

УДК 537.86+621.396.96

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ И АНАЛИЗУ АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Паршин А.Ю., к.т.н., доцент кафедры РТУ Рязанского государственного радиотехнического университета, email: parshin.a.y@rsreu.ru;

Паршин Ю.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой РТУ Рязанского государственного радиотехнического университета, email: parshin.y.n@rsreu.ru.

STATISTICAL APPROACH TO DESIGN AND ANALYSIS OF DETECTION ALGORITHMS OF FRACTAL SIGNALS AND FRACTAL IMAGES

Parshin A. Yu., Parshin Yu. N.

Description and analysis of the parameters of fractal phenomena are considered in context of the theory of optimal statistical solutions. The algorithms for object and edge detection on the image are obtained. The fractal image is given in the form of a two-dimensional fractal Brownian motion - a fractal Brownian surface, as well as a set of distances between vectors in a pseudo-phase space. A refinement of the description of the distances between vectors in a pseudophase space with considering of their given topological dependence, and their probabilistic description is proposed. Expressions for the likelihood ratio logarithm are obtained, the error probabilities are calculated for the object and edge detection in case of Gaussian and non-Gaussian approximations. It is shown that the maximum likelihood estimate of the correlation dimension is sufficient statistics for the detection problem. It is proposed to determine the quality of the edge detection by a system of error probabilities - the probability of false edge fields and the probability of skipping the edge.

Key words: correlation dimension, optimal estimation, maximum likelihood estimation, fractal Brownian motion, error probability of edge detection.

Ключевые слова: корреляционная размерность, оптимальное оценивание, максимально правдоподобные оценки, фрактальное броуновское движение, вероятности ошибок выделения границы.

Введение

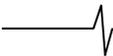
Область применения обработки сигналов и изображений постоянно расширяется, а разнообразие решаемых задач часто выходит за рамки классических методов. Сигналы и изображения наблюдаются в условиях действия помех различной природы, априорной неопределенности, что дополнительно затрудняет применение традиционных моделей и методов.

Исследования последних десятилетий позволили установить свойства самоподобия и дробной меры у сигналов и изображений, получаемых при приеме отраженных от различных объектов сигналов [1, 2]. Исследуемые процессы рассматриваются не как простая совокупность отдельных элементов с определенными характеристиками, а как некоторая структура, обладающая внутренними топологическими связями между элементами и характеризующая сложный объект в целом. Отличительным свойством таких процессов, представленных в некотором топологическом пространстве, является нецелый характер их размерности. Несмотря на существование различных определений и величины размерности для заданного сигнала или изображения [3], каждая из них характеризует общее свойство самоподобия. Это позволяет использовать величину размерности как показатель при решении задач обнаружения, классификации, оценивания параметров

Описание и анализ параметров фрактальных процессов рассмотрены с точки зрения теории оптимальных статистических решений. Получены алгоритмы обнаружения, выделения границы объектов на изображении. Фрактальное изображение задается в виде двумерного фрактального броуновского движения – фрактальной броуновской поверхности, а также совокупностью расстояний между векторами в псевдофазовом пространстве. Проведено уточнение описания расстояний между векторами в псевдофазовом пространстве с учетом их топологической зависимости, дано их вероятностное описание. Получены выражения для логарифма отношения правдоподобия, рассчитаны вероятности ошибок при обнаружении и выделении границ в гауссовском и негауссовском приближении. Показано, что достаточной статистикой для задачи обнаружения является максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности. Предложено определять качество выделения границы системой вероятностей ошибок – вероятностью ложных полей границы и вероятностью пропуска границы.

[1, 2]. Вместе с тем теория оптимальной обработки сигналов и изображений на основе фрактальных представлений разработана недостаточно.

Широко известны и применяются методы и алгоритмы оптимальной обработки сигналов и изображений на основе вероятностных моделей и теории оптимальных статистических решений. Наиболее общая постановка задачи и модели сигналов и помех реализованы в оценочно-корреляционно-компенсационном подходе [4-6]. Статистический подход используется также и при обработке сигналов и изображений с фрактальными свойствами, например, фрактального броуновского движения [7]. Другим примером эффективного применения статистических методов является интерпретация корреляци-



онного интеграла как вероятности неперевышения расстояния между векторами заданного значения [8-10].

Обработка фрактальных сигналов является предметом исследований различных ученых [1-3, 8-15]. В работе [1] исследуются различные подходы к использованию фрактальных свойств сигналов, в частности, фрактальной сигнатуры для повышения качества обнаружения малозаметных объектов. Авторы работы [15] подробно исследуют точность оценивания различных фрактальных характеристик, а также ее влияние на качество обнаружения. В работах [11,12] предложено для повышения качества обнаружения комплексировать фрактальный и энергетический обнаружители, что позволяет расширить класс сигнально-помеховых ситуаций для задачи обнаружения.

Целью исследования является разработка и совершенствование статистического подхода в задачах синтеза и анализа эффективности оптимальных алгоритмов обнаружения фрактальных сигналов методом максимального правдоподобия, а также алгоритмов выделения границ на изображении с помощью текстурного анализа путем использования фрактальных свойств анализируемого фрагмента изображения.

Максимально правдоподобное оценивание корреляционной размерности

Известны несколько определений для понятия размерности объектов [3, 16]: емкость, информационная и корреляционная размерности, размерность покрытия, размерность Хаусдорфа, показатель Херста. Данные определения размерности используются для описания одного и того же свойства сигнала или изображения, однако приводят к различным по величине значениям. Используемая далее корреляционная размерность имеет вычислительные преимущества при обработке упорядоченных во времени или пространстве отсчетов. В работах [2, 16] для математического описания используется понятие корреляционного интеграла, который определяет вероятность того, что два независимых наблюдаемых вектора находятся на расстоянии меньше r : $C_w(r) = P(\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_E \leq r)$, где \mathbf{x}, \mathbf{y} – независимые одинаково распределенные E -мерные векторы, w – вероятностная мера. Корреляционная размерность также описывается вероятностным способом на основе энтропии Колмогорова для хаотического аттрактора [26].

При наблюдении выборки E -мерных векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ корреляционная размерность определяется [17] как двойной предел

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_n(r)}{\log r}, \quad (1)$$

где $C_n(r)$ – корреляционный интеграл:

$$C_n(r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n H(r - \| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \|_E), \quad (2)$$

где $\| \bullet \|_E$ – означает норму в E -мерном пространстве

вложения, $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда. Для

измерения расстояния между векторами используются

различные метрики, например евклидова метрика. В работах [18–20] описан способ реконструкции динамической системы путем использования задержанных во времени значений наблюдаемой последовательности отсчетов в качестве значений остальных компонент динамической системы $\mathbf{x}_k = \{x(t_k), x(t_{k+1}), \dots, x(t_{k+E-1})\}$.

Максимально правдоподобная оценка корреляционной размерности предложена в работах [8, 9] и основана на предположении, что корреляционный интеграл вычисляется для независимых случайных расстояний

$$r_k = \| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \|_E, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = i, \dots, n,$$

$$k = 1, \dots, M = n(n-1)/2,$$

подчиняющихся степенному закону распределения вероятностей.

Для заданного значения корреляционной размерности корреляционный интеграл (2) имеет вид $C(r) \approx r^D$, что позволяет представить расстояния между векторами как случайную величину со степенным законом распределения. При условии нормировки расстояний r_k / r_{\max} , закон распределения вероятностей для расстояний имеет вид $F(r) = r^D$, а функция плотности распределения вероятности равна [9]:

$$w(r) = \frac{dF(r)}{dr} = D \times r^{D-1}, \quad 0 < r < 1.$$

Полагая измеренные значения расстояний $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$ между векторами в фазовом пространстве статистически независимыми, запишем многомерную плотность распределения вероятностей

$$w(\mathbf{r}, D) = \prod_{m=1}^M w(r_m) = \prod_{m=1}^M D \times r_m^{D-1}. \quad (3)$$

Так как полученная многомерная плотность (3) является также функцией неизвестной размерности D , то она может рассматриваться как функция правдоподобия. Оценка максимального правдоподобия корреляционной размерности получается в результате решения экстремальной задачи:

$$\hat{D} = \arg \max_D w(\mathbf{r}, D).$$

Переходя к логарифму функции правдоподобия и используя необходимое условие экстремума

$\frac{d}{dD} \ln w(\mathbf{r}, D) = 0$, получим максимально правдоподобную оценку [10]:

$$\hat{D} = - \frac{M}{\sum_{i=1}^M \ln r_i}. \quad (4)$$

Приведенная оценка является эффективной и асимптотически несмещенной. Анализ смещения и дисперсии ошибки оценивания проведен в работе [27].

Фрактальное броуновское движение как модель фрактальных объектов

В качестве модели фрактального сигнала широко используется фрактальное броуновское движение (ФБД), характеризуемое интенсивностью σ^2 и показа-

телем Херста H [7]. Размерность одномерного ФБД определяется показателем Херста $D = 2 - H$, а двумерного ФБД – $D = 3 - H$. Если сигналы вида ФБД наблюдаются в смеси с гауссовским шумом, то это дополнительно затрудняет их обнаружение и идентификацию. Поэтому актуальной задачей является синтез алгоритмов оптимального обнаружения и различения сигналов вида ФБД на фоне гауссовского шума.

Пусть сигнал вида ФБД x_n принимается на фоне гауссовского шума v_n :

$$y_n = x_n + v_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

где N – число отсчетов во времени наблюдаемого процесса, v_n – независимые отсчеты гауссовского шума с дисперсией D_v . Отсчеты ФБД формируются одним из известных методов [7] во временной или спектральной областях. ФБД являются гауссовскими случайными процессами, поэтому их свойства полностью определяются корреляционными матрицами для одномерного сигнала [7]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\{(x(t_2) - x(t_1))(x(t_4) - x(t_3))\} = \\ & = \frac{1}{2}\sigma^2 [-(t_2 - t_4)^{2H} + (t_2 - t_3)^{2H} + (t_1 - t_4)^{2H} - \\ & - (t_1 - t_3)^{2H}], \end{aligned} \quad (5)$$

а также для двумерного изображения [28]:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \mathbf{M}\{x_i x_j\} = \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 [(i - j - 1)^{2H} - 2(i - j)^{2H} + (i - j + 1)^{2H}] \end{aligned}$$

Таким образом, по заданным N отсчетам формируется $M \times M$ матрица \mathbf{R} корреляций всех $M = \frac{1}{2}N(N - 1)$ возможных приращений

$$\Delta x_m = x(t_i) - x(t_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j, i, m = 1, \dots, M.$$

Заданный таким образом вектор приращений $\Delta \mathbf{x} = \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_M\}^T$ имеет многомерную плотность распределения вероятностей

$$w(\Delta \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det \mathbf{R}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{x}\right],$$

где корреляционная матрица \mathbf{R} зависит от показателя Херста H , а плотность распределения вероятностей может быть рассмотрена как функция правдоподобия

$$\begin{aligned} w(\Delta \mathbf{x} / H) &= \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det \mathbf{R}(H)}} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1}(H) \Delta \mathbf{x}\right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отношение правдоподобия при наблюдении приращений сигнала в виде ФБД на фоне гауссовского шума имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(H) &= \sqrt{\frac{\det \mathbf{R}_v}{\det(\mathbf{R}(H) + \mathbf{R}_v)}} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T (\mathbf{R}(H) + \mathbf{R}_v)^{-1} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2D_v} \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x}\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В общем виде произвольно заданных моментов вре-

мени вычисление определителя и обращение корреляционной матрицы приращений \mathbf{R} представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому в некоторых случаях целесообразно принимать в рассмотрение только некоррелированные приращения (5) на непересекающихся интервалах времени, для которых корреляция равна:

$$\mathbf{M}\{\Delta x_i \Delta x_j\} = \delta_{ij} \sigma^2 \Delta t_i^{2H},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $i = 1, \dots, N - 1$. В этом случае

матрица \mathbf{R} является диагональной, определитель

$$\det \mathbf{R} = \sigma^{2N} \prod_{n=1}^{N-1} \Delta t_n^{2H}.$$

Многомерная плотность распределения вероятностей для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} w(\Delta \mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{(N-1)/2} \sqrt{\sigma^{2N} \prod_{n=1}^{N-1} \Delta t_n^{2H}}} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\Delta x_n^2}{\Delta t_n^{2H}}\right], \end{aligned}$$

откуда получаем отношение правдоподобия для случая наблюдения сигнала вида приращений ФБД на фоне приращений гауссовского шума:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{(2D_v)^{(N-1)/2}}{\sqrt{\sigma^{2N} \prod_{n=1}^{N-1} \Delta t_n^{2H}}} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\Delta x_n^2}{\sigma^2 \Delta t_n^{2H}} - \frac{1}{2D_v}\right) \Delta x_n^2\right]. \end{aligned}$$

Данный алгоритм является квазиоптимальным, так как не учитывает корреляцию приращений на перекрывающихся интервалах. Вместе с тем он обладает существенными вычислительными преимуществами, так как не содержит затратных в вычислительном отношении операций обращения матриц.

Получение некоррелированных наблюдений ФБД возможно также в спектральной области. Известно [16], что спектральная плотность мощности ФБД равна

$$G(f) \propto \frac{1}{f^{2H+1}}.$$

Модель ФБД может быть также задана в

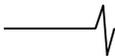
спектральной области в виде совокупности гармоник $\underline{\mathbf{S}} = \{\underline{\mathbf{S}}_1, \dots, \underline{\mathbf{S}}_M\}$, полученных дискретным преобразованием Фурье от значений ФБД $\{x_1, \dots, x_N\}$, где все гармоники являются независимыми комплексными гауссовскими

числами, дисперсии которых равны $|\underline{\mathbf{S}}_m|^2 = \frac{G_0}{m^{2H+1}}$,

$m = 1, \dots, M = N / 2$ – номер гармоники.

Многомерная плотность распределения вероятностей спектральных составляющих ФБД имеет вид

$$w(\underline{\mathbf{S}}) = \frac{\prod_{m=1}^M m^{2H+1}}{\pi^M G_0^M} \exp\left[-\frac{1}{G_0} \sum_{m=1}^M |\underline{\mathbf{S}}_m|^2 m^{2H+1}\right].$$



Для спектрального представления наблюдаемых данных отношение правдоподобия имеет вид

$$\Lambda = \frac{1}{\prod_{m=1}^M \left(\frac{G_0}{G_{v0} m^{2H+1}} + 1 \right)} \times \exp \left[- \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\frac{G_0}{m^{2H+1}} + G_{v0}} - \frac{1}{G_{v0}} \right) |S_m|^2 \right]. \quad (8)$$

Таким образом, в спектральной области алгоритм вычисления отношения правдоподобия получается более простым, так как исключается операция обращения матрицы. Обнаружение ФБД на фоне гауссовского шума в спектральной области производится в результате вычисления статистики (8) и сравнения ее с порогом.

Анализ характеристик обнаружения фрактального сигнала

Полученные соотношения используются для оценки качества обнаружения, а также для расчета характеристик обнаружения в гауссовском приближении при $N \gg 1$. Вероятность пропуска сигнала и вероятность ложной тревоги соответственно равны:

$$P = \int_{-\infty}^h w_1(z) dz, \quad F = \int_h^{\infty} w_0(z) dz, \quad (9)$$

где h – значение порога принятия решения, $z = \ln \Lambda$ – статистика обнаружения. Используя выражение для

интеграла вероятности $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, запишем

вероятности (9) ошибочных решений

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf \left(\frac{h - m_{z/1}}{\sqrt{2D_{z/1}}} \right), \quad F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf \left(\frac{h - m_{z/0}}{\sqrt{2D_{z/0}}} \right).$$

Более точные результаты при $N > 1$ можно получить путем вычисления плотности распределения вероятностей суммы нескольких независимых χ^2 случайных величин с различными дисперсиями методом характеристических функций. Так как плотность распределения вероятностей суммы случайных величин представляет собой свертку, то получим

$$w_\theta(z) = F^{-1} \left\{ \prod_{m=1}^M F \{ w_{m\theta}(S) \} \right\},$$

где $F\{\dots\}$, $F^{-1}\{\dots\}$ – обозначает прямое и обратное преобразования Фурье соответственно, $w_{m\theta}(S) =$

$$= \frac{1}{D_{m\theta}} \exp \left(- \frac{S}{D_{m\theta}} \right) \quad - \quad \text{экспоненциальное}$$

распределение при наличии $\theta = 1$ и отсутствии $\theta = 0$ ФБД в наблюдаемых данных,

$$D_{m\theta} = \left(\frac{1}{G_{v0}} - \frac{1}{\frac{G_0}{m^{2H+1}} + G_{v0}} \right) \times \left(\frac{\theta G_0}{m^{2H+1}} + G_{v0} \right).$$

Анализ обнаружителя ФБД, проведенный методом статистического моделирования, показал хорошее согласование с теоретическими результатами при различных отношениях сигнал-шум, показателя Херста, числе гармоник спектра ФБД.

Полученные результаты обобщаются на случай, когда сигнал представлен как сумма нескольких ФБД с различными параметрами, а также когда шумы наблюдения также являются ФБД, например, если на входе действует сумма K независимых ФБД с различными показателями Херста H_k , $k = 1, \dots, K$. Получаемые при этом аналитические выражения для логарифма отношения правдоподобия являются достаточной статистикой при решении как задачи обнаружения, так и многих задач оценивания параметров сигналов, моделируемых ФБД.

Расчеты характеристик проводятся при заданном отношении сигнал-шум, определяемом следующим

образом: $q = \frac{D_X}{D_V}$, где $D_X = \sum_{m=1}^M \overline{|S_m|^2} = G_X \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^{2H+1}}$ –

дисперсия фрактального броуновского движения,

$D_V = \sum_{m=1}^M \overline{|V_m|^2} = M G_V$ – дисперсия гауссовского шума.

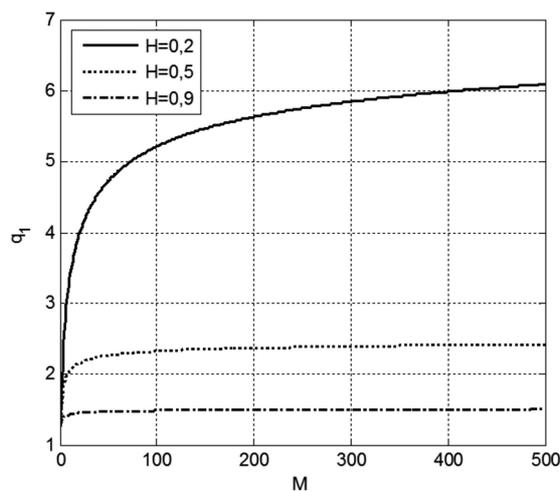


Рис. 1. Зависимость отношения сигнал-шум от количества гармоник, $q = 10$

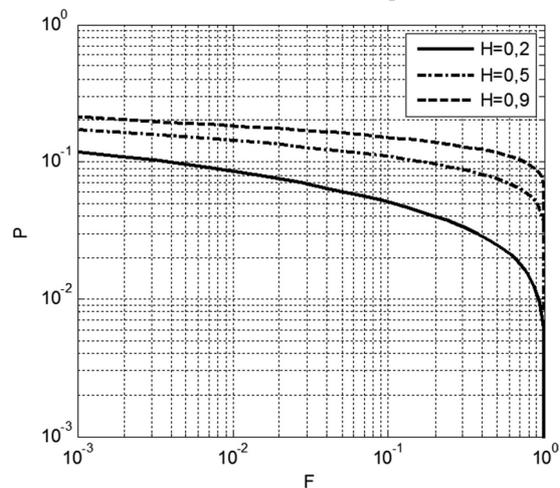


Рис. 2. Характеристики обнаружения в гауссовском приближении, $q = 1$, $M = 100$

Результаты расчетов (рис. 1) показывают, что отношение сигнал-шум увеличивается при уменьшении показателя Херста. Характеристики обнаружения, полученные при различных значениях отношения сигнал-шум q и показателя Херста, представлены на рис. 3, 4.

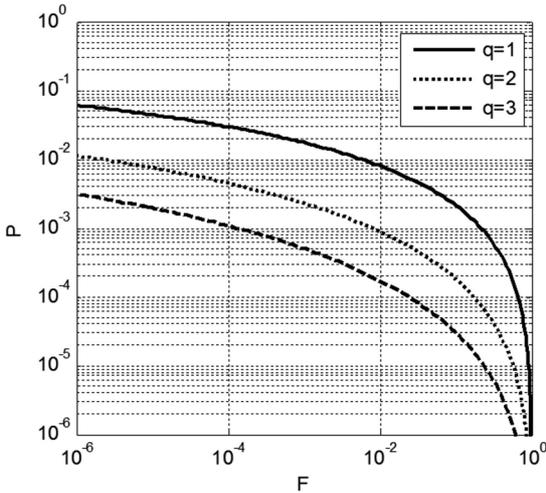


Рис. 3. Характеристики обнаружения, $M = 100, H = 0,9$

Алгоритм выделения границы по фрактальным признакам фона и объекта

Метод проверки статистических гипотез на основе достаточной статистики в виде отношения правдоподобия используется также для решения задачи выделения границы между фоном и объектом:

$$\Lambda = \frac{w_1(\mathbf{r})}{w_2(\mathbf{r})} = \frac{\prod_{m=1}^M D_1 r_m^{D_1-1}}{\prod_{m=1}^M D_2 r_m^{D_2-1}}, \quad (10)$$

где D_1, D_2 – корреляционные размерности объекта и фона соответственно.

Для выделения границы объекта изображение разбивается на кадры квадратной формы, состоящие из полей анализа. При формировании границы кадра из 2-х полей граница может располагаться в одном из четырех априорно заданных направлений – горизонтальном, вертикальном и по двум направлениям диагонали. Оценка границы представляется как одно из полей. Для определенности граница отображается верхним, правым и нижним диагональным полями.

При формировании границы квадратного кадра из 9 полей граница также может располагаться в одном из четырех априорно заданных направлений: горизонтально или вертикально посередине кадра, а также по двум направлениям диагонали. Оценка границы представляется как набор из 3 полей, расположенных вертикально или горизонтально в середине кадра, а также по диагонали кадра.

Граница разделяет кадр на две части, в каждой из которых формируется N векторов [14]. Достаточная статистика для задачи выделения границы равна отношению правдоподобия для границы различного вида в предположении, что в частях кадра по обе

стороны границы располагаются объекты с различным значением корреляционной размерности. При условии равновероятных расположений объекта и фона относительно границы отношение правдоподобия (10) принимает вид

$$\Lambda_k = \frac{\frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_1} D_1 r_{1km}^{D_1-1} \times \prod_{m=1}^{M_1} D_2 r_{2km}^{D_2-1} + \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_2} D_1 r_m^{D_1-1} + \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_2} D_2 r_m^{D_2-1}}{\frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_1} D_2 r_{1km}^{D_2-1} \times \prod_{m=1}^{M_1} D_1 r_{2km}^{D_1-1} + \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_2} D_1 r_m^{D_1-1} + \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{M_2} D_2 r_m^{D_2-1}}, \quad (11)$$

где $k = 1, \dots, 4$ – номер разновидности границы, r_{1km}, r_{2km} – расстояния в полях анализа 1 и 2 при k -й разновидности границы, r_m – расстояния между векторами в кадре.

Определение наличия границы производится путем сравнения с порогом максимального из отношений правдоподобия (11), вычисленного для каждой из проверяемых гипотез, состоящей в наличии объектов с различными значениями корреляционной размерности в соседних полях одного и того же кадра при наличии границы определенного вида. Принимается решение о наличии границы, соответствующей кадру с номером $\hat{k} = \arg \max_k \Lambda_k$, если значение отношения правдоподобия $\Lambda_{\hat{k}}$ превышает некоторое пороговое значение.

Анализ эффективности алгоритма выделения границы

Анализ эффективности предложенных алгоритмов выделения границ изображения проведен на примере объекта с границей в виде восьмиугольника, что позволяет более полно отразить влияние нелинейности границы объекта.

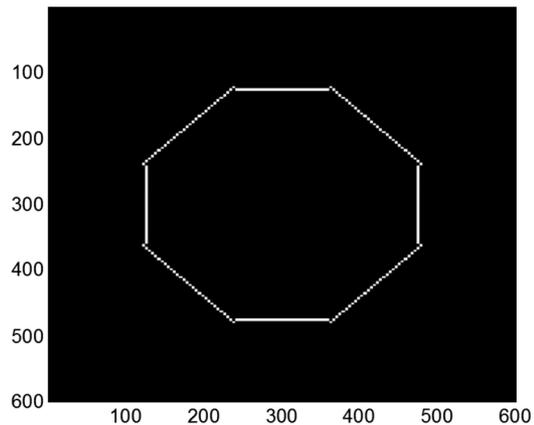
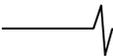


Рис. 4. Идеальная граница объекта для исследуемого метода выделения границы

Выделение границы проводилось методом статистического моделирования отношения правдоподобия (11). На рис. 4 представлена оценка границы, полученная при идеальных условиях измерений границы объекта: ошиб-



ки, вызванные конечным объемом выборки при статистическом оценивании исключены. Некоторая неровность границы на рис. 4 объясняется особенностями формирования кадра, принятыми видами границы и конечным размером исследуемого кадра. На рис. 5 приведены результаты выделения границы объекта с использованием алгоритма максимального правдоподобия (19). На изображении заметны ошибки выделения границы в виде ложных отметок и пропуска границы.

Визуальные методы оценки качества обработки изображения не позволяют объективно произвести сравнение анализируемых алгоритмов и определить их эффективность. Предложено оценивать эффективность алгоритмов выделения границ по вероятностным характеристикам, в качестве которых приняты вероятность ложных полей границы на всем изображении $P_{ЛГ} \approx \frac{N_{ЛГ}}{N_{ГР}}$ и вероятность пропуска границы $P_{ПГ} \approx \frac{N_{ПГ}}{N_{ГР}}$, где $N_{ЛГ}$ – число полей на изображении, не совпадающих с отметками эталонной границы, $N_{ПГ}$ – число полей эталонного изображения, не относящихся к эталонной границе, $N_{ПГ}$ – число пропущенных полей на эталонной границе, $N_{ГР}$ – общее число полей на эталонной границе.

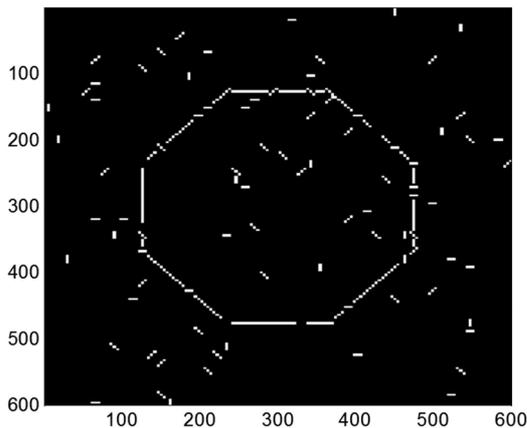


Рис. 5. Результат обработки алгоритмом максимального правдоподобия, $D_1=1,3$, $D_2=1,3$, граница из трех полей

Выбирая априорную величину вероятности появления ложных полей, можно устанавливать величину порога, с которым производится сравнение статистики (11).

При этом обработка осуществляется с помощью алгоритма максимального правдоподобия (11), полученного в предположении независимых расстояний. Для уменьшения геометрической зависимости расстояний предлагается аналогично работам [10, 13] применить усечение, при котором учитываются расстояния, не превышающие некоторого заданного значения. При этом оценка корреляционной размерности получается асимптотически эффективной, что позволяет использовать алгоритм максимального правдоподобия, синтезированный для независимой выборки. Однако число усеченных расстояний невелико и приближенно соответствует числу введенных в данной статье независимых расстояний.

Сравнение результатов анализа, проведенного для независимых расстояний, с результатами для зависи-

мых расстояний показывает заметное увеличение вероятностей ошибок при использовании зависимых расстояний. Полученные результаты согласуются с результатами работы [27], в которой также установлено сильное влияние зависимости расстояний на точность оценивания корреляционной размерности.

Зависимость расстояний при оценивании корреляционной размерности

Для оценивания корреляционной размерности методом максимального правдоподобия необходимо определить расстояния между всеми парами N векторов в выборке. Если для проведения расчета корреляционной размерности используются все возможные расстояния, то такой набор называется V -статистикой [21], а число расстояний равно d_E . Для данной статистики характерна повторяемость расстояний, что приводит к неинформативности более половины элементов статистики. Кроме того, часть неповторяющихся расстояний является взаимозависимой, что не согласуется с моделью, принятой при синтезе максимально правдоподобного алгоритма оценивания корреляционной размерности. Вследствие этого V -статистика практически не используется для получения оптимальных оценок.

Для получения более информативной U -статистики [22] выделяют неповторяющиеся расстояния между векторами:

$$\|x_i - x_j\|, i = 2, \dots, N, j = 1, \dots, i-1.$$

Количество расстояний в статистике равно $M_U = N(N-1)/2$. В этом случае также имеется геометрическая взаимозависимость части расстояний, что не позволяет строго применять модель независимых расстояний для синтеза оптимального алгоритма.

Для уменьшения взаимозависимости расстояний используют T -статистику [22] с применением окна Тейлера [23]: статистика содержит расстояния

$$\|x_i - x_j\|, i = T+1, \dots, N, j = 1, \dots, i-T,$$

где T – размер окна Тейлера. При этом разность индексов устанавливается равной T , что влияет на независимость расстояний между векторами. Число расстояний в статистике равно $N - d_E - 1$. В частном случае $T=1$ получаем U -статистику. В некоторых работах [25] предлагается выбирать размер окна Тейлера равным $T = E - 1$.

Более точно независимость расстояний может быть установлена путем рассмотрения геометрических свойств множества векторов. Рассмотрим E -мерное пространство векторов общего положения, в котором задана метрика и определены расстояния между всеми парами векторов. Координаты векторов могут быть не зависимыми, например, статистически независимыми случайными числами.

Для выявления свойства взаимозависимости расстояний между N векторами общего положения в евклидовом пространстве рассмотрим сначала более простой случай векторов на плоскости: $E=2$, анализируя расстояния последовательно для каждого вектора.

Необходимо определить возможность задать положение каждого из векторов в пространстве расстояний с точностью до сдвига и поворота. Расстояние r_{12}, r_{13} между 1-м и 2-м векторами может быть произвольным и задается только положением этих векторов в пространстве. Расстояние r_{13} между 1-м и 3-м векторами также может быть произвольным, а расстояние r_{23} между 2-м и 3-м векторами зависит от значений выше рассмотренных расстояний в соответствии с правилом треугольника: $0 \leq r_{23} < r_{12} + r_{13}$. Вместе с тем минимальное значение расстояния зависит от заданной метрики. Например, в пространстве с евклидовой метрикой нижняя граница диапазона расстояния r_{23} равна $|r_{12} - r_{13}| \leq r_{23} \leq r_{12} + r_{13}$. Таким образом, появляется расстояние, которое зависит от других расстояний, а положение 3-го вектора определяется расстояниями r_{13}, r_{23} с точностью до отражения. Однозначность положения 3-го вектора гарантируется, если добавляется 4-й вектор и фиксируется еще одно расстояние r_{34} .

Обобщая проведенные рассуждения на произвольное число векторов, можно заключить:

1) полностью независимыми являются только $N-1$ расстояний;

2) расстояние между 2-м и 3-м векторами является условно независимым от r_{12}, r_{13} и ограничивается правилом треугольника $|r_{12} - r_{13}| < r_{23} < r_{12} + r_{13}$;

3) расстояние между 3-м и 4-м векторами принимает одно из двух predetermined значений; величина этих расстояний зависит от выбранной метрики, остальные расстояния до 3-го вектора полностью определяют предыдущими расстояниями;

4) добавление каждого последующего вектора общего положения однозначно фиксирует все предыдущие векторы, что делает все условно независимые расстояния фиксированными, и дает одно независимое расстояние и несколько условно независимых расстояний.

Учитывая сложный характер взаимозависимости расстояний между векторами, затруднительно установить общее выражение для распределения вероятности этих расстояний. Более простой задачей является определение максимального числа M_1 независимых расстояний между N векторами в E -мерном пространстве.

Пространство конфигураций, задаваемых координатами всех векторов, имеет размерность $D_{conf} = NE - E(E+1)/2$, где вычитаемый член соответствует количеству движений E -мерного пространства, преобразующих конфигурации векторов в тождественные, то есть E сдвигов и $E(E-1)/2$ вращений [8, 24]. При этом количество фиксирующих расстояний между векторами не может быть меньше размерности пространства конфигураций, т.е. если количество расстояний меньше D_{conf} , то они конфигурацию однозначно задать не могут. И наоборот, если количество расстояний больше D_{conf} , то они образуют избыточную систему координат и являются

зависимыми.

Вместе с тем система, содержащая E выбранных точек и расстояния от каждой точки до них всех, имеет как раз такой размер вращений [24]. Однако пространство конфигураций отображается в соответствующее евклидово пространство неоднозначно: каждому набору расстояний соответствует дискретный набор конфигураций, расположенных по разные стороны от E выбранных точек. Для устранения неоднозначности необходимо добавить расстояния до ещё одной точки от всех, т.е. $N-E-1$ расстояний. Таким образом, получается верхняя и нижняя граница для необходимого количества расстояний:

$$- \text{нижняя граница } M_{UL} = D_{conf},$$

$$- \text{верхняя граница } M_{UH} = D_{conf} + N - E - 1.$$

Например, для двумерного изображения $E=2$, а число расстояний равно $M_{UL} = 2N - 3$, $M_{UH} = 3N - 6$. Можно предположить, что в приложениях более существенной является размерность системы, т.е. нижняя граница необходимого числа расстояний.

При условии, что все M расстояний $\mathbf{r} = \{r_m, m = 1, \dots, M\}$ между векторами независимы, а корреляционная размерность равна D совместная плотность распределения вероятностей расстояний имеет вид (2).

Зависимые расстояния формируются в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Генерируются $N-1$ независимых случайных чисел со степенным распределением вероятностей в диапазоне значений $(0;1)$; данные числа задают расстояния от первого вектора до всех $N-1$ остальных векторов. Совместная плотность распределения вероятностей этих $N-1$ независимых расстояний между векторами имеет вид

$$w_1(\mathbf{r}_1 / D) = \begin{cases} \prod_{m=1}^{N-1} D r_m^{D-1}, & \mathbf{r}_1 \in [0,1) \\ 0, & \mathbf{r}_1 \notin [0,1) \end{cases}.$$

2. Генерируется $N-2$ независимых случайных чисел со степенным распределением вероятностей в диапазоне значений $(r_{\min k}; r_{\max k})$, $k = 3, \dots, N$; данные числа задают условно независимые расстояния от второго вектора до всех $N-2$ остальных векторов кроме 1-го вектора. Минимальное и максимальное значения определяются правилом треугольника: $r_{\min k} = |r_{12} - r_{1k}|$, $r_{\max k} = r_{12} + r_{1k}$, $k = 3, \dots, N$. Совместная плотность распределения вероятностей этих $N-2$ независимых расстояний между векторами имеет вид

$$w_2(\mathbf{r}_2 / \mathbf{r}_1, D) = \begin{cases} \prod_{m=N}^{2N-3} \frac{D}{r_{\max k} - r_{\min k}} (r_m - r_{\min k})^{D-1}, \\ r_m \in [r_{\min k}, r_{\max k}), k = 3, \dots, N \\ 0, r_m \notin [r_{\min k}, r_{\max k}), k = 3, \dots, N, \\ m = N + k - 3. \end{cases}$$

Так как минимальные и максимальные значения $r_{\min k}, r_{\max k}$ зависят от расстояний с номерами

$1, \dots, N-1$, то расстояния r_1, r_2 также статистически зависимы, а их совместная плотность распределения вероятностей равна

$$w_{12}(r_1, r_2 / D) = w_1(r_1 / D)w_2(r_2 / r_1, D).$$

На основе данной плотности распределения вероятностей рассчитывается отношение правдоподобия – универсальной решающей статистики.

3. Формируются координаты 1-го и 2-го векторов в пространстве вложения $D_E = 2$: $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = r_{12}, y_2 = 0$. Координаты остальных $i = 3, \dots, N$ векторов определяются из геометрии их положения с использованием теоремы косинусов и расстояний от i -го вектора до 1-го и 2-го векторов:

$$x_i = \frac{r_{12}^2 + r_{1i}^2 - r_{2i}^2}{2r_{12}}, \quad y_i = \pm \sqrt{r_{1i}^2 - x_i^2}.$$

Для определенности знак координат y_i выбирается положительным.

4. По найденным координатам всех векторов вычисляются оставшиеся $\frac{N^2}{2} - \frac{5N}{2} - 3$ зависимых

$$\text{расстояний } r_3 = \left\{ r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \right. \\ \left. i = 3, \dots, N, j = i+1, \dots, N \right\}.$$

Так как расстояния r_3 определены полностью расстояниями r_1, r_2 , то они не содержат дополнительной информации для оценивания корреляционной размерности.

Заключение

Показано, что методы теории оптимальных статистических решений могут с успехом применяться также и для обработки фрактальных сигналов и изображений. Основой эффективности статистических методов является нерегулярный характер, а также сравнительно большой объем наблюдаемых данных. В этих условиях статистическое описание фрактальных сигналов и изображений производится различными методами: использование модели одномерного и двумерного фрактального броуновского движения, статистическое описание расстояний между векторами в псевдофазовом пространстве. Такой подход позволяет на основе теории оптимальных статистических решений получать алгоритмы обработки для решения различных задач: обнаружения, различения, выделения границ, оценивания параметров, а также проводить анализ эффективности обработки. Вместе с тем, статистическое описание получено не для всех фрактальных сигналов и изображений и их характеристик, что делает актуальным продолжение исследований в этом направлении.

Литература

1. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 847 с.
2. Culter C.D. A review of the theory and estimation of fractal dimension // *Nonlinear time series and chaos v.1. Dimension estimation and models*, 1993. P. 1-107.
3. Паркер Т.С., Чжуа Л.О. Введение в теорию

хаотических систем для инженеров // ТИИЭР, 1987, Т. 75, № 8. С. 6-40.

4. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Советское радио, 1978. 320 с.

5. Сосулин Ю.Г., Паршин Ю.Н. Оценочно-корреляционно-компенсационная обработка многомерных сигналов // *Радиотехника и электроника*. 1981. Т. 26, № 8. – С. 1635-1643.

6. Сосулин Ю. Г., Костров В. В., Паршин Ю. Н. Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014. 632 с.

7. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

8. Pisarenko D. V., Pisarenko V.F. Statistical estimation of the correlation dimension // *Physics Letters, A* (197), 1995. P. 31-39.

9. Luca L., Lasocki S., Luzio D., Vitale M. Fractal dimension confidence interval estimation of epicentral distribution // *Annali di Geofisica*, 42(5), 1999. P. 911-925

10. Luciana De Luca, Dario Luzio, Massimo Vitale. A ML Estimator of the Correlation Dimension for Left-Hand Truncated Data Samples // *Pure and applied geophysics*, V.159, № 11-12, 2002. P. 2789-2803.

11. Паршин А.Ю., Паршин Ю.Н. Комплексирование энергетического и фрактального обнаружителей // Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций. 17-я Международная науч. техн. конф. Часть 2. Рязань: РГПУ, 2012. С. 37-39.

12. Parshin A., Parshin Yu. Usage of non-Gaussian statistics for RF signals detection by complex energy and fractal detector // *International radar symposium – IRS 2013, Proceeding, volume I, II, Drezden, Germany*. – German /institute of navigation, 2013, pp. 779-784.

13. Паршин А.Ю., Паршин Ю.Н. Использование максимально правдоподобных оценок фрактальной размерности в негауссовских статистиках для обнаружения радиосигналов // Цифровая обработка сигналов. 2013. №1. С. 42-46.

14. Parshin A.Yu., Parshin Yu.N. Synthesis and analysis of efficiency of algorithm for objects edges detection by maximum likelihood method // *2nd Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO)*. Budva. Montenegro. June 15th-21st 2013. 282 p.

15. Сосулин Ю.Г., Русскин А.Б. Фрактальное обнаружение протяженных мало контрастных объектов на изображениях // *Радиотехника*. 2009. № 12. С. 48-57.

16. Pesin Ya. B. On rigorous mathematical definitions of correlation dimension and generalized spectrum for dimensions // *Journal of Statistical Physics*, V.71, 1993. P. 529-547.

17. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // *Physical Review Letters*, V. 50, 1983. P. 346-349.

18. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D, Shaw R.S. Geometry from a time series // *Physical Review Letters*, V. 45, 1980. P. 712-716.

19. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in mathematics*, V. 898, 1981. P. 366-381.

20. Ying-Cheng Lai, David Lerner. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series // *Physica D*, V.115, 1998. P. 1-18.

21. Антипов О.И., Неганов В.А., Потапов А.А. Детер-



минированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах. М.: Радиотехника, 2009. 235 с.

22. Cees Diks. Nonlinear Time Series Analysis: Methods And Applications (Nonlinear Time Series and Chaos: v. 4) World Scientific. 1999. 209 p.

23. Theiler J. Spurious dimensions from correlation algorithms applied to limited time-series data // Phys. Rev. A 34. 1986. pp. 2427-2432.

24. Fried E., Absztrakt Algebra, Elemi Uton. Budapest, MuszakiKonyvkiado, 1972. 260 p.

Provenzale A., Smith J.A., Vio R., Murate G. Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in

measured time series. Physica D 58. 31-49. 1992.

25. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир. 1988. 240 с.

26. Паршин Ю.Н., Паршин А.Ю. Максимально правдоподобное оценивание корреляционной размерности с учетом влияния смещения оценки и усечения диапазона масштабов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. №4-1 (46.). С. 18-25.

27. Hong Qian, Gary M Raymond, James B Bassingthwaite. On two-dimensional fractional Brownian motion and fractional Brownian random field // J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) L527-L535.