

РЕШЕНИЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Новиков А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: novikovanatoly@yandex.ru.

THE SOLUTION OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN PROBLEMS OF IMAGE PROCESSING

Novikov A.I.

We consider the problematic problems that arise when solving the overdetermined systems of linear algebraic equations in image processing problems. The simplest examples show the singularities of the solution of such systems by the method of least squares and the SVD method with the help of a singular expansion of the basic matrix of the system of equations.

Examples of solving overdetermined systems of equations in real image processing problems are given.

Practical recommendations are offered for finding pseudo-solutions of joint but uncertain systems of equations, as well as inconsistent in the classical sense of systems of equations.

Key words: image, homographic matrix, point cloud, singular matrix decomposition, SVD method.

Ключевые слова: изображение, матрица гомографии, облако точек, переопределенная система уравнений, нормальная система, псевдорешение, сингулярное разложение матрицы, метод SVD.

Введение

В самых различных областях приложений математики часто приходится решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), число уравнений в которых существенно больше числа неизвестных. Такие системы уравнений называют переопределенными. Переопределенные СЛАУ часто возникают и при решении задач обработки изображений. Одна из них связана с нахождением матрицы

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(матрицы гомографии) преобразования точек $X' = \{(x'_i, y'_i)_{i=1}^n\}$ одного плоского изображения к плоскости другого $X = \{(x_i, y_i)_{i=1}^n\}$. В идеальном случае в однородных координатах должно выполняться равенство

$$\begin{pmatrix} \lambda x_i \\ \lambda y_i \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В системе уравнений (1) неизвестными являются 8 коэффициентов h_{ij} матрицы гомографии. Записав в координатной форме уравнения (2) и исключив из них параметр λ , получим пару уравнений:

$$\begin{cases} x_i x'_i h_{31} + x_i y'_i h_{32} + x_i = x'_i h_{11} + y'_i h_{12} + h_{13} \\ y_i x'_i h_{31} + y_i y'_i h_{32} + y_i = x'_i h_{21} + y'_i h_{22} + h_{23} \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрены проблемные вопросы, возникающие при решении переопределенных систем линейных алгебраических уравнений в задачах обработки изображений. На простейших примерах показаны особенности решения таких систем методом наименьших квадратов и методом SVD с помощью сингулярного разложения основной матрицы системы уравнений.

Приведены примеры решения переопределенных систем уравнений в реальных задачах обработки изображений.

Предложены практические рекомендации по нахождению псевдорешений совместных, но неопределенных систем уравнений, а также, несовместных в классическом смысле систем уравнений.

После преобразования системы (3) к стандартной форме получим матричную форму записи СЛАУ

$$AG_H = B, \quad (4)$$

где $A = \begin{pmatrix} Z & O & W_1 \\ O & Z & W_2 \end{pmatrix}$ – основная матрица системы, в

составе которой блоки

$$Z = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \\ x'_4 & y'_4 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} -x_1 x'_1 & -x_1 y'_1 \\ -x_2 x'_2 & -x_2 y'_2 \\ -x_3 x'_3 & -x_3 y'_3 \\ -x_4 x'_4 & -x_4 y'_4 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} -y_1 x'_1 & -y_1 y'_1 \\ -y_2 x'_2 & -y_2 y'_2 \\ -y_3 x'_3 & -y_3 y'_3 \\ -y_4 x'_4 & -y_4 y'_4 \end{pmatrix}, \quad O = (0)_{3 \times 3},$$

$G_H = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32})^T$ – вектор-столбец подлежащих определению элементов матрицы гомографии, $B = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4)^T$ – вектор-столбец координат ключевых точек первого изображения, записанных в указанном порядке.

Для нахождения оценок восьми коэффициентов необходимо как минимум 8 линейно независимых уравнений. Для получения 8 уравнений необходимо минимум 4 пары соответствующих (ключевых) точек [1]. Корректный выбор из множества пар ключевых точек четырех пар является достаточно сложной задачей, от успеха решения которой зависит не только качество совмещения изображений, но даже и сама возможность осуществления совмещения [2]. Названные причины и желание использовать максимальное число пар ключевых точек приводят к задаче поиска матрицы гомографии H по всему множеству найденных пар ключевых точек. В этом случае число n уравнений в СЛАУ (4) становится существенно больше числа неизвестных. В условиях ошибок измерений такая система уравнений – переопределенная СЛАУ – может оказаться несовместной в классическом смысле, и поэтому придется искать псевдорешение [3-6]. Аналогичная задача возникает при объединении (слиянии) двух облаков точек

$U = \{(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^n\}$ и $V = \{(x'_i, y'_i, z'_i)_{i=1}^n\}$. Требуется найти такую матрицу

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{41} & h_{41} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

которая обеспечивала бы выполнение следующих матричных равенств в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} \lambda x_i \\ \lambda y_i \\ \lambda z_i \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{41} & h_{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из-за ошибок измерений матричное равенство (6) может не выполняться для некоторых точек из облаков точек. В этом случае по аналогии с рассмотренной выше двумерной задачей совмещения пары изображений по заданному множеству пар ключевых точек необходимо искать матрицу H , которая минимизировала бы расстояние между точками одного множества и преобразованного другого

$$H_{opt} = \arg \min_H \rho(X, HX').$$

Особенности решения переопределенных линейных систем

Проблемы, возникающие при решении переопределенных систем уравнений, удобно обсудить на простейших примерах. Рассмотрим СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 11. \end{cases}$$

Легко проверить, что она является совместной и переопределенной. Ее решением является вектор $X = (1; 2)^T$. Добавим к этой системе еще два уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 = 17, \\ 7x_1 + 8x_2 = 23. \end{cases} \quad (7)$$

Это пример переопределенной системы. Она также совместна и, по-прежнему, имеет единственное решение $X = (1; 2)^T$, так как третье и четвертое уравнения являются линейной комбинацией первых двух уравнений системы. Представим теперь, что в столбце свободных членов третий и четвертый коэффициенты претерпели незначительные изменения (см. систему (7))

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 = 16, \\ 7x_1 + 8x_2 = 24. \end{cases} \quad (8)$$

Такая ситуация является типичной при работе с реальными данными. Ошибки в регистрации результатов различных измерений неизбежны. Система уравнений (8) несовместна, так как не совпадают ранги ее основной и расширенной матриц (ранг основной матрицы равен 2, а расширенной 3). Вместе с тем из физических соображений, как правило, следует, что СЛАУ типа (8) должна иметь решение. В этом случае, как известно, ищут псевдорешение СЛАУ [3-6].

Задачи нахождения матриц гомографии при преобразовании одного множества точек к другому множеству точек с произвольным количеством точек в них как в двумерном случае (1), так и в трехмерном (5) формулируются одинаково

$$\|AG_H - B\|_{G_H}^2 \rightarrow \min. \quad (10)$$

В составе (10) $\|(\cdot)\|$ – евклидова норма. В двумерном случае структура матриц A, G_H, B приведена во введении. В трехмерном случае в задаче слияния облаков точек они будут иметь соответственно следующий вид:

A – блочная матрица размером $3n \times 15$:

$$A_{3n \times 15} = \begin{pmatrix} Z & O & O & W_1 \\ O & Z & O & W_2 \\ O & O & Z & W_3 \end{pmatrix}$$

с блоками в виде матриц $Z_{n \times 4} = (x_i, y_i, z_i, 1)_{i=1}^n$,

$$W_1 = (-x_i x'_i, -y_i x'_i, -z_i x'_i)_{i=1}^n, \quad W_2 = (-x_i y'_i, -y_i y'_i, -z_i y'_i)_{i=1}^n,$$

$$W_3 = (-x_i z'_i, -y_i z'_i, -z_i z'_i)_{i=1}^n;$$

O – нулевая матрица размером $n \times 4$,

G_H – вектор-столбец неизвестных размером 15×1 :

$$G_H = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{14} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{24} \ h_{31} \ h_{32} \ h_{33} \ h_{34} \ h_{41} \ h_{42} \ h_{43})^T;$$

$$B = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)^T$$

размером $3n \times 15$.

В составе матрицы $H_{4 \times 4}$ (5) подматрица

$$R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} - \text{отвечает за вращение облака}$$

точек, а подматрица $T = (h_{14} \ h_{24} \ h_{34})^T$ - за сдвиг облака точек.

Решение задачи (10) методом наименьших квадратов приводит к нормальной СЛАУ [7]

$$(A^T A)G_H = A^T B \quad (11)$$

с основной матрицей

$$A^T A = \begin{pmatrix} Z^T Z & O & Z^T W_1 \\ O & Z^T Z & Z^T W_2 \\ W_1^T Z & W_2^T Z & W_1^T W_1 + W_2^T W_2 \end{pmatrix}$$

при двумерной гомографии (2) и матрицей такой же структуры, но другого размера

$$A^T A = \begin{pmatrix} Z^T Z & O_{4 \times 4} & O & Z^T W_1 \\ O & Z^T Z & O & Z^T W_2 \\ O & O & Z^T Z & Z^T W_3 \\ W_1^T Z & W_2^T Z & W_3^T Z & \sum_{i=1}^3 W_i^T W_i \end{pmatrix},$$

при трехмерной гомографии (при преобразовании облаков точек).

Правые части нормальных уравнений при двумерной и трехмерной гомографии имеют соответственно следующий вид:

$$A^T B = \begin{pmatrix} Z^T B_1 & Z^T B_2 & \sum_{i=1}^2 W_i^T B_i \end{pmatrix}^T,$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} Z^T B_1 & Z^T B_2 & Z^T B_3 & \sum_{i=1}^3 W_i^T B_i \end{pmatrix}^T.$$

В этих выражениях

$$B_1 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T,$$

$$B_2 = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T, \quad - \text{вектор-столбцы размеров}$$

$$B_3 = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)^T$$

$n \times 1$.

В последние годы для решения переопределенных СЛАУ широко и часто без особых оснований используется, так называемый, метод SVD [4-6]. В его основе лежит сингулярное разложение основной матрицы СЛАУ в произведение левой и правой ортогональных матриц. Пусть

$$AX = B \quad (12)$$

СЛАУ, число m уравнений в которой больше числа n неизвестных. В методе SVD матрица A преобразуется в произведение матриц

$$A = USV^T. \quad (13)$$

В (13) матрицы U и V являются ортогональными, при этом матрица U называется левой сингулярной, а матрица V - правой сингулярной. Матрица S - диаго-

нальная матрица: $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, 0, \dots, 0)$.

Числа $\sigma_i, i = \overline{1, k}$ называются сингулярными числами матрицы A . Отметим, что квадраты сингулярных чисел $\sigma_i, i = \overline{1, k}$ матрицы A совпадают с собственными значениями матрицы $A^T A$, а число k ненулевых значений сингулярных чисел равно рангу матрицы A .

Система уравнений (12) с учетом (13) принимает следующий вид $USV^T X = B$. Отсюда с учетом ортогональности матриц U и V получаем решение СЛАУ (12).

$$X = A^+ B = VS^{-1}U^T B. \quad (14)$$

Матрица $A^+ = VS^{-1}U^T$ в составе (13) называется псевдообратной, при этом

$$S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k}, 0, 0, \dots, 0\right).$$

Обращение к методу SVD при решении переопределенных СЛАУ не всегда оправдано. Если ранг основной матрицы в составе переопределенной и, возможно, несовместной СЛАУ (4) равен числу неизвестных ($\text{rg}A = n$), то решение СЛАУ (12) можно и целесообразно находить как решение нормальной СЛАУ (11). Решения нормальной СЛАУ (11), отвечающей СЛАУ (12) и решение СЛАУ (12) методом SVD в этом случае совпадают. Это, во-первых. Во-вторых, метод SVD требует большего числа вычислительных операций по сравнению с методом Гаусса, и, тем более, по сравнению с методом квадратного корня [7, 8], которым целесообразно решать нормальные СЛАУ, то есть СЛАУ с симметричной и положительно определенной основной матрицей [7].

Примеры решения переопределенных СЛАУ

Рассмотрим в качестве примера несовместную СЛАУ (8). Отвечающая ей нормальная СЛАУ (11) имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 84 & 100 \\ 100 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 286 \\ 342 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Решением этой совместной системы и одновременно псевдорешением СЛАУ (8) будет вектор $X = (1,5 \ 1,6)^T$.

Методом SVD система уравнений (8) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 0,1525 & 0,8226 \\ 0,3499 & 0,4214 \\ 0,5474 & 0,0201 \\ 0,7448 & -0,3812 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14,269 & 0 \\ 0 & 0,626 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} \quad (16)$$

В левой части системы (16) первые три матрицы являются соответственно левой сингулярной матрицей U , диагональной матрицей сингулярных чисел S и правой

сингулярной матрицей V^T . Сингулярное разложение матрицы A в составе (16) иногда называют экономным сингулярным разложением. В полном сингулярном разложении матрицы U и S будут иметь размер 4×4 , а матрица V^T - 4×2 . Недостающие два столбца и две строки в составе матриц U и V^T можно найти с помощью алгоритма ортогонализации Грамма-Шмидта [9].

Решением СЛАУ (16) и, значит, псевдорешением СЛАУ (8) является вектор $X = (1,5 \ 1,599)^T$. Как и следовало ожидать, решение нормальной СЛАУ (15) и решение СЛАУ (8) методом SVD (решение СЛАУ (16)) практически совпали.

Рассмотрим еще один пример

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -3. \end{cases} \quad (17)$$

Ранги основной и расширенной матриц данной СЛАУ не совпадают ($rgA = 2$, $rg(A|B) = 3$). Значит, в классическом смысле данная система уравнений несовместна. Найдем псевдорешение СЛАУ (17).

Нормальная СЛАУ, отвечающая этой системе уравнений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 21 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ранги основной и расширенной матриц этой системы равны 2. Значит, эта СЛАУ совместна, но ее решением будут все точки, лежащие на некоторой прямой в пространстве R^3 . Искомым решением является вектор

$$X = \left(\frac{1}{6} - t \quad -\frac{5}{6} \quad t \right)^T.$$

Минимизация полученного решения по параметру t приводит нас к нормальному псевдорешению $X = (0,08(3) \ 0,8(3) \ 0,08(3))^T$ системы.

Отметим, что «псевдорешение»

$X = (-1,3001 \ -0,0000 \ 1,3001)^T$ СЛАУ (17), найденное методом SVD с помощью стандартной программы в MATLAB, существенно отличается от найденного нормального псевдорешения. При этом программа предупреждает о возможной ошибке (Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate.). Следует отметить, что псевдорешение системы (17), найденное методом SVD с помощью оригинальной программы (авторы Колчаев Д.А., Новиков А.И.) практически совпадает с нормальным псевдорешением: $X = (0,0835 \ 0,8340 \ 0,0835)^T$.

Практические выводы из этих двух примеров. Если а priori известно, что основная матрица A переопределенной СЛАУ (12) является матрицей полного ранга ($rgA = n$), то целесообразно решение (нормальное «псевдорешение») системы искать как решение нормальной СЛАУ (11). Если же известно, что ранг основной матрицы A переопределенной СЛАУ (12) может

быть меньше числа неизвестных ($rgA = k < n$), то псевдорешение системы (12) целесообразно искать методом SVD. Хотя, заметим, что и в этом случае можно искать нормальное псевдорешение системы, но с дополнительной минимизацией найденного $(n - k)$ - параметрического решения по этим параметрам.

Пример решения СЛАУ (17) различными методами и с помощью различных вариантов программ подтверждает верность еще одного утверждения: нельзя отождествлять алгоритм решения задачи и некоторую его программную реализацию.

Рассмотрим примеры нахождения нормального решения СЛАУ и решения (псевдорешения) этих же СЛАУ с помощью метода SVD в реальных задачах [2, 10]. В [2] приведены вычисленные в результате решения нормальной СЛАУ (11) матрицы гомографии в одном случае по 18 парам ключевых точек, а в другом – после удаления некорректной пары точек – по 17 парам точек. Во втором случае (по 17 парам точек) матрица гомографии, приведенная в [2], имела следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0,941 & 0,052 & 21,93 \\ 0,047 & 1,018 & 17,86 \\ 8,32 \times 10^{-6} & 3,74 \times 10^{-5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы гомографии, полученные в результате решения переопределенных систем уравнений (18 и 17 уравнений относительно 8 неизвестных) методом SVD, полностью совпали с решениями нормальных СЛАУ (11). Это ожидаемый результат, поскольку в обоих случаях основная матрица СЛАУ была матрицей полного ранга.

Рассмотренный частный пример на самом деле является подтверждением общего свойства алгоритмов построения проективных преобразований: основная матрица СЛАУ типа (4) является матрицей полного ранга: $rgA = \min\{m, 8\} = 8$. Поэтому решение нормальной СЛАУ (11) и решение СЛАУ (4) методом SVD в задачах построения проективных преобразований должны совпадать.

В общем случае нормальное псевдорешение СЛАУ (12) и псевдорешение, найденное с помощью сингулярного разложения основной матрицы системы, будут совпадать, если будет выполнено условие $rgA = \min\{m, n\} = n$ ($n \ll m$).

Преимущество получения нормального решения либо нормального псевдорешения в случае несовместной СЛАУ по сравнению с методом SVD заключается в меньшем объеме вычислительных процедур.

Положительный результат решения соответствующих СЛАУ методом SVD заключается в том, что сингулярное разложение матрицы A позволяет лучше понять особенности системы уравнений. Так, в рассмотренном примере (16) из работы [2] первые два сингулярных числа в матрице S оказались существенно больше остальных шести сингулярных чисел. Значит, экономное сингулярное разложение матрицы A с левой сингулярной матрицей U размером 8×2 , матрицей $S_{2 \times 2}$ и матрицей $V_{2 \times 2}^T$ уже позволило бы получить приближенное решение задачи.

Следующий пример построения нормального решения (псевдорешения) переопределенной СЛАУ связан с совмещением двух облаков точек. Первое облако точек является поверхностью гиперболического параболоида

$$z = \frac{x^2}{50} - \frac{y^2}{75}, \quad x = \overline{-10,20}; \quad y = \overline{-8,8}.$$

Оно изображено в нижней части рис. 1.

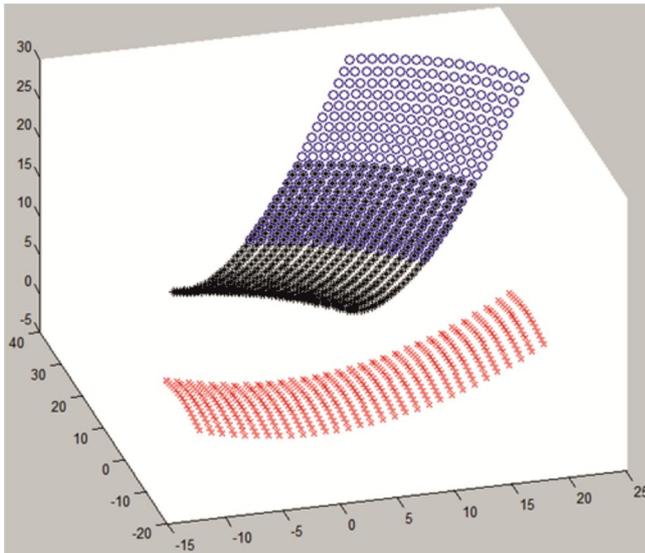


Рис. 1. Результат совмещения облаков точек ($\sigma = 0,01$)

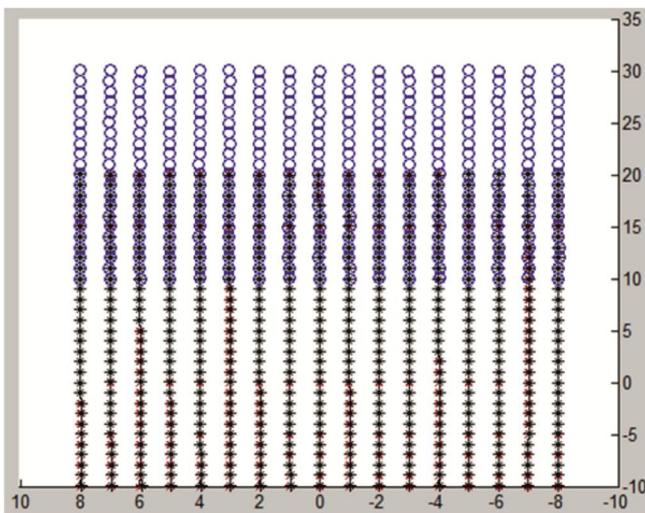


Рис. 2. Результат совмещения облаков точек в проекции точек на плоскость Oxy ($\sigma = 0,01$)

Второе облако точек получено по аналогичной формуле

$$z = \frac{x^2}{50} - \frac{y^2}{75}, \quad x = \overline{10,30}; \quad y = \overline{-8,8}.$$

Первое и второе облако точек имеют общую часть (область перекрытия) в количестве 187 точек: по координате x от 10 до 20, а по координате y – от -8 до 8. Она хорошо видна на рис. 2 и рис. 4 как горизонтальная полоса из совмещенных точек первого и второго облаков в промежутке от 10 до 20 по оси Oy . После формирования облаков точек второе облако подверглось преобразованиям сдвига и поворота. По координате z был выполнен сдвиг на 15 единиц. Затем оно было повернуто относительно каждой из трех осей Ox , Oy и Oz на

углы соответственно $6^\circ, 5^\circ, 60^\circ$. После этого к каждой координате «искаженного» первого облака точек последовательно прибавлялся гауссовский дискретный шум увеличивающейся интенсивности.

В верхней части рис. 1 представлено множество точек второго облака точек после преобразований сдвига и вращений относительно координатных осей с искажениями гауссовским шумом с СКО $\sigma = 0,01$ по каждой координате. Здесь же (в верхней части рисунка) приведен результат слияния облаков точек.

Система линейных алгебраических уравнений, вытекающая из матричного равенства (8), состоит из 187 уравнений относительно 15 неизвестных – элементов матрицы гомографии в трехмерном случае – и является переопределенной СЛАУ. Нормальное псевдорешение этой системы находилось как решение СЛАУ (11).

Матрица гомографии, обеспечивающая «слияние» облаков точек (преобразование первого облака точек ко второму) для $\sigma = 0,01$ имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0,997 & 6,31 \cdot 10^{-5} & 0,005 & 0,004 \\ 0,001 & 0,999 & -0,001 & -0,015 \\ -0,005 & -1,41 \cdot 10^{-5} & 1,009 & 15,011 \\ 2,35 \cdot 10^{-4} & 1,14 \cdot 10^{-5} & 5,18 \cdot 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}$$

Результат слияния облаков точек с помощью этой матрицы гомографии приведен в верхней части рис. 1. Совмещение почти идеальное. Это особенно хорошо видно в проекции точек из совмещенных облаков на плоскость Oxy (рис. 2).

Уклонение $\rho(HX, X')$ образов точек HX первого облака от отвечающих им точек второго облака в области перекрытия $x = \overline{10,20}$; $y = \overline{-8,8}$ равно $\rho(HX, X') = 0,008$.

Увеличение интенсивности шума приводит к существенным искажениям преобразованного облака точек. Так при $\sigma = 0,05$ результат совмещения облаков точек является вполне удовлетворительным в области перекрытия изображений (рис. 3), и далек от удовлетворительного на промежутке $x \in [-10, 10]$, $y \in [-8, 8]$.

Это хорошо видно в проекции совмещенных облаков точек на плоскость Oxy (рис.4)

Эти искажения обусловлены изменениями элементов матрицы гомографии

$$\begin{pmatrix} 0,890 & 0,002 & 0,100 & 0,578 \\ -0,002 & 0,957 & 0,003 & 0,014 \\ -0,087 & -1,41 \cdot 10^{-5} & 1,009 & 15,125 \\ -0,005 & 1,36 \cdot 10^{-5} & 0,007 & 1 \end{pmatrix}$$

Проблема точности слияния облаков точек не связана прямо с обсуждаемыми в данной статье методами решения переопределенных СЛАУ, но, естественно, заслуживает отдельного обсуждения. Приведем основные публикации по этой проблеме. Широко используемым в практике совмещения трехмерных моделей (облаков точек) является итеративный алгоритм ближай-

ших точек ICP [11] с последовательным уточнением соответствия между двумя облаками точек. Алгоритм состоит из двух основных этапов: поиск соответствующих точек в двух облаках на первом этапе, определение параметров преобразования (растяжение, сдвиг и вращение), применение этого преобразования и оценивание функции ошибки – на втором этапе. В качестве функции ошибки в методе point-to-point используется расстояние между соответствующими точками в паре облаков, а во втором методе point-to-plane – расстояние между точкой одного облака и касательной плоскостью к другому облаку.

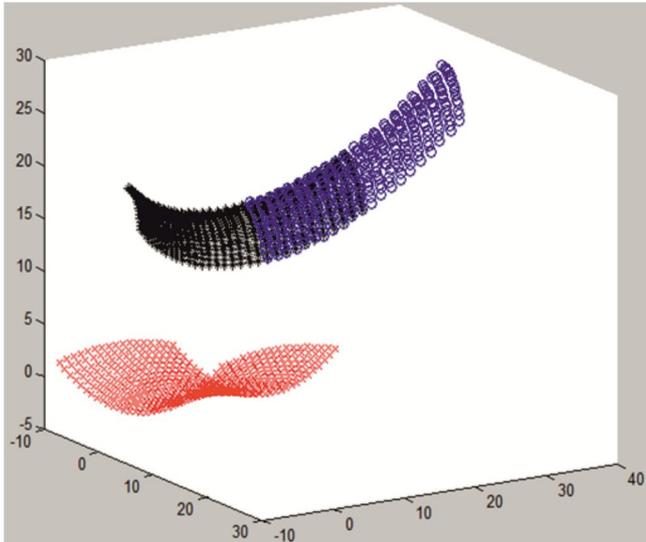


Рис. 3. Результат совмещения облаков точек ($\sigma = 0,05$)

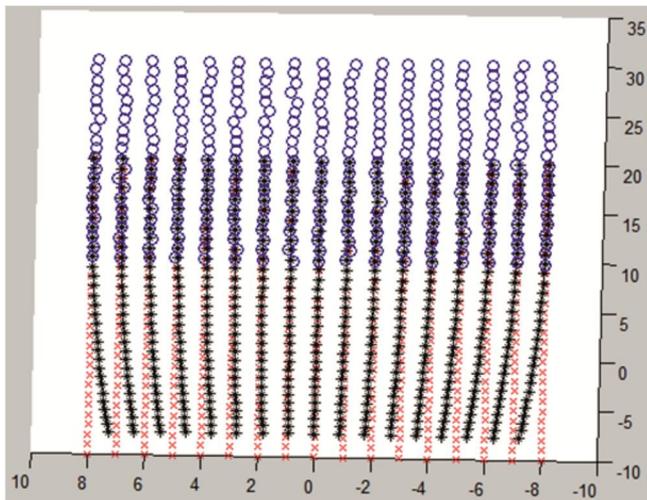


Рис. 4. Результат совмещения облаков точек в проекции точек на плоскость Oxy ($\sigma = 0,05$)

Алгоритм имеет многочисленные модификации, например [12, 13]. В работе [14] предложено замкнутое решение задачи слияния двух облаков точек с функцией ошибки, вычисляемой по методу point-to-plane.

Заключение

Рассмотрены проблемы, возникающие при решении переопределенных и возможно несовместных в класси-

ческом смысле систем линейных алгебраических уравнений и методы решения таких систем в задачах обработки изображений. На простейших примерах проведено сопоставление решения таких систем методом наименьших квадратов с выходом на нормальную систему уравнений и нормальное псевдорешение, с одной стороны, и методом SVD сингулярного разложения основной матрицы системы, с другой.

Приведены примеры переопределенных СЛАУ, возникающих в задачах обработки изображений и их решение названными альтернативными методами.

Предложены практические рекомендации по использованию методов решения линейных систем уравнений в задачах обработки изображений.

Литература

1. A.I. Novikov, V.A. Sablina, M.B. Nikiforov and A.A. Loginov. The Contour Analysis and Image-Superimposition Problem in Computer Vision Systems // Pattern Recognition and Image Analysis, 2015, Vol.25, No 1, pp. 73-80. - DOI: 10.1134/S1054661815020194.
2. Ефимов А.И. Алгоритм поэтапного уточнения проективного преобразования для совмещения изображений / А.И. Ефимов, А.И. Новиков // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 258-266. – DOI: 18287/2412-6179-2016-40-2-258-266.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – 71 с.
5. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и практика. М.: Мир, 1999. – 430 с.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. – 548 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. – 664 с.
8. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988. – 160 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. – 294 с.
10. Холопов И.С. Алгоритм коррекции проективных искажений при маловысотной съемке / И.С. Холопов // Компьютерная оптика. -2017. –Т. 41, № 2. – с. 284-290. – DOI: 10.18287/0134-2452-2017-41-2-284-290.
11. Besl P.J., McKey, Neil D. A Method for Registration of 3-D Shapes // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 14, № 26 1992. pp. 239-256.
12. Du S. Affine iterative closest point algorithm for point set registration/ S. Du, N. Zheng, S. Ying, J. Liu // Pattern Recognition Letters/ - 2010 – 31/ -P. 791-799.
13. A. Makovetskii, S. Voronin, V. Kober, D. Tihonkih. Affine registration of point-to-plane approach//Сб. трудов III межд. Конф. и молодежной школы ITNT – 2017, Самара: Новая техника. 2017. с. 684-688.