

УДК 621.396.96

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОДА НЕСОГЛАСОВАННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ ФАЗОКОДОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Зайцев Г.В., д.т.н., начальник СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru;
Кондранина Н.С., ведущий инженер СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: kondranina.nataliya@gmail.com;
Литвинов Д.М., начальник отдела СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: litvov_dmitry@inbox.ru.

CHARACTERIZATION OF MISMATCHED FILTERING, MINIMIZING INTEGRATED SIDELobe LEVEL FOR PHASE-CODED PULSE

Zaytsev G. V., Kondranina N. S., Litvinov D. M.

The paper investigates method of mismatched filtering, minimizing integrated sidelobe level for binary phase-coded pulse. Main characteristics of the output signal are analyzed (integrated sidelobe level, peak sidelobe level, loss in signal-to-noise ratio) for several classes of modulation sequence families: M-sequences, Legendre sequences, and sequences up to length 271 with best known integrated sidelobe level of autocorrelation function. Resulting parameters of mismatched filtering are described and tabulated for best found sequences with linear growth of quality criterion.

Key words: phase-coded pulse, mismatched filtering, minimization of integrated sidelobe level.

Ключевые слова: фазокодоманипулированные сигналы, несогласованная фильтрация, минимум интегрального уровня боковых лепестков.

Введение

В работе анализируются двоичные последовательности с низким уровнем боковых лепестков непериодической корреляционной функции. Такие последовательности используются в радиолокации, физике, системах передачи информации, биомедицинских исследованиях и других областях науки и техники. Для определенности ниже рассматриваются радиолокационные приложения, причем доплеровская частота в данной работе считается нулевой.

При использовании в радиолокации фазокодоманипулированный импульсный сигнал формируется следующим образом. Прямоугольный импульс гармонического колебания разбивается на n одинаковых по длительности сегментов, а начальная фаза колебания в каждом сегменте изменяется в соответствии с некоторым кодом. В данной работе рассматривается наиболее распространенный случай, при котором код является двоичным. Тогда операцию формирования фазокодоманипулированного импульса можно описать следующим образом. Сегмент гармонического колебания, имеющий номер i , умножается на i -ый коэффициент кода s_i code, $i = 0, 1, \dots, n-1$, который может принимать значения ± 1 . Сигнальные характеристики радиолокатора при использовании описанного импульса полностью определяются свойствами последовательности $s_0 = (s_0 \text{ code}, s_1 \text{ code}, \dots, s_{n-1} \text{ code})$, поэтому дальнейший анализ достаточно провести для дискретных последовательностей вместо непрерывного сигнала [1, 2]. Далее кодовую последовательность s_0 будем называть исходной.

Рассматривается метод несогласованной фильтрации фазокодоманипулированных сигналов, обеспечивающий минимизацию интегрального уровня боковых лепестков. Анализируются получаемые характеристики (уровень максимального бокового лепестка, интегральный уровень боковых лепестков, потери в отношении сигнал/шум и др.) для трех семейств двоичных модулирующих последовательностей: M-последовательности, последовательности Лежандра и наилучшие известные последовательности до длины 271. Приводится таблица найденных последовательностей с линейным и максимально быстрым ростом показателей качества от длины импульсной характеристики фильтра.

В приемной аппаратуре радиолокатора вычисляется взаимная корреляционная функция (ВКФ) принимаемого из эфира сигнала, содержащего полезную составляющую s_0 , и опорной последовательности $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, длина N которой, вообще говоря, может быть больше n : $N \geq n$, а составляющие элементы – действительные числа. При этом изучение боковых лепестков, обусловленных полезным сигналом, сводится к анализу ВКФ последовательностей x и s_0 [1, 2].

Для краткой записи этих вычислений дополним последовательность s_0 нулями до длины N . Пусть начальный отрезок такой последовательности содержит m нулей. Тогда в конце последовательности имеется $N - n - m$ нулей. Обозначим такую последовательность той же буквой, что и исходную, но без нулевого индекса:

$$s(m) = (0, 0, \dots, 0, s_0 \text{ code}, s_1 \text{ code}, \dots, s_{n-1} \text{ code}, 0, 0, \dots, 0) = \{s_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

Аргумент m этой последовательности для краткости будем опускать, если приводимые выражения справедливы при любом m или если значение индекса очевидно.

Взаимная корреляционная функция $c = \{c_k\}$ последовательностей x и $s(m)$ может быть вычислена по формуле

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i s_{k+i}^*$$

где считается, что $s_r = 0$ при $r < 0$ и $r \geq N$, а символ * означает операцию сопряжения, т.е. транспонирования и комплексного сопряжения элементов вектора или матрицы.

В данной работе будем рассматривать ВКФ как конечную последовательность, содержащую только члены, не равные тождественно нулю. При введенных обозначениях индекс k таких элементов принадлежит множеству $\Omega = \{-(N-m-1), -(N-m-1)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n+m-1\}$. Количество $N+n-1$ элементов этого множества будем называть длиной ВКФ. Элементы ВКФ могут быть представлены в виде

$$c_k = \mathbf{x} \mathbf{D}_k \mathbf{s}^*, k \in \Omega, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}_k - N \times N$ – матрица сдвига последующего за ней вектор-столбца на k элементов вверх при неотрицательном k :

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{k+1} 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \end{pmatrix}, k \geq 0,$$

и сдвига на k элементов вниз при отрицательном k :

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{-k}^T, k < 0.$$

Заметим, что поскольку последовательность \mathbf{s} является действительной, то опорную последовательность \mathbf{x} не имеет смысла делать комплексной. Поэтому все рассматриваемые в работе последовательности являются действительными. Тем не менее, приводимые ниже формулы будут записываться в общем виде.

Выбор последовательности \mathbf{x} при заданной последовательности \mathbf{s} зависит от решаемой задачи. В радиолокации общепринято максимизировать отношение сигнал/шум на выходе приемного устройства. При этом в случае аддитивного гауссовского шума оптимальная опорная последовательность определяется соотношением $\mathbf{x} = \mathbf{s}_0$, $N = n$, обработка сигнала называется согласованной фильтрацией, а взаимная корреляционная функция становится автокорреляционной (АКФ) [1, 2]. На рис. 1 показан типичный вид полученной АКФ на выходе согласованного фильтра. Для краткой записи модулирующей последовательности из элементов ± 1 , использованной при построении рисунка, будем использовать следующее соглашение: сначала последовательность преобразуется в двоичный вид путем замены -1 на 0, а затем представляется в шестнадцатеричном коде. Подобное соглашение используется также везде ниже. Для рис. 1 выбрана последовательность $\mathbf{s}_0 = \text{CE0549}$ длины 24. Значения АКФ c_k соединены на рис. 1 прямыми линиями для получения АКФ соответствующего аналогового сигнала [1, 2].

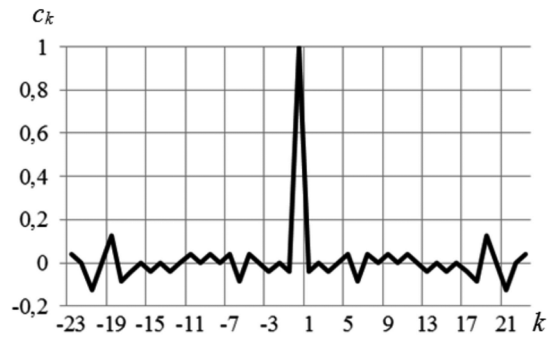


Рис. 1. Вид автокорреляционной функции

Как видно из рисунка, АКФ имеет максимальный лепесток, называемый главным, и ряд боковых лепестков меньшего уровня. Величина главного лепестка нормирована к единице.

Боковые лепестки АКФ являются паразитными, однако их величина не может быть сделана произвольно малой. Типовое значение имеет порядок 0,1 от величины главного максимума, что не удовлетворяет требованиям многих прикладных задач. Отступая от согласованности и увеличивая длину опорной последовательности \mathbf{x} , можно добиться снижения уровня боковых лепестков за счет уменьшения амплитуды главного лепестка и некоторого снижения выходного отношения сигнал/шум.

В случае аддитивного гауссовского шума со среднеквадратичным значением σ это отношение может быть вычислено по формуле

$$SNR(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{|c_M|^2}{\sigma^2 \sum_{k \in \Omega} |x_k|^2}, \quad (3)$$

где M – индекс главного лепестка. Коэффициент уменьшения этого отношения по сравнению со случаем согласованной фильтрации называется энергетическими потерями, оценивается в децибелах и вычисляется по формуле

$$L = 10 \log[SNR(\mathbf{s}, \mathbf{s}) / SNR(\mathbf{s}, \mathbf{x})]. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что энергетические потери (4) не зависят от величины σ .

Для радиолокационных применений энергетические потери являются одним из главных параметров, и при выборе последовательности \mathbf{x} необходимо следить, чтобы потери не превысили допустимую величину.

Существует несколько общепринятых критериев качества получаемой ВКФ. Одним из критериев является отношение модуля главного лепестка к модулю максимального бокового:

$$P = \min_{k \in \Omega, k \neq M} |c_M / c_k|. \quad (5)$$

В данной работе этот параметр для краткости будем называть уровнем подавления, или просто подавлением.

Другой критерий характеризует интегральный уровень боковых лепестков относительно главного:

$$Q = \frac{|c_M|^2}{\sum_{k \in \Omega, k \neq M} |c_k|^2}. \quad (6)$$

Этот параметр будем называть коэффициентом качества ВКФ по аналогии с общепринятым параметром АКФ, который в англоязычной литературе называется meritfactor.

Так как параметры (5) и (6) изменяются в широких пределах, то ниже они, как правило, вычисляются в децибелах: $20 \log P$ дБ, $10 \log Q$ дБ. В литературе часто используются параметры, обратные к (5) и (6), однако представленные формулы удобнее, позволяют оперировать с числами больше единицы, а при вычислении в децибелах дают положительные значения.

Задача совместного нахождения последовательностей s_0 и x , максимизирующих функции (5) и/или (6), исследуется на протяжении полувека, однако до сих пор не найдено регулярного способа ее решения. Основным методом, позволяющим решать подобные задачи, остается метод компьютерного перебора с использованием различных способов снижения вычислительной сложности [3, 4]. При этом объем вычислений, тем не менее, растет экспоненциально с увеличением длины последовательности, поэтому оптимальные решения найдены лишь для сравнительно небольших длин.

Задача существенно упрощается, если при нахождении последовательности x зафиксировать исходную последовательность s_0 . В литературе описано несколько методов решения подобных задач [5].

В данной работе анализируется один из таких методов, позволяющий вычислить оптимальную последовательность x , максимизирующую коэффициент качества (6) при заданной последовательности s_0 [5]. Несмотря на то, что сам метод известен, свойства получаемого решения исследованы слабо, что связано с отсутствием строгих закономерностей в получаемых результатах. В литературе представлены лишь примеры для нескольких исходных последовательностей s_0 [5, 6].

Целью данной работы является анализ характеристик результирующих ВКФ, полученных с помощью указанного метода, и выработка рекомендации по выбору исходной последовательности s_0 для получения максимального коэффициента качества.

Метод синтеза опорной последовательности

Рассмотрим метод, позволяющий при заданной последовательности s синтезировать последовательность x , которая максимизирует коэффициент качества (6) [5].

Подставляя (2) в (6), получаем формулу для коэффициента качества ВКФ:

$$Q = \frac{|c_M|^2}{\sum_{k \in \Omega, k \neq M} |x \mathbf{D}_k s^*|^2} \quad (7)$$

Будем искать решение задачи при условии, что индекс максимального лепестка равен нулю: $M = 0$. Это условие не уменьшает общности, так как его всегда можно выполнить путем перераспределения нулей в последовательности s (1). Тогда из (2) следует, что выражение в числителе (7) равно $c_M = x s^*$. При этом формула (7) может быть выражена в виде

$$Q = \frac{|x s^*|^2}{x \mathbf{R} x^*}, \quad (8)$$

где матрица \mathbf{R} определяется выражением

$$\mathbf{R} = \sum_{k \in \Omega, k \neq M} \mathbf{D}_k s^* s \mathbf{D}_k^* \quad (9)$$

Эта матрица является положительно определенной, т.е. $x \mathbf{R} x^* > 0$ для всех комплексных векторов x .

Действительно, выражение $x \mathbf{R} x^*$ равно сумме квадратов амплитуд боковых лепестков и, следовательно, не меньше нуля. Равным нулю оно также быть не может, так как это означало бы, что все лепестки нулевые, что невозможно. Из положительной определенности матрицы (9) следует, что существует единственный положительно определенный квадратный корень $\mathbf{R}^{1/2}$ из матрицы \mathbf{R} [7]. Кроме того, известно, что матрицы \mathbf{R}^{-1} и $\mathbf{R}^{-1/2}$ также являются положительно определенными, и что любая положительно определенная матрица \mathbf{U} является эрмитовой, т.е. $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$ [7].

Представим числитель (8) в виде

$$|x s^*|^2 = |(x \mathbf{R}^{1/2})(\mathbf{R}^{-1/2} s^*)|^2 \quad (10)$$

Применяя к правой части (10) неравенство Коши-Буняковского и используя приведенные выше свойства положительно определенных матриц, получаем

$$|x s^*|^2 \leq (x \mathbf{R} x^*)(s \mathbf{R}^{-1} s^*) \quad (11)$$

Подставляя это выражение в (8), имеем

$$Q \leq s \mathbf{R}^{-1} s^* \quad (12)$$

Максимальное значение (12) коэффициента качества достигается в случае, когда неравенство Коши-Буняковского (11) превращается в равенство. Известно, что это достигается при условии коллинеарности входящих в (10) векторов:

$$x \mathbf{R}^{1/2} = a s \mathbf{R}^{-1/2}, \quad (13)$$

где a – некоторый коэффициент. Так как масштабный коэффициент a в данной работе не существен, то, полагая его равным единице, из последнего соотношения получаем формулу для вычисления оптимальной последовательности x :

$$x = s \mathbf{R}^{-1} \quad (14)$$

В дальнейших разделах рассматриваются свойства оптимального решения (14).

Выбор значения параметра m

При выводе формулы (14) индекс главного лепестка был принят равным нулю. С одной стороны от этого лепестка находятся $N - m - 1$ ненулевых членов ВКФ с отрицательными индексами, а с другой – $(n + m - 1)$ членов с положительными индексами. Поэтому, изменяя параметр m , можно передвигать положение главного лепестка по корреляционной функции.

Заметим, что величина параметра m в (1) может изменяться в пределах $m \in (0, 1, \dots, N - n)$ пока окно длины N содержит все члены последовательности s_0 .

В то же время, ВКФ (2) имеет большее число $N + n - 1$ ненулевых членов. Однако при индексах m вне указанного диапазона последовательность s_0 фактически укорачивается, и происходит анализ укороченной последовательности. Поэтому в данной работе такие значения параметра m не рассматриваются.

Проанализируем, как влияет параметр m на коэффициент качества. На рис. 2 представлен типичный график функции $Q(m)$ (6) в децибелах (сплошная линия) для последовательности $s_0 = 39C0A92$ с параметрами $n = 26$, $N - n = 52$. Пунктирной линией на рисунке показан график функции $P(m)$ (5).

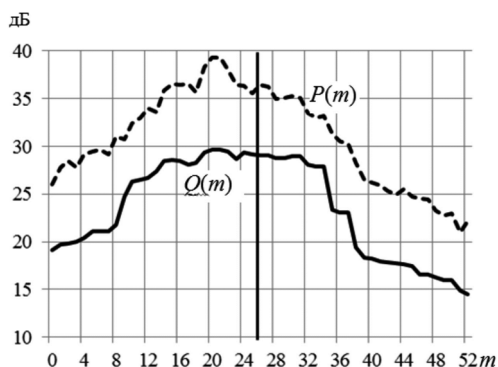


Рис. 2. Графики функций $Q(m)$ и $P(m)$

Отметим следующие характерные черты приведенных зависимостей. Обе кривые не являются монотонными и имеют волнообразный характер. Максимальные значения, как функции $Q(m)$, так и функции $P(m)$, достигаются в районе середины диапазона изменения параметра m , обозначенной на рис. 2 жирной вертикальной линией, однако эти максимумы несколько смещены относительно середины. Смещение максимумов можно объяснить разной структурой начала и конца последовательности s_0 .

Заметим также, что поведение функции $P(m)$ аналогично поведению функции $Q(m)$, при этом разность $P(m) - Q(m)$ составляет в среднем 7,5 дБ.

Еще одним параметром, важным для радиолокационных применений, являются потери L (4) в отношении сигнал/шум. Этот параметр слабо зависит от величины m . Для рассматриваемого примера потери находятся в диапазоне 0,4–0,57 дБ во всем анализируемом диапазоне изменения параметра m .

Чтобы уменьшить количество переменных параметров, от которых зависит оптимальное решение (14), в дальнейшем ограничимся его исследованием при параметре m в середине возможного диапазона. Получаемое при этом решение близко к наилучшему по параметру m . Тем не менее, при выборе последовательности для конкретных приложений рекомендуется исследовать полученное решение на оптимальность по параметру m , варьируя его в небольших пределах около середины.

Для дальнейших исследований положим, кроме того, что число нулей m в последовательности s (1) слева и справа от s_0 одинаково, т.е. величина $N - n$ четна. Это

условие не ограничивает получаемые результаты, так как коэффициент качества слабо зависит от увеличения параметра N на единицу. При указанных соглашениях параметры N , n , m связаны соотношением

$$N = n + 2m. \quad (15)$$

Выбор исходной последовательности s_0

Формула (14) дает способ вычисления оптимальной последовательности x при фиксированной исходной последовательности s_0 . Вопрос о выборе последней для получения наилучшего решения остается открытым. Поэтому в данной работе анализируются результаты, получаемые при использовании последовательностей из нескольких известных семейств в качестве исходных.

Сначала изложим несколько общих соображений. Известно, что при увеличении параметра m коэффициент качества монотонно увеличивается [5]. Начальное значение этого коэффициента определяется коэффициентом качества АКФ исходной последовательности s_0 . Поэтому логично предположить, что чем больше коэффициент качества АКФ последовательности s_0 , тем больше результирующий коэффициент качества ВКФ (12) для любого m .

Для проверки этого предположения проанализированы все возможные начальные последовательности для нескольких сравнительно коротких длин n в диапазоне 13–20. Для каждой длины вычислялись коэффициенты качества для всех возможных последовательностей как для АКФ, так и для оптимальных ВКФ, рассчитанных при использовании выражения (14), для нескольких значений параметра m . Результаты вычислений для всех указанных длин имеют одинаковый характер, рис. 3 иллюстрирует их для $n = 14$.

Графики этого рисунка построены следующим образом. Сначала проводилась сортировка всех возможных последовательностей данной длины по величине коэффициента качества АКФ. Для всех графиков рис. 3 по оси абсцисс отложен номер последовательности после такой сортировки. Левый верхний график показывает значения коэффициента качества АКФ этих последовательностей. Из него следует, что количество лучших, также как и худших, последовательностей весьма мало. Это подтверждает известный факт, состоящий в том, что поиск лучшей последовательности значительной длины — весьма трудоемкая в вычислительном плане задача.

На остальных графиках приведены аналогичные зависимости для оптимальных последовательностей x (14) при $m = 0,5n; n; 1,5n$. Белым цветом внутри заливных областей на этих рисунках показаны линии тренда.

Из сравнения графиков рис. 3 можно сделать следующие выводы. Во-первых, линии тренда примерно повторяют поведение функции, описывающей коэффициенты качества АКФ исходных последовательностей. Во-вторых, среднеквадратичное отклонение от линии тренда весьма значительно и растет с ростом параметра m . При одном и том же коэффициенте качества исходных последовательностей коэффициенты качества ВКФ могут отличаться на порядок и более.

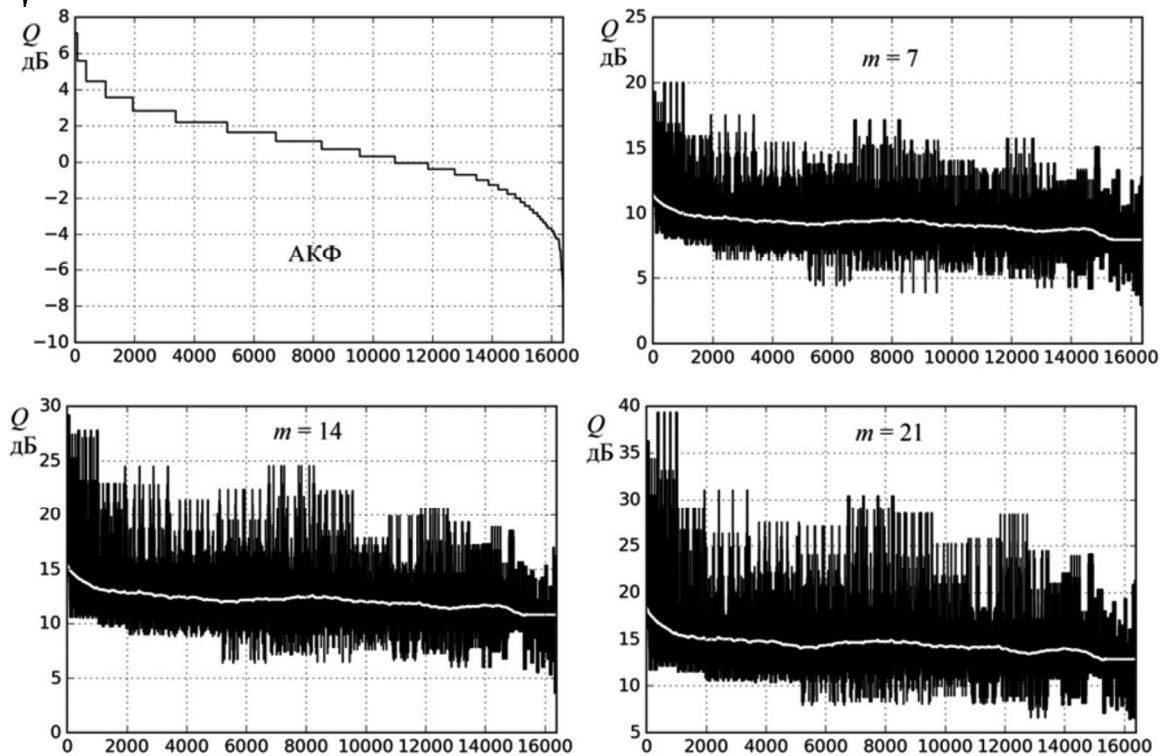


Рис. 3. Коэффициенты качества всех последовательностей длины 14: слева сверху – для АКФ, далее – для ВКФ при $m = 7, 14$ и 21

Тем не менее, для всех значений параметра m максимальный коэффициент качества ВКФ реализуется для последовательностей с коэффициентом качества АКФ, близким к максимальному. Поэтому рассмотрим сначала параметры решения (14) для последовательностей с максимально возможным коэффициентом качества АКФ.

Параметры ВКФ для последовательностей с максимальным коэффициентом качества АКФ

Поиск последовательности с максимальным коэффициентом качества АКФ при заданной длине производится на протяжении полувека [4]. Результаты поиска можно найти, например, в [8], где перечислены лучшие известные последовательности для всех длин в диапазоне 4-271 за исключением длин 248, 260, 266. Последовательности до длины 60 найдены методом исчерпывающего перебора и, следовательно, являются наилучшими по коэффициенту качества АКФ. В данном разделе анализируются последовательности из этого перечня [8], причем для каждой длины оставлена одна последовательность, дающая наилучшие результаты при несогласованной фильтрации.

Один из основных вопросов состоит в том, насколько быстро растет коэффициент качества $Q(m)$ при увеличении параметра $m = 0,5(N - n)$. Для ответа на этот вопрос проанализированы параметры ВКФ, получаемых по изложенному методу, для всех последовательностей из указанного списка в диапазоне параметра $m = (0...4)n$. На рис. 4 представлены два типичных случая поведения функции $Q(m)$ (6): для последовательности 3FC08F1EEEDCAE2B13496 длины $n = 82$ (рис. 4 а) и последовательности 7FD556BC078D3B64B4CE66 дли-

ны $n = 87$ (рис. 4 б). На этом же рисунке приведены графики функции подавления $P(m)$ (5). По оси абсцисс на обоих графиках отложено отношение m/n .

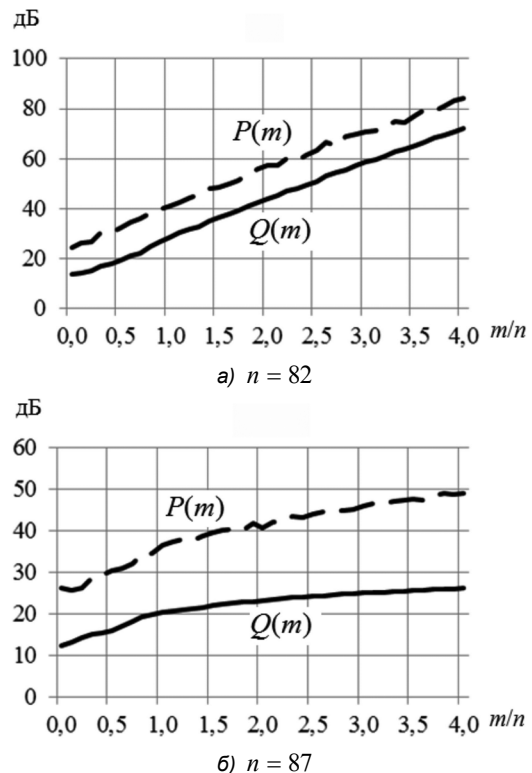
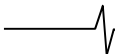


Рис. 4. Зависимости $Q(m)$ и $P(m)$

Зависимости рис. 4 а близки к линейным с небольшими колебаниями вокруг средней линии. Зависимости рис. 4б демонстрируют сильную нелинейность с постепенным уменьшением наклона. С точки зрения исследуемой задачи предпочтительными являются линейные



зависимости, так как они позволяют при меньшей длине N получить необходимый коэффициент качества. В анализируемом списке таких последовательностей примерно половина. Следовательно, для произвольно заданной длины в диапазоне $n = 4 - 271$ всегда можно найти близкую по длине последовательность с примерно линейной зависимостью $Q(m)$.

Для того, чтобы оценить скорость возрастания коэффициента качества $Q(m)$ при увеличении параметра m , для всех последовательностей из рассматриваемого списка рассчитаны коэффициенты аппроксимирующих прямых $a(m/n) + b$, оптимальных по критерию минимума среднеквадратичной ошибки. Хотя линейные функции хорошо аппроксимируют только зависимости вида рис. 4 а, коэффициент a может служить индикатором степени нелинейности функции.

Гистограмма распределения коэффициента a показана на рис. 5. Последовательности с коэффициентом a в диапазоне 2-5 демонстрируют, как правило, сильную нелинейность, в диапазоне 5-8 нелинейность слабее, при $a > 8$ – зависимости приближаются к линейным. Для функции $Q(m)$ рис. 4а коэффициенты равны $a = 15,1$, $b = 13,1$; а рис. 4 б – $a = 3,0$, $b = 16,0$. В первом случае это означает увеличение коэффициента качества ВКФ примерно на 15 дБ при увеличении отношения m/n на единицу. При $m/n = 4$ коэффициент качества достигает величины $Q = 72$ дБ, а уровень подавления – $P = 83$ дБ. Среднее значение наклона a аппроксимирующих прямых для последовательностей из рассматриваемого множества составляет $\bar{a} = 8,44$.

к-во

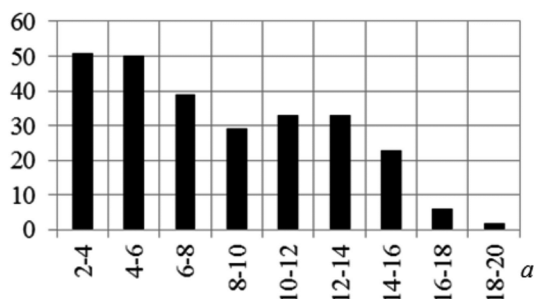


Рис. 5. Гистограмма наклона a аппроксимирующей прямой

Необходимо также отметить, что уже при $m = 0$ переход к несогласованной фильтрации улучшает коэффициент качества в среднем на 2,8 дБ, а для отдельных последовательностей – до 7 дБ.

Зависимость подавления $P(m)$ (5) по форме соответствует зависимости $Q(m)$. Если функция $Q(m)$ хорошо аппроксимируется прямой, то это же относится, как

правило, и к функции $P(m)$. При этом в среднем график функции $P(m)$ лежит на 10-15 дБ выше, а соответствующий наклон аппроксимирующей прямой на 1,2 дБ больше. При нелинейном характере $Q(m)$, функция $P(m)$ растет быстрее, чем $Q(m)$.

Следующий важный параметр для радиолокационных применений – это потери в отношении сигнал/шум (4). Так как критерий оптимизации (6) содержит в числителе уровень главного лепестка, то следует ожидать, что

оптимальная последовательность (14) не сильно отличается от согласованной, и поэтому потери будут невелики. Расчеты подтверждают эти ожидания. В качестве примера на рис. 6 показаны наложенные друг на друга исходная последовательность s при $s_0 = \text{CE0549}$ длины 24 (сплошная линия) и последовательность x , полученная по формуле (14) при $m = 12$ (линия из точек). По оси абсцисс отложены номера членов последовательностей, по оси ординат – их величина. Соседние точки на графике соединены прямыми линиями.

В области ненулевых членов s (номера точек 12-36) последовательности отличаются мало, а за пределами этой области элементы последовательности x невелики, что приводит к небольшим потерям.

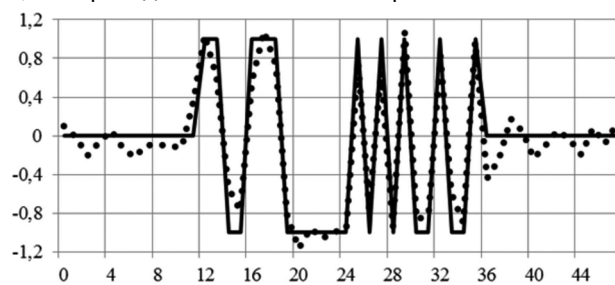


Рис. 6. Подобие последовательностей s и x

Для рассматриваемого семейства исходных последовательностей средняя величина потерь при $m = 0, n/2, n, 2n$ составляет соответственно 0,29; 0,55; 0,70; 0,85 дБ. Гистограмма распределения потерь показана на рис. 7 для $m = 0$ темными прямоугольниками и для $m = 2n$ светлыми прямоугольниками. При $m = 0 \dots 2n$ подавляющее большинство последовательностей имеют потери в диапазоне 0-1,25 дБ и лишь единичные – порядка 2-3 дБ. Указанные величины сравнительно невелики и являются адекватной платой за снижение уровня боковых лепестков. Заметим также, что приведенные величины потерь меньше, чем потери при введении весовых функций для подавления боковых лепестков при спектральном анализе [1, 2].

к-во

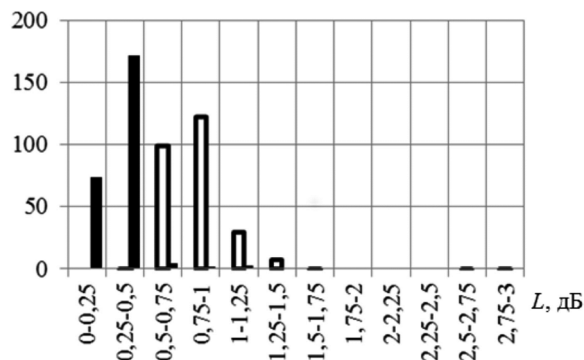


Рис. 7. Гистограмма распределения потерь

В табл. 1 представлены характеристики оптимального решения (14) для последовательностей из рассматриваемого перечня, имеющих длину $n \geq 13$ и коэффициент наклона аппроксимирующей прямой $a \geq 14$ для функции $Q(m)$. Для каждой последовательности приведены длина n , ее представление в шестнадцатеричном виде, коэффициент качества $Q(m)$ при согласованной

Таблица 1. Параметры ВКФ для лучших последовательностей с максимальным коэффициентом качества АКФ

n	s ₀	Q, дБ, при m=					P, дБ, при m=					L, дБ, m=		a	
		СФ*	0	n/2	n	2n	СФ*	0	n/2	n	2n	0	2n	Q	P
13	1f35	11,49	15,68	19,46	30,03	49,60	22,28	24,00	27,65	38,47	58,59	0,14	0,21	18,8	18,8
14	3f35	7,12	14,25	19,33	29,21	44,01	16,90	19,77	25,74	35,75	50,88	0,64	0,78	15,9	15,6
15	7cca	8,75	13,59	19,88	29,81	45,11	13,98	23,80	28,66	37,80	53,75	0,37	0,60	16,7	17,1
17	18329	6,55	10,85	16,25	24,90	38,58	15,07	17,65	24,32	34,32	47,14	0,82	1,14	14,6	15,1
26	39c0a92	8,76	13,22	17,80	29,06	46,46	18,76	21,99	26,51	36,43	56,77	0,33	0,57	17,5	17,3
29	1ce02a4d	8,31	11,19	16,32	28,16	44,33	19,71	19,96	26,70	37,80	55,72	0,29	0,69	15,8	16,5
38	3fc3cb5599	9,19	13,58	18,87	28,41	42,07	22,05	23,09	26,08	40,32	52,19	0,39	0,68	14,6	14,6
39	7f92d8f1aa	8,85	12,88	20,65	31,17	47,68	17,84	23,56	31,93	42,05	58,33	0,40	0,71	17,5	17,7
45	1fe4b6270e55	9,34	12,45	19,64	27,63	43,26	19,08	24,00	32,15	42,19	55,41	0,30	0,63	14,8	15,0
46	3fce1d896caa	9,07	12,45	20,08	28,91	42,72	21,21	23,51	30,93	38,78	54,04	0,29	0,57	14,3	14,2
47	7fce1d896caa	9,13	12,61	19,80	27,91	42,69	19,46	22,85	31,99	40,05	56,70	0,30	0,64	15,0	15,3
55	7fc9392f1b1caa	9,47	12,12	19,52	27,92	44,01	17,91	21,77	31,34	40,77	58,12	0,22	0,61	16,1	16,3
59	7f0184c34c5952a	9,29	13,29	19,23	28,56	42,78	21,44	26,52	30,71	42,69	55,40	0,52	0,95	14,9	15,2
67	7ff09ce1e96c9d2aa	9,69	13,28	20,32	28,52	44,44	19,62	22,82	33,83	41,66	57,32	0,39	0,85	15,2	15,5
77	1f6fe16cb3730c7a5475	9,18	11,49	17,60	24,75	39,36	16,90	21,19	28,01	37,34	52,52	0,23	0,76	14,0	14,9
82	3fc08f1eedeae2b13496	9,50	13,47	19,42	28,68	43,94	24,30	24,53	32,44	40,84	57,43	0,29	0,58	15,1	14,9
95	7319c1fe828fadf5ea949932	9,74	13,82	18,36	28,43	43,12	20,47	27,31	31,09	41,51	56,65	0,33	0,54	14,7	15,0
99	7cf8364ffe59e984aac635aca	9,29	12,93	19,16	29,24	43,10	20,83	25,88	33,86	43,22	58,45	0,30	0,64	14,0	14,4
103	61f3f0099bacfacfb99d52b296	9,80	13,58	19,93	28,86	43,45	23,35	26,83	34,44	44,36	57,32	0,27	0,52	15,0	15,2
104	e1f3f0099bacfacfb99d52b296	9,46	13,19	19,34	28,18	42,02	22,28	25,93	31,60	41,86	55,43	0,29	0,58	14,2	14,6
129	1c63e319ca1fdffadce155d5a0d9b2526d	9,56	12,93	19,18	28,78	44,20	21,38	25,84	32,70	43,57	58,45	0,29	0,62	15,3	15,7
130	3c63e319ca1fdffadce155d5a0d9b2526d	9,51	12,75	18,84	28,78	43,92	22,28	25,85	32,66	41,93	56,97	0,29	0,65	15,8	15,7
134	3f8ce603e0a09edbc8e9d7d6b566cdab	9,27	13,55	20,17	30,63	45,25	18,46	27,77	33,13	45,64	58,09	0,41	0,65	15,4	15,6
135	6ad9b356b5f5cb8e99edbc8283e03398fe	9,48	13,86	19,73	30,74	45,74	19,08	26,71	33,23	46,24	60,70	0,39	0,60	16,2	16,5
140	ff01fdb484843167199261345c5c38a952a	9,20	12,38	20,74	29,92	44,30	20,00	26,13	35,51	46,03	59,54	0,46	0,99	14,0	14,5
141	1fe03fb69090862ce3324c268b8b87152a55	9,46	12,75	20,79	30,16	45,71	19,46	25,04	36,20	46,93	63,03	0,40	0,83	15,0	16,0
146	3fff03784e58e4b49998f0e49e4e972ad555	9,23	12,34	18,54	27,82	42,11	23,29	24,94	32,62	41,23	56,60	0,32	0,79	14,9	14,6
158	3f0600f83071ff993cc57ecd39955b6b294aa6b5	9,30	13,59	19,35	28,96	43,32	23,97	27,31	29,80	43,81	59,40	0,34	0,61	14,4	15,2
169	1c1c7c623b8eb1fd05dafdd41debb5b0491226d6dad	9,69	12,63	17,96	26,69	41,67	23,73	28,29	34,44	42,12	57,61	0,24	0,57	14,8	15,0

*СФ – согласованная фильтрация.

(СФ) и несогласованной фильтрации с параметрами $m = 0, n/2, n, 2n$, уровень подавления $P(m)$ для тех же параметров, потери L в отношении сигнал/шум, а также коэффициенты a наклона прямых, аппроксимирующих функции $Q(m)$ и $P(m)$.

Для $n \geq 170$ не имеется ни одной последовательности с коэффициентом $a \geq 14$. Это может быть связано либо с тем, что при $n > 60$ наилучшие последовательности не найдены, либо с тем, что максимальный коэффициент качества ВКФ ухудшается с ростом длины. Какой вариант имеет место в действительности, на сегодняшний день неизвестно.

Параметры ВКФ для M-последовательностей

Наиболее известным семейством псевдослучайных последовательностей, широко используемых в радиолокации для фазокодовой манипуляции, являются рекуррентные последовательности максимальной длины, или M-последовательности [1, 2]. M-последовательность $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ из элементов 0, 1 длины $n = 2^k - 1$, $k = 2, 3, \dots$, генерируется по формуле

$$a_{i+k} = (\sum_{j=0}^{k-1} a_{i+j} p_j) \text{ mod } 2, \quad i \geq k, \quad (16)$$

где $p_j, j = 0, 1, \dots, k-1$, – коэффициенты двоичного при-

митивного полинома $\sum_{j=0}^k p_j x^j$ степени k , а ненулевой

начальный отрезок последовательности a_0, a_1, \dots, a_{k-1} задается произвольно. Таблица примитивных полиномов может быть найдена в [9]. Для модуляции радиолокационных сигналов используются как полные, так и

усеченные M-последовательности, при этом нулевые элементы заменяются на -1.

Асимптотический коэффициент качества АКФ M-последовательностей при $n \rightarrow \infty$ равен 4,77 дБ (3 в линейном масштабе) [4], что существенно меньше, чем у последовательностей предыдущего раздела.

Количество M-последовательностей, включая усеченные, для любой длины весьма велико. Поэтому для анализа получаемых ВКФ при использовании оптимальных решений (14) выбраны три подмножества таких последовательностей:

- M-последовательности длины 63 с минимальным уровнем максимального бокового лепестка; их количество равно 52, подробные данные могут быть найдены в [2];

- последовательности длины 70, получаемые усечением M-последовательностей длины 127, порожденных полиномом $x^7 + x + 1$ (127 штук);

- M-последовательности длины 2047, порожденные полиномами $x^{11} + x^2 + 1$ и $x^{11} + x^9 + x^2 + x + 1$ (по 25 штук для каждого полинома).

Средние значения основных параметров ВКФ для указанных наборов приведены в табл. 2 наряду с параметрами других рассматриваемых в данной работе семейств последовательностей. Обозначения параметров в таблице описаны в предыдущих разделах. Черта над параметром означает усреднение.

Анализ таблицы показывает следующее. По всем рассматриваемым параметрам M-последовательности уступают последовательностям предыдущего пункта (меньше параметры $Q(m)$ и $P(m)$, больше энергетические потери, меньше скорость роста a и т.д.). Причем различные виды полных и усеченных M-последовательностей имеют значительный разброс обсуждаемых пара-

метров. Характеристики усеченных последовательностей, как правило, существенно хуже, чем полных, а степень деградации тем больше, чем значительнее усечение. При всех длинах функции $Q(m)$ и $P(m)$ демонстрируют значительную степень нелинейности. Заметим также, что при $n=2047$ функция $\bar{P}(m)$ не является монотонной. Таким образом, использование M -последовательностей в рассматриваемом методе несогласованной фильтрации неэффективно.

Параметры ВКФ для последовательностей Лежандра

Последовательности Лежандра [4] представляют собой бесконечное семейство, имеющее один из наиболее высоких асимптотических коэффициентов качества АКФ, равный 7,78 дБ (6 в линейном масштабе). Для сравнения укажем, что рассмотренные выше последовательности с максимальным коэффициентом качества АКФ имеют этот параметр в среднем немногим более 9 дБ, а при длинах $4 \leq n \leq 60$, для которых приведенные последовательности являются наилучшими, – в среднем 8,64 дБ (7,31 в линейном масштабе). Таким образом, последовательности Лежандра имеют довольно высокий коэффициент качества.

Последовательность Лежандра $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ определена для простых длин $n=p$ и может быть построена следующим образом [4]. Символ z_i равен +1, если сравнение $x^2 \equiv i \pmod{p}$ имеет решение, и равен -1 в противном случае, $i=1, 2, \dots, p-1$. Нулевой символ полагается равным +1. Последовательность s_0 с высоким коэффициентом качества АКФ, используемая в качестве исходной в (14), получается циклическим сдвигом последовательности \mathbf{z} на $\lfloor rp \rfloor$ символов, где $r \in (0,25; 0,75)$, а выражение $\lfloor x \rfloor$ означает наибольшее целое, не превосходящее x . Таким образом

$$s_{i \text{ code}} = z_{(i + \lfloor rp \rfloor) \bmod p} \quad (17)$$

Последовательности (17) также будем называть последовательностями Лежандра.

Для анализа получаемых ВКФ этих последовательностей и оптимальных решений (14) выбраны два подмножества последовательностей (17):

– последовательности с длинами в диапазоне 4-271 для сравнения с результатами предыдущих пунктов; количество таких последовательностей равно 110;

– последовательности с длинами в диапазоне 2000-2200 для оценки асимптотических характеристик; их количество равно 48.

Усредненные параметры этих подсемейств приведены в табл. 2. Последовательности Лежандра (17) по всем параметрам занимают промежуточное положение между последовательностями с наилучшей АКФ и M -последовательностями. Для больших длин последовательности Лежандра являются хорошим выбором. Аналогичные характеристики имеют последовательности Якоби [4] (асимптотический коэффициент качества АКФ равен 6). Можно также использовать расширенные последовательности Лежандра с наиболее высоким известным асимптотическим коэффициентом качества АКФ 8,02 дБ (6,34 в линейном масштабе) [10].

Заключение

Рассмотренный метод синтеза оптимальной опорной последовательности для фазокодированного сигнала, позволяющий минимизировать интегральный уровень боковых лепестков, является аналитически простым и без труда реализуется на персональном компьютере. Для большого количества сигналов при увеличении длины опорной последовательности в 3-5 раз

($m = n \dots 2n$) достигается увеличение коэффициента качества до 25-45 дБ и уровня подавления до 45-60 дБ при потерях в отношении сигнал/шум менее 1 дБ.

В качестве исходной последовательности для рас-

Таблица 2. Средние значения параметров ВКФ для различных семейств последовательностей

Параметр ВКФ	m	Пос-ти с лучшей АКФ, $n = 4 \dots 271$	M -пос-ти, $n = 63$, с максимальным P для АКФ	M -пос-ти, $n = 70$	M -пос-ти, $n = 2047$	Лежандра, $n = 4 \dots 271$	Лежандра $n = 2000 \dots 2200$
$\bar{Q}(m)$, дБ	СФ*	9,1	5,6	2,0	4,8	6,8	7,8
	$m = 0$	11,9	7,8	5,4	7,2	9,4	10,4
	$m = n/2$	16,5	10,9	9,3	10,5	14,6	16,2
	$m = n$	22,8	14,5	12,5	14,0	19,4	21,1
	$m = 2n$	31,3	18,4	16,4	17,6	26,2	28,1
$\bar{P}(m)$, дБ	СФ*	21,9	20,4	15,5	32,0	21,2	33,9
	$m = 0$	24,6	20,5	17,2	31,5	22,4	34,4
	$m = n/2$	29,6	22,1	22,1	21,9	28,2	40,1
	$m = n$	37,6	28,4	26,2	30,2	33,8	42,2
	$m = 2n$	47,1	33,3	31,7	37,3	41,7	53,1
$\bar{L}(m)$, дБ	$m = 0$	0,29	0,47	2,0	0,51	0,44	0,30
	$m = n/2$	0,55	0,93	3,0	0,93	1,00	0,75
	$m = n$	0,70	1,48	3,7	1,40	1,32	0,88
	$m = 2n$	0,85	2,17	4,6	2,03	1,84	1,11
\bar{a} для Q	–	8,4	3,8	3,7	5,2	6,3	6,0
\bar{a} для P	–	9,6	5,0	5,0	4,4	7,7	7,5

*СФ – согласованная фильтрация

смаатриваемого метода целесообразно выбирать последовательности с максимальным коэффициентом качества автокорреляционной функции. Для длин $n < 300$ такие последовательности приведены в литературе. Для больших длин целесообразно использовать последовательности Лежандра или Якоби.

Увеличение длины опорной последовательности приводит к некоторому возрастанию объема вычислений при фильтрации сигнала. Тем не менее, реализация рассмотренного метода в реальном масштабе времени на современных сигнальных процессорах не вызывает затруднений.

Таким образом, рассмотренный метод несогласованной фильтрации дает эффективный способ подавления боковых лепестков не только при малых длинах последовательности, но, вопреки распространенному мнению, и при больших длинах.

Литература

1. Levanon N., Mozeson E. Radar Signals. JohnWiley& SonsInc. NewJersey.2004.412 p.
2. Трухачев А.А. Радиолокационные сигналы и их применения. М. Воениздат. 2005. 320 с.
3. Nasrabadi M.A., Bastani M.H. A Survey on the Design of Binary Pulse Compression Codes with Low Autocorrelation. Trends in Telecommunications Technologies. Christos J Bouras (Ed.). ISBN: 978-953-307-072-8. InTech.2010.
4. Jedwab J. A Survey of the Merit Factor Problem for Binary Sequences. Sequences and Their Applications. Proceedings of SETA 2004.ed. T. Helleseth et al. Lecture Notes in Computer Science.vol. 3486. pp. 30–55. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 2005.
5. P. Stoica, J. Li, and M. Xue. Transmit codes and receive filters for radar. IEEE Signal Processing Magazine. vol. 25. pp. 94–109. November 2008.
6. Levanon N. Cross-Correlation of Long Binary Signals with Longer Mismatched Filters. IEE Proceedings. Radar, Sonar, and Navigation.vol. 152. pp. 377–382. Dec. 2005.
7. Horn R.A. and Johnson C.R. Matrix Analysis. Cambridge University Press.1985. 652 p.
8. Knauer J. Merit Factor Records. Nov. 2004. Available in oct. 2016 at URL: http://labraj.feri.um.si/en/Low-Autocorrelation_Binary_Sequence_Problem.
9. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М. Мир. 1976. 594 с.
10. Jedwab J., Katz D.J., Schmidt K.U. Advances in the Merit Factor Problem for Binary Sequences. Journal of Combinatorial Theory. Volume 120. No 4. pp. 882-906. May 2013.