УДК 621.391

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТОВ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

***Рафиков Р.А.**, к.т.н., доцент Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: tatiana-raf@mail.ru.*

A METOD OF CONSTRUCTING COMPACTLY SUPPORTED ORTOGONAL WAVELETS

Rafikov R.

The novel approach to the construction of the orthogonal system of compactly supported scaling and wavelet functions is suggested. This approach allows construction of functions without the requirement on vanishing high-order moments for functions.

Key words: wavelet, orthogonal, scaling, moments, constructing.

Ключевые слова: вейвлет, масштабирующая функция, симметрия, масштабирующее уравнение, моменты.

Предлагается способ построения ортогональной системы масштабирующих и вейвлет-функций с конечным носителем свободный от требований к моментам функций порядка выше нулевого.

Введение

Разработанные Добеши ортонормированные вейвлеты с конечным носителем [1, 2] получили широкое распространение в многочисленных процедурах обработки сигналов. Посредством этих вейвлетов может быть осуществлено разложение широкого класса функций, в том числе и имеющих постоянную составляющую на конечном отрезке. Вейвлеты $[\psi(x)]$ по определению подчиняются соотношению $\int \psi(x)dx = 0$, т.е. осциллируют вокруг нулевого значения. Вследствие этого аппроксимация вейвлетом функции с отличным от нуля интегралом на конечном носителе приводит к функциональному ряду с бесконечным носителем [3]. Практическая ценность такого представления мала. С введением масштабирующей функции $[\varphi(x)]$ и кратно-масштабного анализа, предложенного Малла [4], [5], интерес к ортогональным вейвлетам с конечным носителем значительно вырос. В еще большей степени этому способствовала разработка алгоритма быстрого вейвлет-анализа, автором которого также является Малла [6], [7]. Отличительная особенность быстрого метода заключается в том, что для нахождения коэффициентов разложения аппроксимируемой функции не требуется знания масштабирующей функции или вейвлета, а достаточно знания лишь коэффициентов h_n масштабирующего уравнения $\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_n h_n \varphi(2x - n)$.

Аксиоматическая основа для построения вейвлет-базиса с конечным носителем сводится к четырем фундаментальным требованиям к масштабирующей функции и вейвлету:

1. условие нормировки масштабирующей функции: $\int \varphi(x)dx = 1$,

2. условие равенства нулю постоянной составляющей вейвлета: $\int \psi(x)dx = 0$,

3. условие ортогональности вейвлета и масштабирующей функции: $\int \varphi(x)\psi(x)dx = 0$,

4. условие сдвиговой ортогональности масштабирующей функции: $\int \varphi(x)\varphi(x+m)dx = \delta_{0,m}$.

Количество уравнений для коэффициен-тов, получаемое из фундаментальных требований, равно N + 1, в то время как общее число коэффициентов h_n равно $2N$ (N = 1,2,3,…). Число N + 1 совпадает с числом $2N$ только при N = 1, т.е. в этом случае для построения масштабирующей и вейвлет-функций достаточно лишь фундаментальных требований. Если же N > 1, то $2N$ > N + 1 и совокупность фундаментальных требований должна быть дополнена некоторыми условиями для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы сформулировать еще N - 1 уравнение. Эти условия можно назвать факультативными.

Ингрид Добеши, внесшая значительный вклад в теорию вейвлетов, в качестве факультативных использовала условие на моменты вейвлет-функции [2]:

$\int x^k \psi(x)dx = 0$, k = 0, 1, 2, 3, …

По предложению Койфмана это условие было распространено на моменты масштабирующей функции: $\int x^l \varphi(x)dx = 0$, l =1, 2, 3, …

Последнее предложение позволило построить значительно более симметричные вейвлеты, которые по предложению Добеши были названы койфлетами.

Наряду с требованиями к моментам в качестве факультативных рассматриваются и другие. Например, в [9] используется критерий энергетического характера.

Решение системы основных и факультативных уравнений приводит к коэффициентам h_n и далее к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Целью настоящей работы является предложение нового типа факультативного требования при построении ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Суть его заключается в симметрировании коэффициентов h_n масштабирующего уравнения. Симметрия коэффициентов h_n приводит к положительным эффектам, среди которых можно отметить:

1. почти двукратное сокращение количества уравнений для коэффициентов h_n;
2. такое же уменьшение объема памяти для их хранения;
3. ускорение процедуры быстрого вейвлет-преобразования (из формулы для коэффициентов разложения

$$A_{j,k} = \sum_{n=0}^{2N-1} h_n A_{j-1,2k+n}$$

следует, что для вычисления $A_{j,k}$ требуется выполнить $2N$ операций умножения и *2N-1* операций сложения; симметрия h_n позволяет вдвое уменьшить количество операций умножения);
4. возможность использования вейвлетов большей длины (т.е. более гладких вейвлетов) при сохранении объема вычислительных процедур.

Симметрия коэффициентов h_n при определенном выборе связи между ними приводит к анализирующим функциям также близким к симметричным. Поэтому остановимся кратко на рассмотрении свойств симметрии этих функций.

Симметрия масштабирующих и вейвлет-функций

Симметричные вейвлеты в сравнении с несимметричными при одинаковой длине носителя имеют большее разрешение по частоте, т.е. в большей степени приближаются к минимуму для соотношения Гейзенберга. Они также имеют линейную фазочастотную характеристику, что обеспечивает меньшие искажения при анализе и синтезе сигнала [2], [8], [9], [10], [11]. Ортогональные вейвлеты с конечным носителем, получившие широкое распространение в теории и практике вейвлет-преобразования, не обладают свойством симметрии (исключением являются масштабирующая и вейвлет-функции Хаара – первая имеет ось симметрии, вторая центр симметрии). Отсутствие симметрии масштабирующей и вейвлет-функций, полученных на основе кратно-масштабного анализа, обусловлено требованием их ортогональности. Исключение этого требования делает возможным существование симметричных решений уравнения масштабирования. В этом можно убедиться записав уравнение масштабирования в целых точках и полагая, что масштабирующая функция симметрична относительно $x = \dfrac{2N-1}{2}$, т.е. $\varphi(i) = \varphi(2N-1-i)$.

Учитывая это условие в уравнениях для целых точек, можно получить $h_i = h_{2N-1-i}$.

Точно также, предполагая симметрию коэффициентов, можно убедиться в симметрии масштабирующих функций.

Объединение двух этих случаев приводит к утверждению: «Необходимым и достаточным условием симметрии масштабирующей функции относительно середины носителя является симметрия коэффициентов h_n».

Связь между коэффициентами вейвлета g_i при этом дается формулой: $g_i = -g_{2N-1-i}$. Из этого следует, что вейвлет-функция $\psi(x)$ при симметричной $\varphi(x)$ является центрально-симметричной функцией, т.е. $\varphi(x)$ имеет ось симметрии, а $\psi(x)$ – центр симметрии.

Симметрия и ортогональность

Покажем, что симметрия масштабирующих функций несовместима с условием их сдвиговой ортогональности. Требование сдвиговой ортогональности $\int \varphi(x)\varphi(x+m)dx = 0$ приводит к системе уравнений:

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_{2N-1}^2 = 1,\ m = 0,$$
$$h_0h_2 + h_1h_3 + h_2h_4 + \ldots + h_{2N-3}h_{2N-1} = 0,\ m = 1,$$
$$h_0h_4 + h_1h_5 + h_2h_6 + \ldots + h_{2N-5}h_{2N-1} = 0,\ m = 2,$$
$$h_0h_6 + h_1h_7 + h_2h_8 + \ldots + h_{2N-7}h_{2N-1} = 0,\ m = 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_0h_{2N-2} + h_1h_{2N-1} = 0,\ m = N-1.$$

Если коэффициенты h_n симметричны, то последнее уравнение приобретает вид $2h_0h_1 = 0$ и может быть удовлетворено только в случае $h_0 = 0$ или $h_1 = 0$. Тогда в каждом из уравнений системы исчезают первый и последний члены (если предположить $h_0 = 0$). В этом случае уравнение для $m = N - 2$ опять будет содержать два слагаемых: $h_1h_{2N-3} + h_2h_{2N-2} = 2h_1h_2 = 0.$ Это условие также может быть удовлетворено либо при $h_1 = 0$ либо при $h_2 = 0.$ Приняв $h_1 = 0$, мы исключаем еще два члена из всех уравнений системы. Продолжая такую процедуру, приходим к уравнению $h_{N-2}h_N + h_{N-1}h_{N+1} = 0$, для $m = 1,$ которое может быть удовлетворено, если или h_{N-2}, или $h_{N-1} = 0$. К тому же наличие сомножителя h_{N-2} требует, чтобы N было больше единицы. Таким образом, ни при одном N >1 условия ортогональности и симметрии $\varphi(x)$ одновременно не могут быть выполнены. Лишь при m = 0, N = 1 условия ортогональности $h_0^2 + h_1^2 = 1$ и симметрии выполняются. Этот случай соответствует масштабирующей функции и вейвлету Хаара.

Обобщая, констатируем что, масштабирующая и вейвлет-функции, полученные на основе кратно-масштабного анализа, принципиально не могут быть симметричными, что отмечалось практически во всех цитированных работах. Настоящая отличается от остальных только способом доказательства этого факта.

Вейвлеты с 2N-1 симметричными коэффициентами масштабирующего уравнения

Как упоминалось выше, часть требований к вейвлетам и масштабирующим функциям носит факультативный характер. Это создает определенную свободу выбора дополнительных требований, позволяя варьировать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В частности, можно ослабить степень несимметричности этих функций исключив требование равенства нулю для одного или нескольких моментов функций порядка выше нулевого. Можно также, как отмечалось выше, перенести часть требований к моментам с вейвлета на масштабирующую функцию или использовать энергетические критерии. В настоящей работе предлагается способ построения масштабирующих функций и вейвлетов, основанный на полном отказе от требований к моментам вейвлета (за исключением нулевого) и моментам масштабирующей функции. Рассмотрим его.

Построение вейвлетов с конечным носителем связано с нахождением коэффициентов h_n масштабирующего уравнения: Основные соотношения для этих коэффициентов

$$\sum_{n=0}^{2N-1} h_n = \sqrt{2},$$

$$\sum_{n=0}^{2N-1} g_n = \sum_{n=0}^{2N-1}(-1)^n h_{2N-1-n} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{2(N-m)-1} h_n h_{n+2m} = 0,\quad m = 1, 2, \ldots, N-1$$

следуют из фундаментальных требований к масштабирующей и вейвлет-функциям. Предлагается взамен условий на моменты ввести иное факультативное требование – требование симметрии коэффициентов h_n относительно коэффициентов h_{N-1} (или h_N). Это связывает коэффициенты масштабирующего уравнения ($h_i = h_{2(N-1)-i}$) и уменьшает количество неизвестных. Уравнения для h_n приобретают вид:

$$\sum_{n=0}^{N-2} 2h_n + h_{N-1} + h_{2N-1} = \sqrt{2},$$

$$\sum_{n=N+1}^{2N-1} (-1)^n 2h_{2N-1-n} + (-1)^N h_{N-1} + h_{2N-1} = 0,$$

$$2\sum_{n=0}^{(N-1)-2m} h_n h_{n+2m} + h_{N-1-m}^2 + h_{2m-1}h_{2N-1} = 0,\ m=1, N>2,$$

$$2\sum_{n=0}^{(N-1)-2m} h_n h_{n+2m} + 2\sum_{n=(N-1)-(2m-1)}^{(N-1)-(m+1)} h_n h_{2(N-1)-2m-n} + h_{N-1-m}^2 +$$

$$+ h_{2m-1}h_{2N-1} = 0,\ m \ge 2,\ 2m \le N-1,$$

$$2\sum_{n=0}^{(N-1)-(m+1)} h_n h_{2(N-1)-2m-n} + h_{N-1-m}^2 + h_{2N-1-2m}h_{2N-1} = 0,$$

$m \ge 2,\ m+1 \le N-1 < 2m,$

$h_0^2 + h_1 h_{2N-1} = 0,\ m = N-1.$

Количество неизвестных h_n (как и количество уравнений) уменьшается на N - 1 и становится равным N + 1. В случае больших N можно говорить об уменьшении числа коэффициентов h_n вдвое. Если из всех возможных решений уравнений для h_n выбрать решение, в котором коэффициент h_{2N-1} намного меньше остальных, то вейвлет будет в значительной степени симметричным.

В табл. 1.1 в качестве примера приведены значения h_n для N = 3 и N = 5. На рис. 1 представлены масштабирующая $\varphi(x)$ и вейвлет $\psi(x)$ функции для N = 3 и N = 5.

Таблица 1.1.

N = 3

n	h_n
0	-0,073142
1	0,361000
2	0,853391
3	0,361000
4	-0,073142
5	-0,014893

N = 5

n	h_n
0	-0,008599
1	0,016416
2	-0,073221
3	0,339389
4	0,870747
5	0,339389
6	-0,073221
7	0,016416
8	-0,008599
9	-0,004504

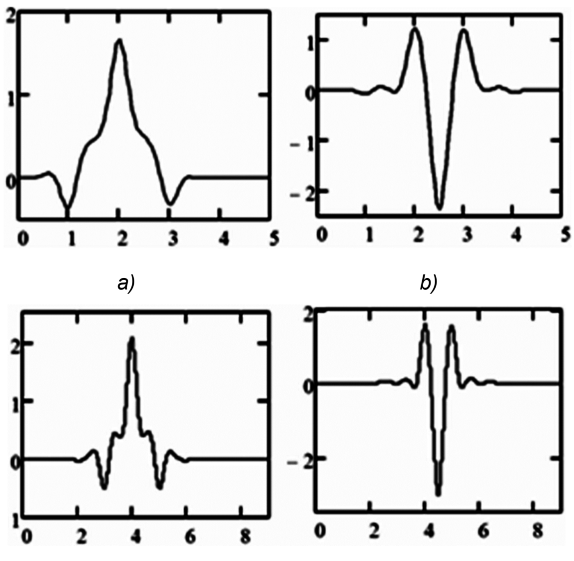

Рис. 1. Масштабирующие функции (a, c) и вейвлеты (b, d) в случае N = 3 и N = 5.

Близкие к симметричной формы масштабирующих функций в рассматриваемом случае связаны с тем обстоятельством, что коэффициенты h_n равноудаленные от h_{N-1} полностью совпадают и по абсолютной величине, и по знаку. Симметрия h_n относительно h_{N-1} обусловливает и симметрию g_n также относительно h_{N-1} В самом деле, из уравнения $g_n = (-1)^n h_{2N-1-n}$, связывающего коэффициенты h_n и g_n , [2, 8, 10, 11] и симметрии h_n следует $g_n = (-1)^n h_{2N-1-n} = g_{2(N-1)-n}$. Последнее определяет и близкую к симметричной форму вейвлета. Хорошее приближение к симметрии приводит к почти линейной фазочастотной характеристике и обеспечивает малые искажения при обработке сигнала. Кроме того, для гладких функций близкая к симметричной форма вейвлета приводит к почти нулевым коэффициентам разложения для слагаемых ряда Тейлора анализируемой функции с нечетными степенями (если вейвлет имеет ось симметрии) или для слагаемых с четными степенями (если вейвлет имеет центр симметрии).

Идея симметрирования коэффициентов может быть расширена. В частности, можно попытаться построить масштабирующую функцию и вейвлет задавшись несколькими центрами симметрии в массиве коэффициентов. Это позволяет формировать из $2N$ - 1 коэффициентов h_n различные зависимости, т.е. варьировать графики вейвлетов и масштабирующих функций.

Разложение по предлагаемым вейвлетам в некоторых случаях может быть более предпочтительным, чем по известным.

В качестве примера рассмотрим представление модельной функции по предлагаемым вейвлетам и вейвлетам Добеши. Длины вейвлетов одинаковы (N = 5). Модельная функция задается отсчетами в шестнадцати точках ($A_{0,0} \div A_{0,15}$). Ее значения в этих точках равны: 0.080178, 1.150355, -0.067726, 1.016484, 5.005556, -13.147447, 4.421778, 3.657744, 2.685277, -4.929085, 11.989034, -22.274023, 12.370266, -5.726362, 3.820712, -0.052799.

Коэффициенты h_n для предлагаемого вейвлета взяты из приведенной выше таблицы (N = 5), а для вейвлета Добеши из [2]. Разложение модельной функции по предлагаемому вейвлету дает: $A_{1,0} = 0$, $A_{1,1} = 0$, $A_{1,2} = 0$, $A_{1,3} = 0$, $A_{1,4} = 0$, $A_{1,5} = 0$, $A_{1,6} = 0$, $A_{1,7} = 0$, $D_{1,0} = 15$, $D_{1,1} = -2$, $D_{1,2} = 8$, $D_{1,3} = 27$, $D_{1,4} = 9$, $D_{1,5} = 1$, $D_{1,6} = -1$, $D_{1,7} = 0$.

Разложение по вейвлету Добеши приводит к следующему результату:
$A_{1,0} = 0.280$, $A_{1,1} = 1.233$, $A_{1,2} = -3.026$, $A_{1,3} = 2.940$, $A_{1,4} = 0.541$, $A_{1,5} = -4.284$, $A_{1,6} = 1.108$, $A_{1,7} = 1.208$, $D_{1,0} = -3.037$, $D_{1,1} = 16.492$, $D_{1,2} = 24.438$, $D_{1,4} = 0.245$, $D_{1,5} = -1.035$, $D_{1,6} = 4.607$, $D_{1,7} = 12.471$.

Видно, что в случае предлагаемого вейвлета аппроксимирующие коэффициенты уровня A_1 равны нулю. Следовательно, и коэффициенты $A_{j,k}$ и $D_{j,k}$ уровней больше единицы также равны нулю.

Во втором случае из-за $A_{1,k}$, отличных от нуля, коэффициенты $A_{j,k}$ и $D_{j,k}$ последующих уровней разложения также не равны нулю (необязательно все).

Из этого следует, что разложение по предлагаемой системе для выбранного примера более выгодно.

Заключение

Рассмотренные выше способы модификации факультативных требований на коэффициенты масштабирующего уравнения являются только примером, демонстрирующим широкие возможности изменения анализирующих функций. Вариантов изменения факультативных требований (даже требований симметрии) может быть предложено большое количество. Например, представляет интерес случай попарной симметрии и асимметрии коэффициентов масштабирующей функции.

Уменьшение количества коэффициентов разложения h_n и g_n почти в два раза приводит, как уже упоминалось, к уменьшению объема хранимых данных и увеличению скорости их обработки.

Литература

1. I. Daubechies, Ortonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pare Appl. Math., 41, 1988, pp.909-996.

2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М.; Ижевск: РХД, 2001.

3. Блаттер К., Вейвлет-анализ. Основы теории. – М.: Техносфера, 2004.

4. Mallat S. Multiresolution representation and wavelets // Ph. D. Thesis. University of Pensylvania, Philadelphia, PA. – 1988.

5. Mallat S. An efficient image representation for multiscale analysis // In Proc. of Machine Vision Conference. Like Taho. – 1987.

6. Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. Trans. Amer. Math. Soc. 315, – 1989.

7. Mallat S. A thery for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Analisis and Machine Intelligence, 1989, №7.

8. К. Чуи, Введение в вэйвлеты. –.М: Мир, 2001.

9. Кириллов С.Н., Зорин С.В. Вейвлет-анализ случайных процессов в радиотехнических устройствах. – Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2002. – 80 с.

10. Юдин М.Н., Фарков Ю.А., Филатов Д.М. Моск. геологоразв. акад. М., 2001. – 72 с.

11. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. ВУС. С.-Пб.,1999. – 204 с.