

УДК 621.391.244

ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Паршин В.С., д.т.н., профессор Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: vsparshin@gmail.com.

PULSE RANDOM PROCESSES SPECTRAL DENSITY ESTIMATION USING SELECTED CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Parshin V.S.

Spectral density of pulse random processes is offered to be estimated by estimating the module square of parameter characteristic functions which characterize temporary position of pulses. Statistical analysis to estimate characteristic function module square is made, the results of modeling are given.

Key words: spectral analysis, pulse random process, characteristic function, statistic characteristics.

Ключевые слова: спектральный анализ, импульсный случайный процесс, характеристическая функция, статистические характеристики.

Введение

Многие задачи, возникающие при обработке сигналов в радиолокационных, радионавигационных, связанных системах сводятся к анализу импульсных случайных процессов (ИСП). Такие сигналы могут выступать как в роли носителя полезной информации, так и быть помехой. Учитывая, что обработка сигналов зачастую производится в спектральной области, актуальной является оценивание спектральных плотностей мощности ИСП, причем на практике зачастую приходится оценивать спектральную плотность мощности (СПМ) по одной реализации процесса.

Произвольный ИСП представим в виде

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f(t - t_n), \quad (1)$$

где A_n и t_n – амплитуда и время появления n -го импульса; $f(t)$ – функция, описывающая форму импульсов.

СПМ многих типов ИСП вида (1) приведены в работах [1...5]. Получены соотношения для СПМ ИСП одинаковой амплитуды и формы, возникающие в случайные моменты времени относительно тактовых интервалов, то есть

$$t_n = nT_0 + v_n, \quad (2)$$

где T_0 – детерминированный тактовый интервал; v_n – отклонение от n -го тактового интервала n -го импульса. Также получены соотношения для СПМ ИСП, состоящих из импульсов случайной длительности, возникающих на детерминированных тактовых интервалах, для аperiodических импульсных последовательностей, для групп случайных импульсов. Для таких импульсных случайных последовательностей, возникающих в случайные моменты времени, общим является зависимость формы

Предложено оценивать спектральную плотность импульсных случайных процессов, оценивая квадрат модуля характеристической функции параметров, характеризующих временное положение импульсов. Проведен статистический анализ оценки квадрата модуля характеристической функции, приведены результаты моделирования.

СПМ от характеристической функции (ХФ) момента времени появления импульсов. В качестве примера приведем СПМ двух типов ИСП.

1. СПМ импульсной последовательности, состоящей из независимых импульсов с одинаковыми амплитудами A и постоянной длительностью, возникающих в случайные моменты времени относительно тактовых интервалов T_0 [1]

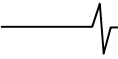
$$G(\omega) = \frac{2A^2}{T_0} |g(j\omega)|^2 \times \left\{ 1 - |\theta_{1v}(j\omega)|^2 + \frac{2\pi}{T_0} |\theta_{1v}(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T_0}\right) \right\}, \quad (3)$$

где $\theta_{1v}(j\omega)$ – ХФ флюктуаций импульсов по положению; $g(j\omega)$ – преобразование Фурье функции $f(t)$ единичной амплитуды; $\delta(z)$ – дельта-функция.

Особенностью СПМ (3) является наличие, кроме непрерывной части, дискретных спектральных составляющих, которые возникают на частотах, кратных $2\pi/T_0$. Причина их появления – равенство тактовых интервалов.

2. СПМ последовательности, состоящей из независимых импульсов со случайной амплитудой и постоянной длительностью τ_0 , возникающих в случайные моменты времени, можно представить в виде [1]:

$$G(\omega) = \frac{2A^2}{T} |g(j\omega)|^2 \times \left[\frac{\sigma_a^2}{A^2} + \frac{1 - |\theta_{1\mu}(j\omega)|^2}{1 - 2\operatorname{Re}\theta_{1\mu}(j\omega) + |\theta_{1\mu}(j\omega)|^2} + \frac{1}{T} \delta(\omega) \right], \quad (4)$$



где A, σ_a^2 – среднее значение и дисперсия амплитуд импульсов; $\theta_{1\mu}(j\omega) = \theta_{1\tau}(j\omega) \exp(j\omega\tau_0)$; $\theta_{1\tau}(j\omega)$ – ХФ случайной величины, определяющей значения пауз между импульсами; T – среднее значение пауз между импульсами.

Известно [2, 4], что оценки СПМ импульсных последовательностей, получаемых с помощью быстрого или дискретного преобразования Фурье по одной реализации процесса, являются несостоятельными (здесь и далее термин состоятельность понимается в среднеквадратичном смысле). Традиционный путь получения состоятельных оценок – усреднение выборочных СПМ, полученных по ансамблю реализаций ИСП. Такой путь получения состоятельных оценок на практике не всегда возможен. Сглаживание [6] выборочных СПМ с помощью спектральных окон также не позволяет полностью решить проблему получения состоятельных оценок, поскольку для ИСП с детерминированным тактовым интервалом характерно наличие в спектре дискретных спектральных составляющих, обусловленных периодичностью импульсного процесса. Попадание таких спектральных составляющих в полосу спектрального окна приводит к увеличению смещения оценки.

Из (3, 4) следует, что для определения оценки СПМ необходимо оценить те параметры ИСП, от которых зависит СПМ, а затем вычислить спектр в соответствии с выражениями (3, 4).

Полагая, что отдельные импульсы ИСП обнаруживаются с вероятностью единица, можно утверждать, что оценка таких параметров, как T_0, T, A, σ_a^2 сложности не представляет. Отметим, что оценки этих параметров состоятельны [1, 3]. Статистические характеристики оценок СПМ в значительной мере будут зависеть от поведения оценок ХФ. Более того, СПМ импульсных последовательностей с точностью до постоянного множителя (или постоянного слагаемого) будет определяться ХФ. Поэтому возникает задача определения статистических характеристик оценок ХФ параметров ИСП. При состоятельной оценке ХФ будут состоятельными и оценки СПМ ИСП.

Статистические характеристики оценки квадрата модуля характеристической функции

Будем считать, что имеется k -тая реализация импульсной последовательности, состоящей из N импульсов. Заданы априорные сведения о модели ИСП во временной области.

Для ИСП, СПМ которого имеет вид (3), определены время T_0 и время отклонения импульсов $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_N^{(k)}$ от начала тактового интервала T_0 . Для ИСП, СПМ которого имеет вид (4), произведена оценка таких параметров, как средняя амплитуда импульсов A , дисперсия амплитуды импульсов σ^2 , среднее значение пауз T и длительность импульсов. Измерены длительности пауз между импульсами $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_{N-1}^{(k)}$.

Будем полагать, что последовательности $v_n^{(k)}$,

$n = \overline{1, N}$ (для последовательности пауз $n = \overline{1, N-1}$) являются k -ми реализациями дельта-коррелированных эргодических случайных процессов с дискретным временем.

Поскольку, согласно определению, ХФ [1] случайной величины v равна

$$\theta(j\omega) = M\{\exp(j\omega v)\}, \quad (5)$$

где M – символ математического ожидания.

В качестве оценки ХФ $\theta(j\omega)$ примем соотношение

$$\hat{\theta}_v(j\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(j\omega v_n^{(k)}), \quad (6)$$

а в качестве оценки квадрата модуля ХФ соотношение

$$|\hat{\theta}(j\omega)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^N \sum_{n=1}^N \exp(j\omega v_l^{(k)}) \exp(-j\omega v_n^{(k)}), \quad (7)$$

где N – число импульсов в реализации ИСП.

Представим двойную сумму в квадрате модуля оценки (7) в виде $|\hat{\theta}(j\omega)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^N \exp(j\omega v_l^{(k)}) + \frac{1}{N^2} \times \sum_{l=1}^N \sum_{l \neq n}^N \exp(j\omega v_l^{(k)}) \exp(-j\omega v_l^{(k)})$ и определим математическое ожидание каждой суммы. В результате получим, что

$$M\left\{|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right\} = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} |\theta(j\omega)|^2, \quad (8)$$

Из (8) следует, что оценка $|\hat{\theta}(j\omega)|^2$ является асимптотически несмещенной, поскольку ее смещение

$$b\left[|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right] = M\left\{|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right\} - |\theta(j\omega)|^2 = \left[1 - |\theta(j\omega)|^2\right] / N. \quad (9)$$

Для нахождения дисперсии оценки квадрата модуля ХФ необходимо определить $M\left(\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \exp(j\omega v_l) \exp(-j\omega v_m) \times \exp(j\omega v_n) \exp(-j\omega v_k)\right)$. Определяя среднее значение сумм и учитывая выражение (8), дисперсию квадрата модуля представим в виде:

$$D\left\{|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right\} = \frac{1}{N^3} \left\{ (2N-1) + (N-1)(N-2)(N-3) |\theta(j\omega)|^4 + \left[2N^2 + N + N(N-4) + (N-1)(N-4) \right] |\theta(j\omega_i)|^2 + \left[N(N-1) \right] |\theta(j2\omega)|^2 + \left[2(N-1)(N-2) \right] [\theta(j\omega_i)^2 \theta(-j2\omega_i) + \theta(-j\omega)^2 \theta(j2\omega)] \right\} - \left[\frac{1}{N} + \frac{N^2 - N}{N^2} |\theta(j\omega)|^2 \right]^2. \quad (10)$$

Из выражения (10) также следует, что при значении аргумента ХФ $\omega = 0$ дисперсия $D\left\{|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right\} = 0$. При

значении аргумента $\omega \rightarrow \infty$ дисперсия $D\left\{|\hat{\theta}(j\omega)|^2\right\} \approx \approx 1/N^2$. То есть из (10) следует, что оценка квадрата модуля ХФ также является состоятельной, поскольку

при $N \rightarrow \infty D\{\hat{\theta}(j\omega)^2\} \rightarrow 0$.

На рис. 1 приведена зависимость дисперсии D_1 оценки квадрата модуля ХФ, (сплошная линия), рассчитанная в соответствии с выражением (10). Пунктирной линией показана дисперсия D_2 оценки квадрата модуля ХФ, полученной с помощью моделирования. При моделировании принято, что случайная величина ν подчинена равномерному распределению $R(-5,5)$. Объем выборки равен 2000 реализаций. Для каждой реализации число $N=500$. Значения аргумента ХФ, на которых проведены вычисления, определены как

$$\omega_i = 2\pi i/N, \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Из рис. 1 видно, что дисперсии оценки квадрата модуля ХФ, найденные с помощью моделирования и по формуле (10), совпадают достаточно хорошо. Нулевое значение дисперсии при значении $\omega = 0$ объясняется тем, что $\hat{\theta}(0) = 1$.

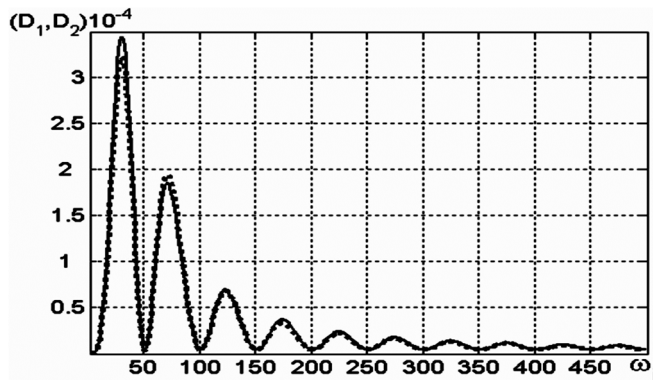


Рис. 1. Дисперсии оценки квадрата модуля ХФ

Ковариация для оценки квадрата модуля ХФ, определенная при значениях аргумента ω_i, ω_m , определится следующим выражением

$$M\left\{\left|\hat{\theta}(j\omega_i)\right|^2\left|\hat{\theta}(j\omega_m)\right|^2\right\} = \frac{1}{N^3}\left\{(2N-1) + (N-1)(N-2) \times (N-3)\theta(j\omega_i)\theta(j\omega_m)^2 + N(N-1)\left[\theta(j\omega_i)^2 + \left|\theta(j\omega_m)\right|^2\right] + (N-1)(N-2)\left[\theta(j(\omega_i - \omega_m))\theta(-j\omega_i) \times \theta(j\omega_m) + \theta(j(-\omega_i + \omega_m))\theta(j\omega_i)\theta(-j\omega_m) + \theta(j(-\omega_i - \omega_m))\theta(j\omega_i)\theta(j\omega_m) + \theta(j(\omega_i + \omega_m))\theta(-j\omega_i) \times \theta(-j\omega_m)\right] + (N-1)\left[\theta(\omega_i + \omega_m)\right]^2\right\} - M\left\{\left|\theta(j\omega_i)\right|^2\right\}M\left\{\left|\theta(j\omega_m)\right|^2\right\}. \quad (12)$$

Расчеты, проведенные по формуле (12) с учетом выражения (10), и результаты моделирования показали практически одинаковые результаты. Оценки квадрата модуля ХФ при значениях аргумента $\omega_i \neq \omega_m$ очень сильно коррелированы и монотонно уменьшаются при увеличении $\Delta\omega = \omega_i - \omega_m$.

В выражения для СПМ некоторых типов импульсных последовательностей входит реальная часть ХФ тех параметров, которые определяют временное положение импульсов [1,3]. Непосредственно из выражения (6)

следует, что оценка ХФ несмещенная. В работе [7] показано, что оценки и реальной, и мнимой частей ХФ являются состоятельными. В работе [8] получено выражение для дисперсии оценки реальной части ХФ, позволяющее вычислить дисперсию при конечном значении N в виде

$$D\left\{\text{Re } \hat{\theta}(j\omega)\right\} = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{Re } \theta(2j\omega) - \text{Re } \theta(j\omega)\right]. \quad (13)$$

Ковариация оценки реальной части ХФ, определенная при значениях аргумента ω_i, ω_m , определится следующим выражением

$$M\left\{\text{Re } \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Re } \hat{\theta}(j\omega_m)\right\} = \frac{1}{2L}\left\{\text{Re } \theta[j(\omega_i - \omega_m)] + \text{Re } \theta[j(\omega_i + \omega_m)]\right\} - \frac{1}{N}\text{Re } \theta(j\omega_i)\text{Re } \theta(j\omega_m). \quad (14)$$

Так же, как и для оценки квадрата модуля ХФ, оценки реальной части при значениях аргумента ХФ $\omega_i \neq \omega_m$ очень сильно коррелированы и монотонно уменьшаются при увеличении $\Delta\omega = \omega_i - \omega_m$.

Результаты моделирования

На рис. 2 приведена в логарифмическом масштабе $F(\omega) = \lg \hat{G}(\omega)$ оценка СПМ последовательности, состоящей из импульсов, возникающих в случайные моменты времени относительно детерминированных тактовых интервалов. Оценка спектральной плотности вычислена как

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{NT_0} \left| \int_0^{NT_0} f(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \quad (15)$$

с помощью быстрого преобразования Фурье по одной реализации процесса. СПМ этого процесса, усредненная по множеству реализаций, определяется соотношением (3). При расчетах и моделировании принято, что $N = 500, T_0 = 32$. Длительность импульсов составляла величину в один отсчет. Закон распределения импульсов относительно тактовых интервалов принят равномерным $R(-5,5)$. Моменты появления импульсов независимы. Спектральные составляющие оценки СПМ ИСП рассчитывались на частотах $\omega_i = 2\pi i/NT_0, i = \overline{0, NT_0/2}$.

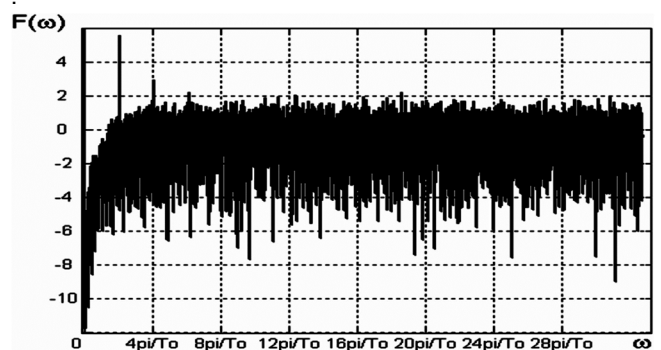


Рис. 2. Оценка СПМ импульсной последовательности с детерминированным тактовым интервалом, полученная с помощью преобразования Фурье одной реализации

Как уже отмечено выше, оценка СПМ такого процесса, вычисленная с помощью алгоритмов ДПФ или БПФ, несостоятельна. Анализ выборочного спектра, приве-

денного на рис. 2, не позволяет практически сделать однозначные выводы как о форме как непрерывной, так и дискретной части СПМ.

На рис. 3 приведена в логарифмическом масштабе оценка $F_0(\omega)$ СПМ импульсной последовательности, полученная с использованием оценки квадрата модуля ХФ. Условия проведения моделирования остались такими же, как и при получении оценки на рис. 2.

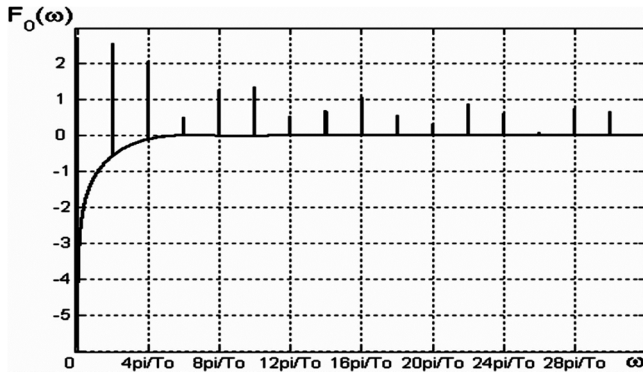


Рис. 3. Оценка СПМ, полученная с использованием оценки квадрата модуля ХФ

Произведена оценка длительности тактовых интервалов T_0 . Поскольку сумма пауз z_i , $i = \overline{1, N-1}$ между импульсами определяется как $\sum_{i=1}^{N-1} z_i \approx NT_0$, то оценка длительности тактового интервала T_0 будет равна

$$\hat{T}_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} z_i. \quad (16)$$

Отклонение от тактового интервала n -го импульса в каждой k -той реализации определено как

$$v_n^{(k)} = n\hat{T}_0 - t_n^{(k)}. \quad (17)$$

По измеренной последовательности величин $v_n^{(k)}$, $n = \overline{1, N}$ в соответствии с (7) рассчитывалась оценка квадрата модуля ХФ. Можно отметить, что из определения ХФ следует, что неточное определение среднего T_0 моментов появления импульсов не приводит к изменению модуля оценки ХФ, вычисленной по одной реализации ИСП и, следовательно, не приводит к изменению непрерывной части СПМ.

После получения оценок T_0 и квадрата модуля ХФ в соответствии с (3) рассчитывалась СПМ последовательности импульсов.

Анализ СПМ, приведенных на рис. 2, 3 дает все основания утверждать, что предварительное оценивание ХФ по выборке $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_N^{(k)}$ позволяет получить оценку СПМ с дисперсией, существенно меньшей, чем при получении оценки СПМ при использовании БПФ.

Эффективность оценивания СПМ импульсной последовательности двумя способами (с помощью оценивания ХФ и с последующим расчетом в соответствии с (3) и усреднением по ансамблю реализаций) количественно определим относительным среднеквадратическим отклонением (δ_0 и δ_{sr} соответственно)

$$\delta_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{NT_0/2} [G_T(\omega_i) - \hat{G}_0(\omega_i)]^2 \right)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{NT_0/2} G_T(\omega_i)}, \quad (18)$$

где $G_T(\omega_i)$ и $\hat{G}_0(\omega_i)$ – истинное значение СПМ и ее оценка, рассчитанная по (3).

Подставляя в (18) вместо $\hat{G}_0(\omega_i)$ оценку СПМ, полученной усреднением по ансамблю в M реализаций с помощью БПФ, получаем δ_{sr} . Результаты расчетов приведены на рис.4.

Из рис. 4 следует, что СКО оценки СПМ импульсной последовательности, полученной с помощью предварительно оцененной ХФ при увеличении длительности реализации (числа импульсов N) монотонно уменьшается. В пределе оценка $\hat{G}_0(\omega)$ стремится, с точностью до ее смещения $b(z)$, определяемой смещением оценки модуля ХФ, к истинному значению СПМ.

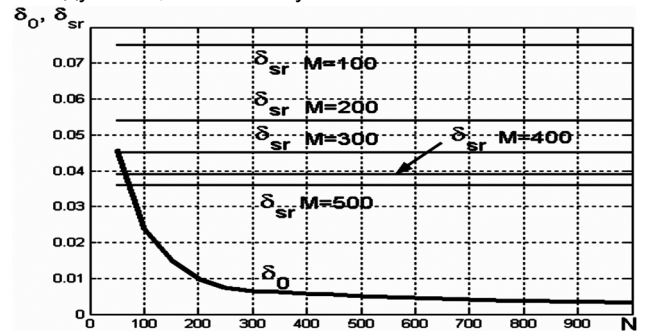


Рис.4. Относительные СКО оценки СПМ последовательности импульсов с детерминированным тактовым интервалом

Усреднение СПМ по ансамблю в M реализаций позволяет уменьшить погрешность δ_{sr} . Из рис. 4 видно, что для уменьшения δ_{sr} при оценке СПМ с использованием алгоритма БПФ требуется значительное число реализаций сигнала, что на практике далеко не всегда выполнимо. Кроме того, при оценке СПМ с помощью БПФ увеличение длительности реализации не позволяет уменьшить величину δ_{sr} . К уменьшению СКО приводит только одно – увеличение ансамбля усредняемых реализаций. Проведенное моделирование при других законах распределений флуктуаций импульсов по положению (нормальном и экспоненциальном) показало результаты, аналогичные приведенным на рис.3, 4.

На практике вызывает интерес оценка СПМ аperiодических импульсных последовательностей, форма СПМ которых определяется через формулу (4). Из (4) следует, что форма СПМ импульсной последовательности определяется формой СПМ одиночного импульса и ХФ интервалов времени между моментами возникновения импульсов. Полагаем, что произведена оценка параметров ИСП A, T, σ_a^2 , а форма СПМ одиночного импульса известна. Отметим, что T здесь является не тактовым интервалом, а средним значением пауз между им-

пульсами. Для получения СПМ остается определить функцию частоты, зависящую от ХФ интервалов времени между моментами возникновения импульсов. Изменяя интервалы времени $\tau_n^{(k)}$, $n=1, N-1$ и вычисляя оценку ХФ, в конечном итоге получаем функцию

$$F_{XF}(\omega) = \frac{1 - |\hat{\theta}_{1\mu}(\omega)|^2}{1 - 2 \operatorname{Re} \hat{\theta}_{1\mu}(\omega) + |\hat{\theta}_{1\mu}(\omega)|^2}, \quad (19)$$

от которой и зависит форма непрерывной части СПМ.

На рис. 5 приведены типичные результаты статистического моделирования для равномерно распределенных пауз между моментами появления импульсов. Условия моделирования выбраны следующими. ИСП состоял из импульсов длительностью в один отсчет. Интервалы времени между импульсами подчинялись равномерному распределению $R(-5,5)$. Зависимость $F_{XF}(\omega)$ получена по одной реализации. Среднее число импульсов N_{cp} в реализации определено как t_{ucn}/Z , где t_{ucn} – средняя длительность реализации ИСП, равнялась примерно 500. Из рисунка видно, что непрерывная часть спектра, определенная через выборочную ХФ, достаточно хорошо соответствует теоретической непрерывной части спектра. Относительное СКО для $\hat{F}_{XF}(\omega)$ соответствует зависимости 1, приведенной на рис. 4. Оценка СПМ, полученная по одной реализации процесса с использованием алгоритма БПФ, несостоятельна. Она имеет характер, соответствующий приведенному на рис. 3.

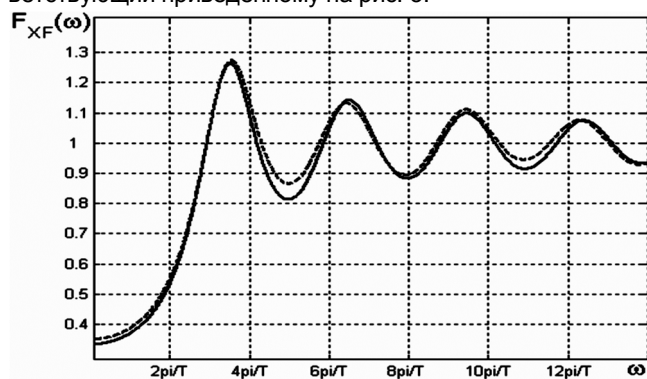


Рис. 5. Непрерывная часть СПМ апериодической импульсной последовательности, состоящей из импульсов со случайными временем появления и амплитудой, и ее оценка (пунктирная линия)

Кроме рассмотренных ИСП, выборочные ХФ использованы и для оценки СПМ сигналов с широтно-импульсной модуляцией и процесса на выходе идеального ограничителя для случая, когда длительности пауз и импульсов подчиняются нормальному распределению [1]. Полученные результаты по оценке СПМ с помощью выборочных ХФ, полученных по одной реализации процесса, аналогичны результатам, приведенным выше.

Заключение

Использование выборочных ХФ позволяет существенно уменьшить дисперсию оценки СПМ импульсных последовательностей. Поскольку оценка квадрата модуля состоятельна, то и оценка СПМ, выражаемая через эти функции, будет состоятельной. Для практического использования предлагаемого метода оценки СПМ импульсных последовательностей необходимы априорные сведения о процессе, СПМ которого необходимо определить. Поэтому прослеживается аналогия между классическим параметрическим спектральным оцениванием [6] и предлагаемым методом – в обоих случаях для получения достоверных результатов о спектральном составе данных наблюдений необходима разработка модели сигнала во временной области. Действительно, зная модель ИСП во временной области, всегда можно определить СПМ процесса, оценивая такие его параметры, как среднее время появления импульсов, отклонение моментов появления импульсов от их среднего значения, отклонения амплитуды импульсов от их среднего значения и, самое главное, ХФ тех или иных параметров ИСП.

Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974, – 552 с.
2. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательности событий. – М.: Мир, 1969, – 312 с.
3. Коновалов Г.В., Тарасенко Е.М. Импульсные случайные процессы в электросвязи. – М.: Связь, 1973, – 304 с.
4. Паршин В.С. Статистические характеристики оценки спектра последовательности импульсов, модулированных по положению // Вестник РГРТА. – Рязань, 2005. – Вып. 16. – С. 61-65.
5. Паршин В.С., Лавров А.М. Влияние коррелированности амплитуды и времени появления импульсов на форму спектра мощности импульсной последовательности // Научная сессия, посвященная Дню радио. Труды Российского НТО радиотехники, электроники и связи им А.С. Попова: тез. докл. конф. – М., 2006. – Вып. 61. – Т.1. – С. 107-109.
6. Марпл С.П.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. / Пер. с англ. под ред. О.И. Хабарова и Г.А. Сидоровой. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
7. Вешкурцев Ю.М. Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов. – М.: Радио и связь, 2003, – 201 с.
8. Паршин В.С. Оценивание характеристических функций параметров импульсных случайных процессов // Изв. высш. учебн. заведений. Радиоэлектроника – 1989. – Т.32. – №3. – С. 54-55.