

**АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОМПЕНСАЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ УСИЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ**

*Ле Ван Ку, аспирант кафедры мультимедийных технологий и телекоммуникаций МФТИ, e-mail: levanku@phystech.edu.*

**ALGORITHMIC METHODS FOR COMPENSATION OF POWER AMPLIFIER NONLINEARITY**

*Le Van Ky.*

*Presently there are many effective methods for nonlinearity compensation of digital radio signal power amplifier. In this paper we analyze several well-known algorithms and propose a new variant of nonlinearity compensation of power amplifier. Computer simulation results confirms the effectiveness of the proposed method.*

**Key words:** adaptive predistortion, nonlinear distortion, Wiener model, Hammerstein model, singular value decomposition.

**Ключевые слова:** адаптивное предискажение, нелинейное искажение, модель Винера, модель Хаммерштейна, сингулярное разложение.

**Введение**

Большинство цифровых радиосистем передачи информации содержат многочастотный групповой сигнал, весьма чувствительный к нелинейным искажениям. Это, в свою очередь, предъявляет высокие требования к линейности аналогового тракта, и в частности, к линейности усилителя мощности (УМ) передатчика.

Для моделирования нелинейности УМ требуется учет эффекта памяти. Самый общий способ введения эффекта памяти – это использование ряда Вольтерра (Volterra), который рассматривается при проектировании предискажения данных [1, 2]. Однако большое количество коэффициентов ряда Вольтерра делает его непривлекательным для практического применения. Поэтому обычно реализуется несколько частных случаев ряда Вольтерра, включающих модели Винера (Wiener) (рис. 1), Хаммерштейна (Hammerstein) (рис. 2), а также модель Винера-Хаммерштейна (рис. 3) [3].

Существует достаточно большое число алгоритмических эффективных способов компенсации нелинейности характеристик усилителей мощности цифровых радиосигналов. В статье проанализированы несколько известных алгоритмов и предложен новый вариант компенсации нелинейности усилителя мощности. Приведены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие эффективность предложенных решений.

Модель Винера включается в себя два последовательно соединенных блока – постоянный во времени линейный блок LTI (linear time-invariant) и нелинейный блок без памяти NL (memoryless nonlinearity). Математически эта модель описывается следующим образом:

$$u(n) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l z(n-l), \quad y(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k u(n) |u(n)|^{k-1},$$

$$y(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k \left[ \sum_{l=0}^{L-1} a_l z(n-l) \right] \left| \sum_{l=0}^{L-1} a_l z(n-l) \right|^{k-1},$$

где  $K$  – максимальная степень нелинейности,  $L$  – максимальная задержка,  $a$  и  $c$  – коэффициенты линейного и нелинейного преобразований блоков соответственно.

Как и модель Винера, модель Хаммерштейна также включается в себя два блока, но соединенных в обратной последовательности:

$$v(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k z(n) |z(n)|^{k-1}, \quad y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l v(n-l),$$

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k z(n-l) |z(n-l)|^{k-1}.$$

Рассмотрим особенность модель Хаммерштейна. Обозначим  $C = [c_0, c_1, \dots, c_{L-1}]^T$ ,  $B = [b_1, \dots, b_K]^T$ . Модель Хаммерштейна можно записать следующим образом:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K c_l b_k z(n-l) |z(n-l)|^{k-1},$$

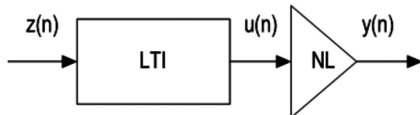


Рис. 1. Модель Винера

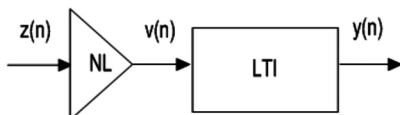


Рис. 2. Модель Хаммерштейна

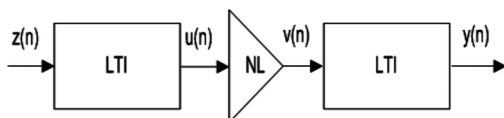
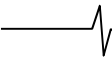


Рис. 3. Модель Винера-Хаммерштейна



Если обозначить  $a_{lk} = c_l b_k$ , то для матрицы  $A$ , состоящую из элементов  $a_{lk}$ , можно выразить как  $A = CB^T$  и  $rank(A) = 1$ . Таким образом, модель Хаммерштейна является частным случаем модели полиномиальной памяти.

Математическое представление модели полиномиальной памяти выглядит следующим образом:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^K a_{lk} z(n-l) |z(n-l)|^{k-1}.$$

Модель Винера-Хаммерштейна является комбинацией моделей Винера и Хаммерштейна. Ее математическое представление выглядит следующим образом:

$$u(n) = \sum_{l=0}^{L_u-1} a_l z(n-l), \quad v(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k u(n) |u(n)|^{k-1},$$

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L_c-1} c_l v(n-l),$$

$$y(n) = \sum_{l_1=0}^{L_c-1} c_{l_1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^K b_k \left[ \sum_{l_2=0}^{L_u-1} a_{l_2} z(n-l_2-l_1) \right] \left[ \sum_{l_2=0}^{L_u-1} a_{l_2} z(n-l_2-l_1) \right]^{k-1},$$

где  $a$ ,  $c$  и  $b$  – коэффициенты линейных блоков и нелинейного блока соответственно.

#### Методы компенсации нелинейности усилителя мощности

Для решения такого типа задач существует два эффективных популярных метода оценки на основе итерационных алгоритмов Ньютона (Newton) и Нарендры-Галмана (Narendra-Gallman) [4]. Основным недостатком этих алгоритмов являются их чувствительность к начальному предположению и то, что они могут сходиться лишь к локальному минимуму. Чтобы избежать этого, Бай (Bai) [5] использовал комбинацию двух методов – наименьших квадратов (least mean square, LMS) и сингулярного разложения (singular value decomposition, SVD), которые могут привести к глобальному минимуму.

Ниже предложена схема предвысказания (рис. 4) и проведено моделирование трех алгоритмов устранения влияния нелинейности УМ: метода LMS/SVD, метода полиномиальной памяти и комбинационного метода. В качестве блока УМ используются модели Хаммерштейна, Винера и Винера-Хаммерштейна.

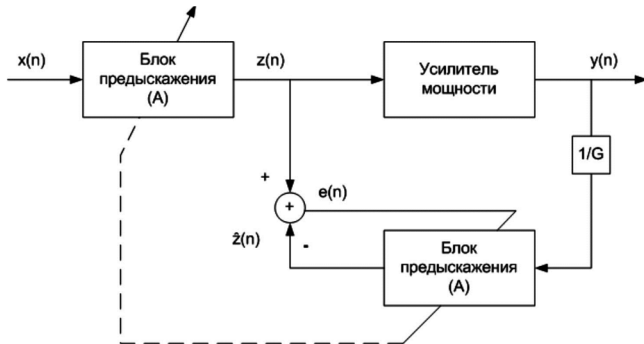


Рис. 4. Схема предвысказания

В процессе обработки сигнала применяется сингулярное разложение (SVD) прямоугольной вещественной

или комплексной матрицы  $M$  порядка  $m \times n$ , имеющее широкое применение при решении многих прикладных задач:

$$M = U \Sigma V^*,$$

где  $\Sigma$  – матрица размера  $m \times n$ , у которой элементы, лежащие на главной диагонали – сингулярные числа матрицы  $M$ , а все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю; матрицы  $U$  (порядка  $m$ ) и  $V$  (порядка  $n$ ) – унитарные матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов матрицы  $M$  соответственно ( $V^*$  – сопряженно-транспонированная матрица  $V$ ).

Сингулярное разложение может быть использовано для нахождения псевдообратных матриц, которые применяются, в частности, в методе наименьших квадратов.

Если  $M = V \Sigma U^*$ , то псевдообратная к ней матрица  $M^+$  находится по формуле:

$$M^+ = V \Sigma^+ U^*,$$

где  $\Sigma^+$  – матрица, псевдообратная к матрице  $\Sigma$ , получаемая из неё заменой каждого ненулевого элемента  $\sigma$  на диагонали на обратный к нему  $1/\sigma$  с последующим транспонированием самой матрицы.

На рис. 4  $y(n)$  и  $z(n)$  – соответственно вход и выход блока предвысказания в обучающем режиме. Схема предвысказания с моделью Хаммерштейна подробно представлена на рис. 5.

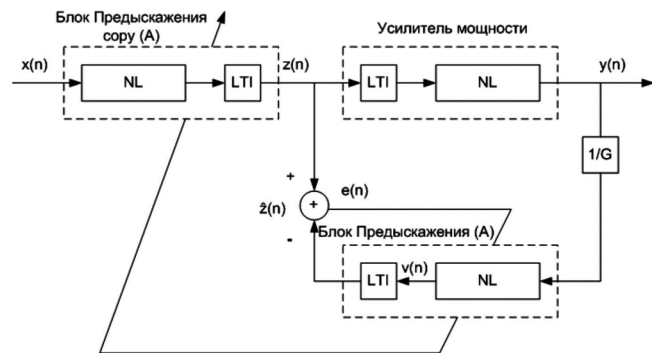


Рис. 5. Схема предвысказания с моделью Хаммерштейна

Методы LMS/SVD и полиномиальной памяти описаны во многих статьях, например, в [5, 6].

**Комбинационный метод** включает в себя 2 метода: метод наименьших квадратов и итерационный метод Ньютона. Его математическое описание выглядит следующим образом.

$$\hat{z}(n) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{p=1}^P a_{pk} y(n-k) |y(n-k)|^{p-1} +$$

$$+ \sum_{q=2}^Q b_q y(n) \left[ \sum_{l=0}^{L-1} c_l |y(n-l)| \right]^{q-1},$$

где  $P$ ,  $Q$  – максимальные степени нелинейности;  $K$ ,  $L$  – максимальные задержки;  $a$ ,  $b$  и  $c$  – коэффициенты каждого блока (приведены выше);  $z$  и  $y$  – выход и вход блока предвысказания соответственно.

Погрешность между результатом модуля обучения  $\hat{z}(n)$  и выходом блока предвысказания  $z(n)$  оценивается так:

$$e(n) = z(n) - \hat{z}(n), \quad J = \sum_{n=1}^N |e(n)|^2 = \sum_{n=1}^N e(n) e^*(n),$$

где  $e^*$  – это сопряжённо-транспонированная матрица  $e$ ,  $N$  – количество отсчетов.

Оптимальные значения  $a_{pk}$ ,  $b_q$ ,  $c_l$  можно найти с помощью их производных.

$$\frac{\delta J}{\delta a_{kp}^*} = -\sum_{n=1}^N e(n) u_{kp}^*(n) = 0, \quad \frac{\delta J}{\delta b_q^*} = -\sum_{n=1}^N e(n) v_q^*(n) = 0,$$

$$\frac{\delta J}{\delta c_l} = -\sum_{n=1}^N 2 \operatorname{Re} [e(n) s_l^*(n)] = 0,$$

где  $u_{kp}(n) = y(n-k) |y(n-k)|^{p-1}$ ,

$$v_q(n) = y(n) \left( \sum_{l=0}^{L-1} c_l |y(n-l)| \right)^{q-1},$$

$$s_l(n) = \sum_{q=2}^Q b_q y(q-1) \left( \sum_{l_1=0}^{L-1} c_{l_1} |y(n-l_1)| \right)^{q-2} |y(n-l)|.$$

С помощью метода наименьших квадратов можно найти параметры  $a_{pk}$ ,  $b_q$ .

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [UV^{(i)}]^H z,$$

где  $U = [u_{10}, \dots, u_{k0}, \dots, u_{1q}, \dots, u_{kq}]$ ,  $V^{(i)} = [v_2^{(i)}, \dots, v_Q^{(i)}]$ ,

$$a = [a_{10}, \dots, a_{k0}, \dots, a_{1q}, \dots, a_{kq}]^T, \quad b = [b_2, \dots, b_Q]^T,$$

$$z = [z(0), \dots, z(N-1)]^T, \quad u_{kq} = [u_{kq}(0), \dots, u_{kq}(N-1)]^T,$$

$$v_q^{(i)} = [v_q^{(i)}(0), \dots, v_q^{(i)}(N-1)]^T.$$

Результат решения методом наименьших квадратов:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}^{(i+1)} \\ \hat{b}^{(i+1)} \end{bmatrix} = ([UV^{(i)}]^H [UV^{(i)}])^{-1} [UV^{(i)}]^H z.$$

Используя итерационный метод Ньютона по данным

$$\hat{a}^{(i+1)}, \hat{b}^{(i+1)}, \text{ необходимо обновить значения } c^{(i+1)}:$$

$$c^{(i+1)} = c^{(i)} - [\nabla_c^2 J(c^{(i)})]^{-1} \nabla_c J(c^{(i)}),$$

$$\left[ \nabla_c J(c^{(i)}) \right]_{ll} = \frac{\delta J}{\delta c_l} \Big|_{c^{(i)}}, \quad \left[ \nabla_c^2 J(c^{(i)}) \right]_{lm} = \frac{\delta^2 J}{\delta c_l \delta c_m} \Big|_{c^{(i)}}.$$

$$\frac{\delta^2 J}{\delta c_l \delta c_m} = \sum_{n=1}^N 2 \operatorname{Re} [-e(n) z_{lm}^*(n) + s_m(n) s_l^*(n)],$$

$$z_{lm}(n) = \frac{\delta s_l(n)}{\delta c_m} =$$

$$= \sum_{q=2}^Q b_q y(q-1) (q-2) \left( \sum_{l_1=0}^{L-1} c_{l_1} |y(n-l_1)| \right)^{q-3} |y(n-l)| |y(n-m)|.$$

$$\nabla_c J(c^{(i)}) = -2 \operatorname{Re} \{ [S^{(i)}]^H E^{(i)} \}, \quad \nabla_c^2 J(c^{(i)}) = 2 \operatorname{Re} \{ [S^{(i)}]^H S^i - [Z^{(i)}]^H E^{(i)} \},$$

где  $S^{(i)} = [s_0^{(i)}, \dots, s_{L-1}^{(i)}]$ ,  $Z^{(i)} = \begin{bmatrix} z_{00}^{(i)} & \dots & z_{0,L-1}^{(i)} \\ z_{10}^{(i)} & \dots & z_{1,L-1}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{L-1,0}^{(i)} & \dots & z_{L-1,L-1}^{(i)} \end{bmatrix}$ ,

$$E^{(i)} = \begin{bmatrix} e^i \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \dots e^i \end{bmatrix}.$$

Итерация методом Ньютона:

$$\hat{c}^{(i+1)} = \hat{c}^{(i)} + [ \operatorname{Re} \{ [S^{(i)}]^H S^i - [Z^{(i)}]^H E^i \} ]^{-1} \operatorname{Re} \{ [S^{(i)}]^H E^{(i)} \}.$$

### Результат программной реализации

В эксперименте для моделей УМ Хаммерштейна и Винера-Хаммерштейна при использовании компенсации нелинейности методами LMS/SVD и полиномиального разложения было показано, что полиномов, содержащих только четные степени нелинейного блока, недостаточно для компенсации нелинейности характеристики УМ, в отличие от полиномов, содержащих только нечетные степени. В то же время использование полиномов, содержащих все натуральные степени, не дает существенного улучшения компенсации нелинейности характеристики УМ по сравнению с использованием полиномов, содержащих только нечетные степени, но приводит к увеличению времени вычислений. Поэтому в данной работе были использованы модели предвыскажения, построенные с помощью полиномов, содержащих только нечетные степени.

Методы LMS/SVD и полиномиального разложения при использовании модели УМ Винера и комбинационный метод при использовании всех видов моделей УМ, приведенных выше, содержащих все натуральные степени, дают существенное улучшение компенсации нелинейности характеристики УМ по сравнению с использованием полиномов, содержащих только нечетные степени. Поэтому данные методы рассмотрены в двух вариантах. Результат компьютерного моделирования показан в табл. 1.

Амплитудная характеристика УМ и спектры сигналов с применением комбинационного метода и LMS/SVD, когда модель УМ является моделью Винера-Хаммерштейна, представлены на рис. 6 и 7. На рис. 6 размытая часть характеризует искажения сигнала при отсутствии коррекции; коррекция приводит к линейаризации характеристики усилителя (линия черного цвета); прямая темная линия иллюстрирует линейную характеристику.

Из рис. 7 видно, что комбинационный метод обеспечивает более гладкий спектр (правое изображение), чем метод LMS/SVD (левое изображение), и практически полностью компенсирует нелинейность характеристики УМ. Спектр черного цвета изображает исходный сигнал, спектры ярких и темных цветов характеризуют сигналы без предвыскажения и с применением методов LMS/SVD или комбинационного метода соответственно.

На рис. 8 показаны сигнальные созвездия на выходе УМ без компенсации нелинейности (слева) и с применением комбинационного метода (справа). Сигнальные созвездия с применением метода LMS/SVD (слева) и метода полиномиальной памяти (справа) изображены на рис. 9.

Таблица 1. Ошибки модуляции MER после усилителя мощности

| Модель                     | Ошибки модуляции MER после УМ (дБ) без предкоррекции | MER после предкоррекции различными методами (дБ) |                     |                             |                     |                      |                     |
|----------------------------|--|--|---------------------|-----------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
|                            |  | Метод LMS/SVD                                    |                     | Метод полиномиальной памяти |                     | Комбинационный метод |                     |
|                            |  | нечетные степени                                 | натуральные степени | нечетные степени            | натуральные степени | нечетные степени     | натуральные степени |
| модель Винера              | 27   | 50,8   | 70,8                | 52,2                        | 71,3                | 54,9                 | 71,4                |
| модель Хаммерштейна        | 27   | 37,2   |                     | 40,3                        |                     | 42                   | 44,4                |
| модель Винера-Хаммерштейна | 27   | 47,8   |                     | 48,3                        |                     | 50,9                 | 55,1                |

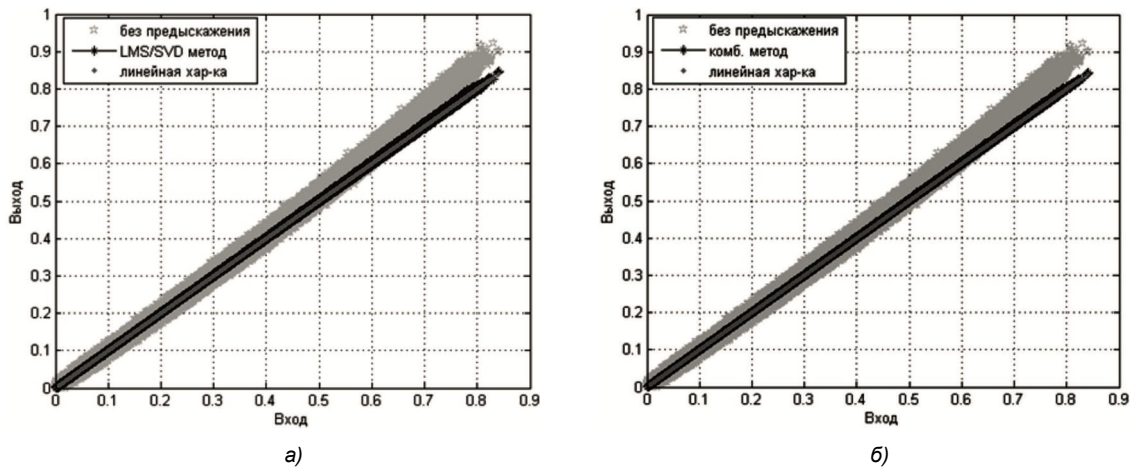


Рис. 6. Амплитудная характеристика с применением методов LMS/SVD (а) и комбинационного метода (б)

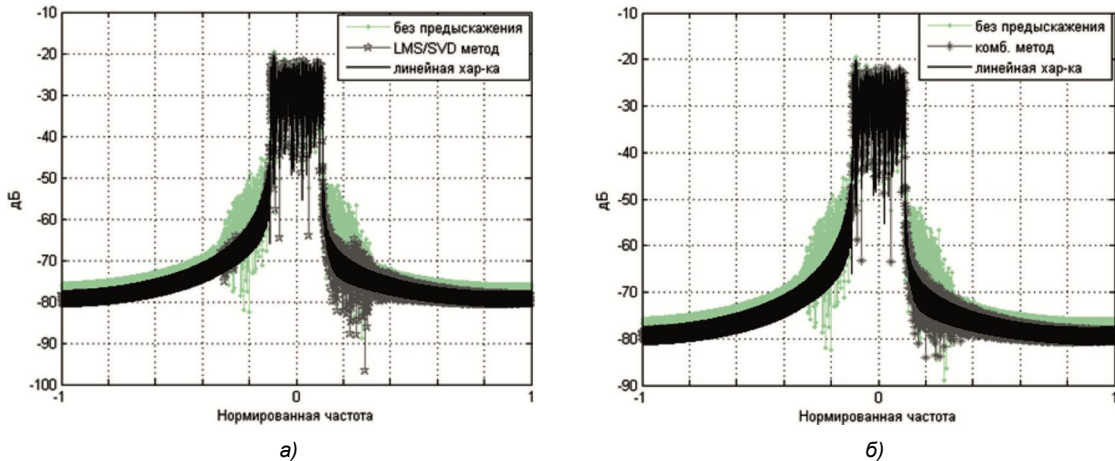


Рис. 7. Спектры сигналов с применением методов LMS/SVD (а) и комбинационного метода (б)

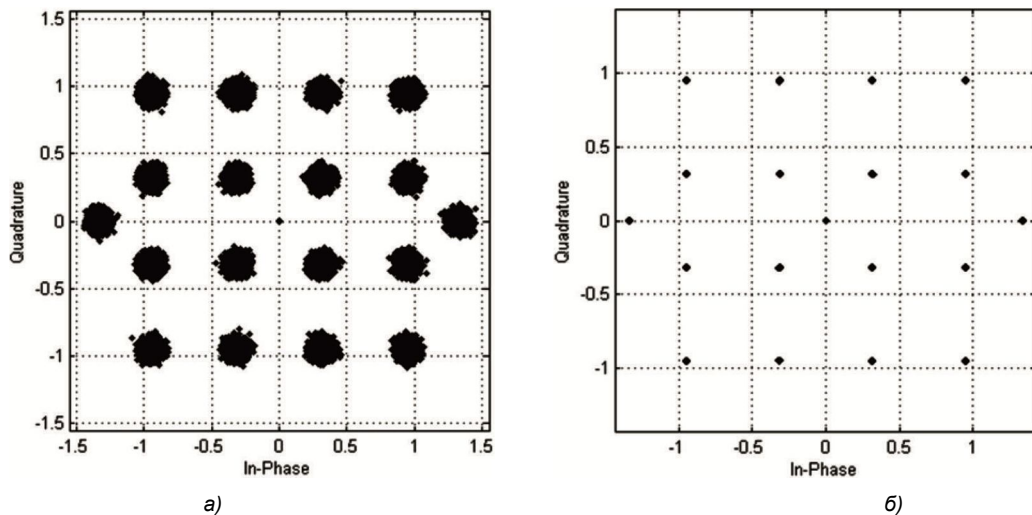


Рис. 8. Сигнальные созвездия на выходе УМ без компенсации нелинейности (а) и с применением комбинационного метода (б)

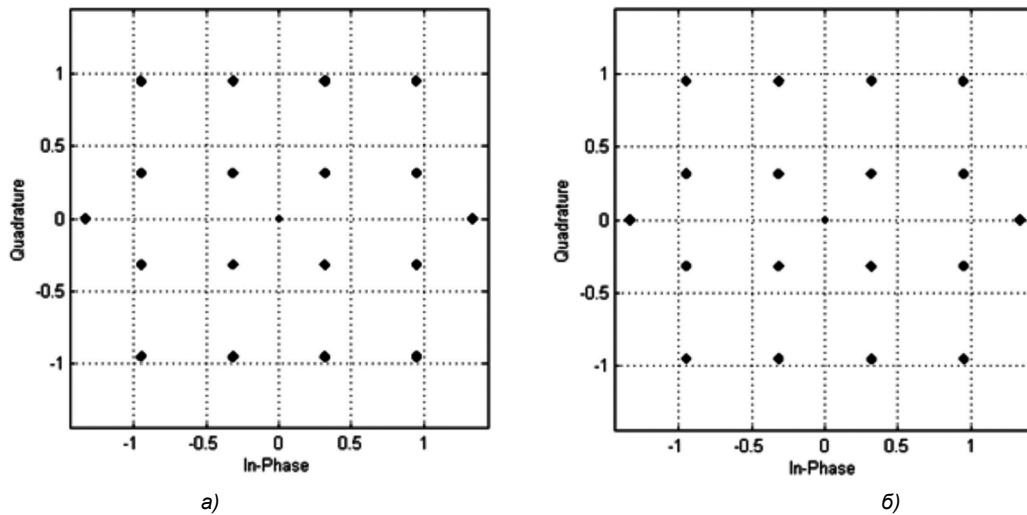


Рис. 9. Сигнальное созвездие на выходе УМ с применением методов LMS/SVD (а) и полиномиальной памяти (б)

Таблица 2. Ошибки модуляции MER после усилителя мощности при большей нелинейности

| Модель                     | Ошибки модуляции MER после УМ (дБ) без предкоррекции | MER после предкоррекции различными методами (дБ) |                     |                             |                     |                      |                     |
|----------------------------|--|--|---------------------|-----------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
|                            |  | Метод LMS/SVD                                    |                     | Метод полиномиальной памяти |                     | Комбинационный метод |                     |
|                            |  | нечетные степени                                 | натуральные степени | нечетные степени            | натуральные степени | нечетные степени     | натуральные степени |
| модель Винера              | 21   | Не работает                                      | 54,8                | 45,6                        | 57,7                | 46,5                 | 57,8                |
| модель Хаммерштейна        | 21   | Не работает                                      | 35,3                | 36,2                        | 36,5                | 37,5                 | 45,2                |
| модель Винера-Хаммерштейна | 21   | Не работает                                      | 41,4                | 41                          | 42                  | 43,4                 | 48                  |

### Литература

В эксперименте был также проанализирован вариант со значительной нелинейностью (малыми значениями ошибок модуляции) на выходе после УМ. Легко видеть, что комбинационный метод устойчив и лучше работает по сравнению с двумя другими методами. Результат компьютерного моделирования показан в табл. 2.

### Заключение

По результатам проведенного анализа известных методов и алгоритмов компенсации нелинейности усилителя мощности был предложен новый комбинационный метод компенсации на основе методов Ньютона и наименьших квадратов.

По результатам компьютерного моделирования следует вывод о том, что модель предсказания полиномиальной памяти наиболее простая. Комбинационный метод, хотя сложен в моделировании, но более эффективен по сравнению с другими рассмотренными вариантами.

1. Eun C. and Powers E.J., «A predistorter design for a memory-less nonlinearity preceded by a dynamic linear system», in Proc. IEEE Global Telecommun. Conf., vol. 1, pp. 152–156, Nov. 1995.
2. Eun C. and Powers E.J., «A new Volterra predistorter based on the indirect learning architecture», IEEE Trans. Signal Processing, vol. 45, pp. 223–227, Jan. 1997.
3. Kang H.W., Cho Y.S. and Youn D.H. «On compensating nonlinear distortions of an OFDM system using efficient adaptive predistorter», IEEE Trans. Commun., vol. 47, pp. 522–526, Apr. 1999.
4. Eskinat E., Johnson S.H. and Luyben W.L. «Use of Hammerstein models in identification of nonlinear systems», AIChE J., vol. 37, pp. 255–267, Feb. 1991.
5. Bai E.W. «An optimal two stage identification algorithm for Hammerstein-Wiener nonlinear systems», in Proc. American Contr. Conf., pp. 2756–2760, June 1998.
6. Ding L., Zhou G.T., Morgan D.R., Ma Z., Kenney J.S., Kim J. and Giardina C.R. «Memory polynomial predistorter based on the indirect learning architecture», in Proc. IEEE Global Telecommun. Conf., pp. 967–971, Nov. 2002.

## РЕДУКЦИЯ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

*Грязных И.В., к.т.н., профессор кафедры телекоммуникационных систем (ТС) Московского технологического университета (МТУ) (МИРЭА), e-mail: martenovsk@mail.ru;*

*Решетняк С.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: reshets@bk.ru;*

*Третьяков Г.Н., к.т.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: gennady.tretyakov@rambler.ru;*

*Шпак А.В., д.т.н., профессор кафедры ТС МТУ (МИРЭА), e-mail: alexandr.shpak@yandex.ru.*

## REDUCTION OF THE FREQUENCY OF THE SIGNAL IN NONLINEAR FILTERING

*Gryaznykh I.V., Reshetnyak S.A., Tretyakov G.N., Shpak A.V.*

*The active filter containing a nonlinear element with two tunnel diodes is analyzed. The filter circuit is a series oscillating circuit with an active nonlinear element connected to the capacity in parallel. Forced nonlinear oscillations are investigated by numerical simulation. A resonance was found between the input signal and the process leading to self-oscillations. The values of the amplitudes of the input signals and the spectral region where forced oscillations occur are found. The filter parameters are also set, at which it is possible to obtain output harmonics with frequencies lower than the input frequency.*

**Key words:** frequency of signal, reduction, nonlinear filtering, oscillations.

**Ключевые слова:** частота сигнала, редукция, нелинейная фильтрация, резонанс, автоколебания.

**Введение**

Фильтрация сигналов нелинейными радиотехническими системами, как правило, описывается дифференциальными уравнениями с различными типами нелинейности. В настоящее время аналитические методы получения их решений далеки от своего завершения. Основным инструментом исследования этих процессов является численный эксперимент. В данной работе был развит метод Эйлера в численном анализе указанных уравнений на примере нелинейного фильтра, в котором экспериментальным путем были обнаружены [1-3] вызывающие внимание эффекты стохастического резонанса и стохастической фильтрации (СФ) сигналов. В результате СФ выходное отношение сигнал/шум превышает аналогичное отношение на входе. Известные в литературе методы получения решений указанных уравнений с автоматическим выбором шага по времени требуют значительных затрат по времени и не вполне приемлемы для получения решений в случае большого числа реализаций сигнала и шума на входе фильтра. В отличие от [1-3] в настоящей работе основное внимание уделяется вопросу нелинейной фильтрации гармонических сигналов.

Схема фильтра представляет собой последовательный колебательный контур с параллельно подсоединенным к емкости активным нелинейным элементом. На входе фильтра действует гармонический сигнал, а реакция снимается в виде напряжения  $u$  на емкости. Как было ранее показано [1-3], в рабочей области изменения  $u$  вольт-амперная характеристика нелинейного элемента имеет вид  $I(u) = -Au + Bu^3$ , где коэффициенты ряда по степеням  $u$  определяются видом  $N$ -

*Проанализирован активный фильтр, содержащий нелинейный элемент с двумя туннельными диодами. Схема фильтра представляет собой последовательный колебательный контур с параллельно подсоединенным к емкости активным нелинейным элементом. Путем численного моделирования исследованы вынужденные нелинейные колебания. Было обнаружено существование резонанса между сигналом на входе фильтра и процессом, приводящим к автоколебаниям. Найдены значения амплитуд входных сигналов и области спектра, где возникают вынужденные колебания. Установлены также параметры фильтра, при которых возможно получение гармоник выходного сигнала с частотами, меньшими частоты входного сигнала.*

образной вольт-амперной характеристики отдельного туннельного диода. Если напряжение отсчитывать в единицах  $(RB)^{-1/2}$ , а время в единицах  $RC$ , где  $R$  и  $C$  – величины активного сопротивления и емкости, то безразмерное напряжение  $x$  на емкости подчиняется следующему дифференциальному уравнению

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} + W'(x) = e(t), \quad (1)$$

где  $e(t) = h \cos(\omega_s t)$ ,  $h$  и  $\omega_s$  – амплитуда и частота сигнала на входе фильтра,  $\mu = L / (R^2 C)$  – параметр инерционности нелинейного фильтра (этот термин используется из-за аналогии уравнений, описывающих нелинейные движения частицы с массой  $\mu$  и реакции фильтра),  $L$  – величина индуктивности в контуре,  $\gamma(x) = 1 + \mu(-AR + 3x^2)$  – коэффициент затухания,  $W'(x) = -\alpha x + x^3$  – производная потенциальной функции  $W(x) = -\alpha x^2 / 2 + x^4 / 4$ ,  $\alpha = AR - 1$ .

Для численного решения уравнение (1) представляется системой двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mu} [-\gamma(x)v - W'(x) + e(t)]. \quad (2)$$