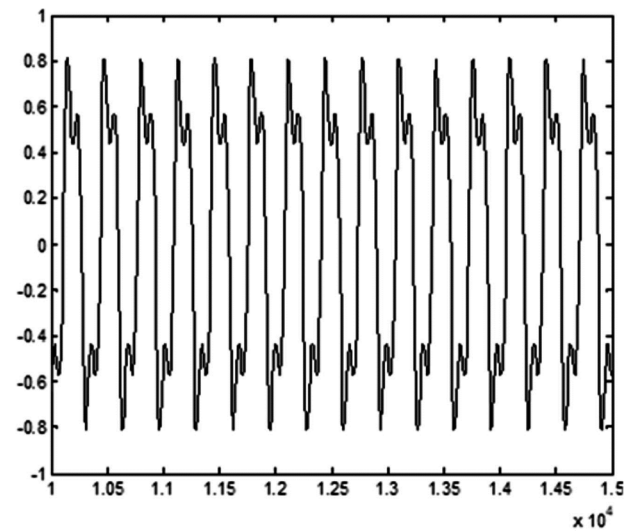
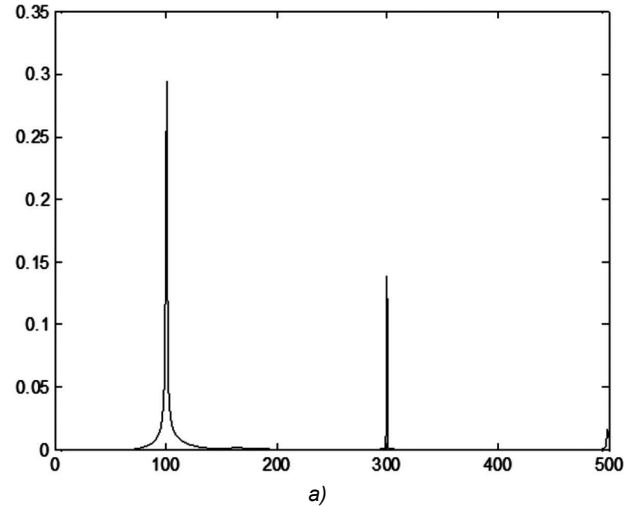


Рис. 3. Спектр выходного процесса (а), его зависимость от шага по времени (б) и вид предельного цикла на фазовой плоскости (с) для $\mu = 2$, $h = 0,5$ и $s = 300$

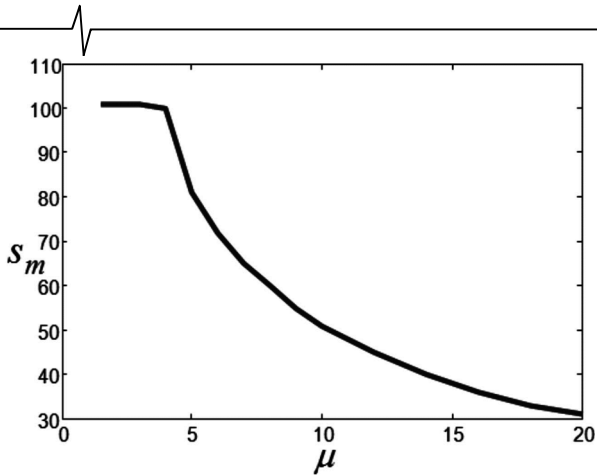


Рис. 4. Зависимость номера s_m частоты основной гармоники с максимальной амплитудой в спектре выходного сигнала от параметра инерционности μ при $h = 0,5$ и $s = 300$

Как следует из рис. 4, частоту основной гармоники выходного сигнала можно изменять в широких пределах путем вариации параметра инерционности фильтра μ . При этом выходной сигнал может не иметь устойчивого предельного цикла, как это показано на рис. 5. Его спектр дан на рис. 6.

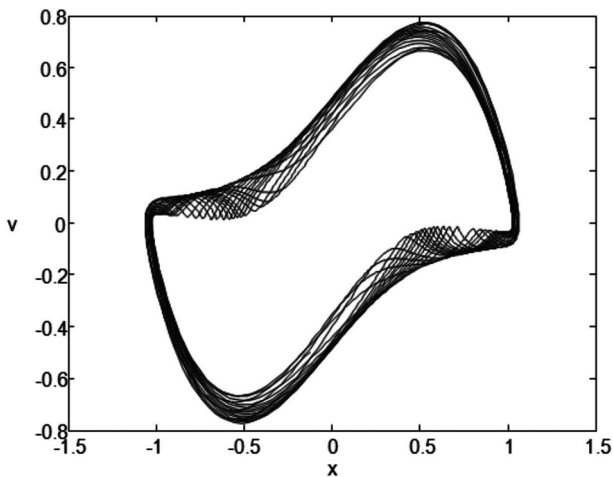


Рис. 5. Вид неустойчивого предельного цикла выходного сигнала при $h = 0,5$, $s = 300$ и выбранного значения $\mu = 7$

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. Вынужденные нелинейные колебания с периодом входного сигнала и устойчивым предельным циклом на фазовой плоскости

возникают при достаточно высоких его амплитудах в низкочастотной области спектра. Ширина этой области зависит от АЧХ основной гармоники и от параметра инерционности фильтра. Наибольшие значения амплитуды наблюдаются при частоте входного сигнала близкой к частоте автоколебаний. Входные сигналы с высокими частотами приводят к развитию автоколебаний. В промежуточной области частот существуют нелинейные колебания, у которых частота основной гармоники меньше частоты входного сигнала и непрерывным образом зависит от параметра инерционности фильтра.

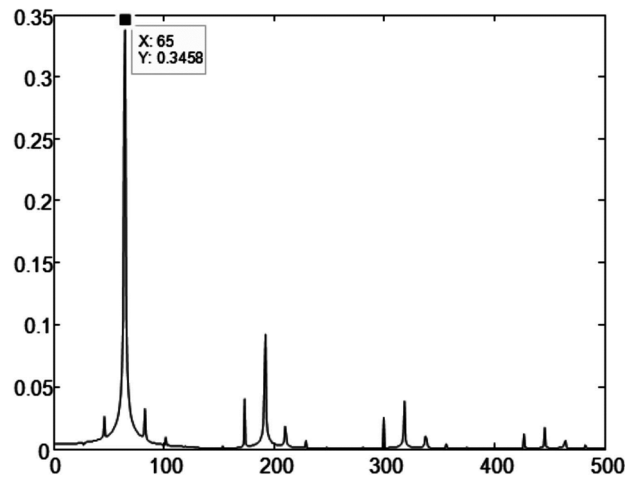


Рис. 6. Спектр выходного сигнала при $h = 0,5$, $s = 300$ и $\mu = 7$

Литература

1. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Стохастический резонанс и фильтрация сигналов в нелинейной электрической системе второго порядка. Радиотехника, 2007, № 9, с. 19-25.
2. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Исследование стохастического резонанса в электрических схемах с несколькими туннельными диодами. Известия вузов. Радиофизика, т. LI, № 9, 2008, с.1-11.
3. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. О стохастической фильтрации сигналов в нелинейных электрических системах. Радиотехника и электроника, 2009, т. 54, № 11, с. 1369-1371.
4. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Об автоколебаниях в нелинейном активном фильтре второго порядка. Цифровая обработка сигналов, 2016, № 2, с. 64-67.