

БАНКИ ФИЛЬТРОВ В СИСТЕМАХ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Витязев В.В., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: vityazev.v.v@rsreu.ru.

FILTER BANKS FOR BROADBAND DATA TRANSMISSION SYSTEMS

Vityazev V.V.

Problem of constructing filter banks for high speed broadband data transmission systems is considered. The problem is mentioned to be very actual. Comparative analysis of filter banks efficiency is conducted depending on the required computational costs, data memory size and insertion delay. The best result is achieved when the multistage pyramidal form of filter banks construction is used. Multistage pyramidal form allows to reduce computational costs in three times compared to forward form and time compared to fast convolution.

Key words: broadband data transmission, filter banks, frequency selection, subband processing, comb filtering, multistage structure.

Ключевые слова: широкополосная передача данных, банки фильтров, частотная селекция, субполосная обработка, гребенчатая фильтрация, многоступенчатая.

Введение

Одним из эффективных инструментов построения систем широкополосной передачи данных является набор (банк) цифровых полосовых фильтров (ЦПФ), равномерно перекрывающих заданный диапазон рабочих частот [1-3]. На рис. 1 представлена общая структурная схема системы анализа/синтеза широкополосного сигнала с использованием промежуточной субполосной обработки.

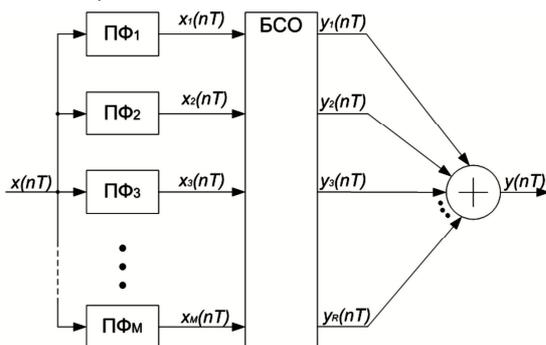


Рис. 1. Общая структурная схема системы анализа/синтеза широкополосного сигнала с использованием промежуточной субполосной обработки

С помощью банка ЦПФ на этапе анализа принимаемый сигнал $x(nT)$ «расщепляется» на M субполосных составляющих (компонент) $x(nT_i)$, $i = \overline{1, M}$, каждая из которых подвергается некоторой дополнительной обработке в блоке субполосной обработки (БСО), с целью «очистки» от шума и последующего формирования выходного сигнала $y(nT)$ на этапе синтеза. Заметим, что формирование сигнала $y(nT)$ на этапе син-

Рассматривается задача построения банка (набора) цифровых полосовых фильтров с заданными свойствами частотной избирательности для систем высокоскоростной широкополосной передачи данных. Отмечается актуальность решения поставленной задачи. Проводится сравнительный анализ эффективности реализации банка фильтров с позиции требуемых вычислительных затрат, емкости памяти данных и вносимой задержки. Показано, что наилучшее решение задачи построения банка фильтров, по совокупности критериев и в первую очередь критерию вычислительных затрат, дает многоступенчатая пирамидальная форма реализации. При соизмеримых затратах на память данных и задержку по отношению к прямой форме многоступенчатая пирамидальная реализация позволила уменьшить приведенные вычислительные затраты почти на три порядка и на порядок по отношению к быстрой свертке.

теза в этом случае (без децимации и интерполяции) сводится к простому суммированию очищенных субполосных компонент $y_i(nT)$, $i = \overline{1, R}$, $R \leq M$. Предполагается, что субполосная обработка каждой i -ой компоненты $x(nT_i)$ проводится в своей полосе частот, без понижения и последующего повышения частоты дискретизации. Это, очевидно, накладывает определенные трудности с позиции приведенных временных затрат, но снижает проблему шумов децимации на этапе анализа и погрешностей интерполяции на этапе синтеза.

Примером эффективной реализации подобного способа построения системы широкополосной передачи данных является блок защиты от узкополосных помех с априорно неизвестной структурой [4]. В этом случае задача субполосной обработки значительно упрощается и связана только с оценкой мощности каждой i -ой компоненты и принятием решения: уровень мощности i -ой компоненты лежит ниже установленного порога (нет помехи) или выше порога (есть помеха). На выход блока БСО и последующее суммирование проходят только компоненты $y_i(nT)$, $i = \overline{1, R}$, которые не поражены мощной узкополосной помехой!

Другим примером эффективного использования циф-ровой системы анализа-синтеза сигналов является построение субполосного адаптивного фильтра по структуре, представленной на рис. 2, отличающейся реализацией режима обучения по каждой частотной компоненте на высокой частоте дискретизации входного сигнала.

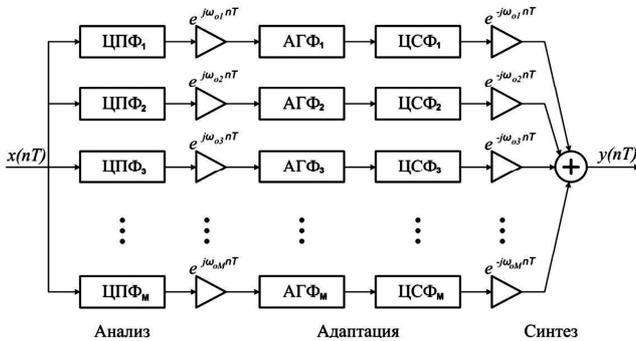


Рис. 2. Адаптивный субполосный фильтр

Сохранение высокой частоты дискретизации сигналов на выходе ЦПФ, а следовательно, числа итераций в единицу времени, ускоряет процесс обучения (по отношению к субполосным фильтрам-демодуляторам с понижением частоты дискретизации выходного сигнала). Однако это может привести к значительному увеличению общих вычислительных затрат. С целью минимизации требуемых вычислительных затрат предлагается для каждой частотной компоненты использовать адаптивный гребенчатый фильтр (АГФ) и последовательно соединенный с ним цифровой сглаживающий фильтр (ЦСФ), интерполирующий прореженные отсчеты импульсной характеристики АГФ.

Примером использования подсистемы синтеза сигналов, дуальной подсистеме анализа (рис.1), является устройство уплотнения с частотным разделением каналов (ЧРК), совмещающее операции фильтрации («очистки» от шума) и модуляции каждой частотной компоненты группового сигнала (рис. 3).

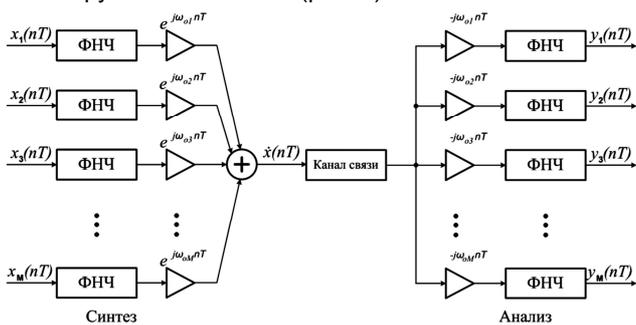


Рис. 3. Устройство уплотнения с частотным разделением каналов

Предполагается, что каждый пространственно разнесенный сигнал $\dot{x}_i(nT)$, $i = \overline{0, M-1}$, поступающий на вход устройства уплотнения, содержит помимо полезной составляющей широкополосный шум, включая шум АЦП на выходе каждого из датчиков системы сбора и передачи данных. С целью значительного упрощения реализации устройства предварительной аналоговой обработки АЦП, частота дискретизации сигналов с выходов датчиков информации принимает предельно мак-

симальное значение, определяемое минимально допустимой частотой дискретизации группового сигнала $\dot{x}(nT)$ с ЧРК. Это накладывает особые требования на реализацию в реальном времени цифрового устройства уплотнения каналов, совмещающего операции низкочастотной фильтрации (ФНЧ) и модуляции по каждому частотному каналу на частоте дискретизации широкополосного выходного сигнала $\dot{x}(nT)$.

Постановка задачи

Рассматривается задача построения в классе КИХ-цепей системы цифровой частотной селекции сигналов, разделяющей спектр входного, в общем случае комплексного, сигнала $\dot{x}(nT)$ на M частотных компонент. Пусть спектр $X(j\omega)$ входного сигнала $\dot{x}(nT)$ содержит в области частот $0 \leq \omega \leq 2\pi$ M компонент с равноразнесенными центральными частотами $\omega_{0i} = i2\pi / M$, $i = \overline{0, M-1}$. Для разделения входного сигнала на M компонент $\dot{x}_i(nT)$, $i = \overline{0, M-1}$, необходимо воспользоваться набором из M цифровых полосовых фильтров (ЦПФ) со следующими параметрами частотной избирательности относительно центральной частоты ω_{0i} , $i = \overline{0, M-1}$: показатель прямоугольности АЧХ $\alpha = \omega_{c1} / (\omega_{c2} - \omega_{c1})$; показатель узкополосности фильтра $\beta = 2\pi / \omega_{c1}$; логарифмический показатель частотной избирательности $L(\varepsilon_{1don}, \varepsilon_{2don}) = -2/3 \lg(10\varepsilon_{1don}, \varepsilon_{2don})$, где ω_{c1}, ω_{c2} – частоты среза полосы пропускания и зоны непрозрачности соответственно; $\varepsilon_{1don}, \varepsilon_{2don}$ – допустимая неравномерность АЧХ в полосе пропускания и гарантированное затухание (допустимый уровень боковых лепестков) в зоне непрозрачности фильтра.

Предполагается, что в отличие от задачи построения банка цифровых фильтров-демодуляторов (ЦФДМ) частотные компоненты $\dot{x}_i(nT)$, $i = \overline{0, M-1}$, полностью сохраняют как свою структуру в области центральных частот ω_{0i} , так и частоту дискретизации входного анализируемого сигнала $\dot{x}(nT)$. Это в значительной степени упрощает последующее формирование группового сигнала на этапе синтеза и не вносит никаких дополнительных искажений, связанных с децимацией и интерполяцией в системах анализа-синтеза с понижением и повышением частоты дискретизации.

Поскольку решается задача построения набора из M однотипных ЦПФ, затраты на реализацию всей системы будут расти с ростом числа каналов M по квадратичной зависимости, если не предпринимать никаких дополнительных мер, связанных с возможностью понижения частоты дискретизации сигнала на выходе каждого фильтра. Квадратичный рост приведенных вычислительных затрат связан с тем, что при увеличении числа частотных каналов M пропорционально увеличиваются порядки ЦПФ, а суммарные затраты определяются произведением числа фильтров на их порядок.



Значительное уменьшение приведенных вычислительных затрат на реализацию набора ЦПФ может быть достигнуто с использованием процедуры децимации импульсной характеристики полосовых фильтров, т.е. на основе цифровых гребенчатых фильтров (ЦГФ), эффективно применяемых при реализации набора ЦФДМ в качестве блока предварительной обработки. Однако прямая параллельная форма реализации набора ЦПФ является не единственной и далеко не самой производительной, так как не принимает во внимание некоторую «избыточность» однотипных операций, используемых в каждом отдельном частотном канале. В частности, как было показано ранее [4, 5], с помощью одного ЦГФ можно реализовать заданную высокую прямоугольность АЧХ одновременно для всех групп частотных каналов с четными и нечетными номерами. Это в значительной степени облегчает последующую процедуру разделения частотных каналов.

Все множество подходов к решению задачи построения системы цифровой частотной селекции сигналов как банка (набора) ЦПФ с заданными свойствами частотной избирательности, можно разделить на два класса: методы синтеза во временной и методы синтеза в частотной области. При синтезе во временной области каждый ЦПФ_{*i*}, $i = 0, M - 1$, реализуется как обычный полосовой или НЧ фильтр с импульсной характеристикой $h_i(nT)$, обеспечивая воспроизведение заданной функции передачи $H_i(\omega)$ с заданной частотной избирательностью и центральной частотой полосы пропускания. При синтезе в частотной области разделению частотных каналов предшествует операция перехода из временной области в частотную с помощью ДПФ, как правило, реализуемому по алгоритму БПФ [4].

Методы синтеза структуры банка ЦПФ без предварительного преобразования Прямая форма линейной свертки

При синтезе во временной области методом линейной свертки входной последовательности и импульсных характеристик набора ЦПФ все затраты, как вычислительные (число операций умножения-накопления) в единицу времени R_T , так и ячеек памяти данных и коэффициентов определяются произведением числа фильтров (частотных каналов) M на их порядок N и удваиваются для комплексного входного сигнала $\dot{x}(nT)$. Вместе с тем, емкость памяти данных S не зависит от числа каналов M и определяется только порядком фильтров, так как все полосовые фильтры используют один и тот же входной сигнал:

$$R_T = 2MNf_{кв}; \quad S = 2N. \quad (1)$$

Это является главным достоинством прямой формы реализации набора фильтров.

Порядок N каждого полосового КИХ-фильтра, как показано в [4, 20], можно оценить через произведение трех основных параметров частотной избирательности $N = \alpha\beta L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон})$.

При этом в случае, если АЧХ соседних частотных каналов перекрываются только в переходной зоне и,

соответственно, центральные частоты полосы пропускания принимают все значения, кратные шагу $2\pi/M$, показатель узкополосности β связан с числом фильтров M соотношением

$$\beta = \frac{(2\alpha + 1)}{\alpha} M. \quad (3)$$

Подставив в (1) выражение (2), с учетом (3), получим:

$$R_T = 2(2\alpha + 1)L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон})M^2 f_{кв}; \quad (4)$$

$$S = 2(2\alpha + 1)L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон})M.$$

Реализация банка ЦПФ в классе КИХ-цепей вносит постоянную задержку, определяемую половиной длины импульсной характеристики фильтров, и составляет

$$\tau = \frac{(2\alpha + 1)}{2} L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон}) \frac{M}{f_{кв}}. \quad (5)$$

С целью иллюстрации эффективности различных методов построения банка ЦПФ рассмотрим частный пример: проектируется 64-канальная система фильтров с коэффициентом прямоугольности АЧХ фильтров $\alpha = 10$ и допустимыми значениями отклонений от желаемой частотной характеристики $\varepsilon_{1дон} = 10^{-2}$ и $\varepsilon_{2дон} = 10^{-3}$. Частота дискретизации входного комплексного сигнала $f_{кв} = 10 \text{ кГц}$. Подставив в выражения (4) и (5) принятые исходные данные, получим:

$$R_T = 4593 \times 10^6 \text{ умн./с}; \quad S = 7178 \text{ ячеек}; \quad \tau = 179,4 \text{ мс.}$$

Быстрая свертка

При синтезе в частотной области по алгоритму быстрой свертки с использованием блочной обработки и двойного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) последовательность входных данных $\dot{x}(nT)$ разбивается на блоки (секции) размерностью $L \geq 2N$. Над каждой секцией выполняется прямое ДПФ по алгоритму БПФ, перемножение дискретных Фурье образов сигнала и импульсной характеристики каждого полосового фильтра и обратное ДПФ по выходу каждого частотного канала. При этом из L выходных отсчетов на выходе полосовых фильтров сохраняются в памяти только $L - N$ отсчетов. Для исключения пропусков используется механизм перекрытия соседних секций, что вносит дополнительные издержки [6]. Вместе с тем, как известно, данный алгоритм позволяет многократно уменьшить приведенные вычислительные затраты ценой значительного увеличения памяти данных для перехода к блочной обработке (буферная память входных данных емкостью не менее $4N$ ячеек и выходных данных по каждому частотному каналу общей емкостью не менее $2NM$ ячеек) и дополнительной задержки.

С целью уменьшения дополнительных затрат памяти данных и задержки размерность секции принимают равной $L = 2N$. При этом общие затраты на реализацию банка из M полосовых фильтров по алгоритму быстрой свертки принимают значения:

$$R_T = (8M \log_2 2N) f_{кв}; \quad S = 2(M + 4)N; \quad \tau = 2,5N \frac{1}{f_{кв}},$$

или с учетом (2) и (3):

$$R_T = 8M \{ \log_2 [2(2\alpha + 1)L(\varepsilon_{1дон}, \varepsilon_{2дон})M] \} f_{кв}; \quad (6)$$

$$S = 2(2\alpha + 1)L(\varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}})M(M + 4); \tag{7}$$

$$\tau = 2,5(2\alpha + 1)L(\varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}}) \frac{M}{f_{кв}}. \tag{8}$$

Подставив в выражения (6) – (8) принятые в примере исходные данные, получим:

$$R_T = 66,6 \times 10^6 \text{ умн./с}; S = 488033 \text{ ячеек}; \tau = 897 \text{ мс}.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере переход к обработке в частотной области по алгоритму быстрой свертки позволяет уменьшить приведенные вычислительные затраты в 69 раз, ценой увеличения емкости памяти данных в 68 раз (если требуется буферизация выходных данных по каждому частотному каналу) и увеличением задержки в 5 раз. Следовательно, необходимо искать новые пути решения задачи уменьшения приведенных вычислительных затрат, оставаясь во временной области.

Методы синтеза структуры банка ЦФФ с предварительным преобразованием
Метод двухступенчатого преобразования с применением ЦГФ и прямой формы реализации набора полосовых сглаживающих фильтров

Одним из эффективных способов построения набора ЦФФ (наряду с методами цифровой децимации сигналов), как было показано в [4, 5], является альтернативный подход, который базируется на децимации импульсной характеристики. При построении набора фильтров каждая из полос выделяется своим цифровым сглаживающим фильтром (ЦСФ), интерполирующим прореженную импульсную характеристику входного ЦГФ с учетом заданной полосы частот каждого канала. Использование одного ЦГФ обеспечивает формирование заданной высокой прямоугольности АЧХ одновременно для всего множества частотных каналов и тем самым многократно «окупает» затраты на его реализацию по отношению к набору ЦСФ.

На рис. 4, а показан вариант построения двухступенчатой структуры 8-канального набора ЦФФ с применением гребенчатого фильтра предварительной частотной селекции каналов с номерами 0, 4, 8, 12, ..., 28. Для выделения указанной группы каналов используется ЦГФ N_1 -го порядка с функцией передачи $H_1(j\omega)$. Последующее разделение сигналов внутри группы выполняется набором полосовых «сглаживающих» фильтров относительно малого порядка N_2 с функциями передачи $H_{2i}(j\omega)$, $i = \overline{0,7}$. Поскольку с помощью структуры набора фильтров, представленной на рис. 4, а, разделяются только восемь из 32 каналов, необходимо последовательное (или параллельное с помощью четырех однотипных подсистем) четырехкратное повторение операций преобразования множества входных сигналов

$$\dot{x}_i(nT) = \dot{x}(nT)e^{j\frac{2\pi}{M}l}, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (M = 32).$$

В общем случае если число частотных каналов равно M , а коэффициент прореживания ЦГФ равен ν , то число повторений преобразования по структуре на рис. 4, а определяется отношением M/ν . При этом суммарные вычислительные затраты в единицу време-

ни R_T , затраты памяти данных S и задержка τ на реализацию M -канальной системы фильтров составят:

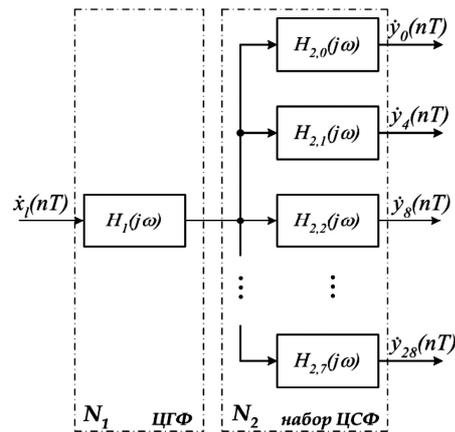
$$\begin{cases} R_T = \frac{2M}{\nu} \left(\frac{N_1}{\nu} + 2\nu N_2 \right) f_{кв}; \\ S = \frac{2M}{\nu} (N_1 + N_2); \\ \tau = \frac{(N_1 + N_2)}{2f_{кв}}. \end{cases} \tag{9}$$

Выражение (9) указывает на прямую зависимость вычислительных затрат и затрат памяти данных от коэффициента прореживания ν . С увеличением коэффициента прореживания ν уменьшаются затраты на реализацию ЦГФ, но увеличиваются затраты на реализацию набора ЦСФ, так как порядок сглаживающих фильтров принимает значение [4]

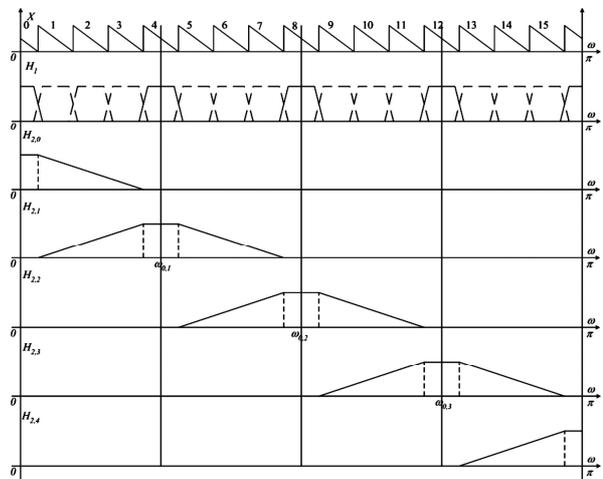
$$N_2 = \frac{\nu\beta}{\beta - 2\nu} L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right), \tag{10}$$

фактически пропорционально нарастающее (при $\beta \gg \nu$) с ростом ν . Порядок гребенчатого фильтра однозначно определяется заданной совокупностью параметров частотной избирательности ($\alpha, \beta, \varepsilon_{1\text{дон}}, \varepsilon_{2\text{дон}}$) проектируемой системы фильтров

$$N_1 = \alpha\beta L(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2). \tag{11}$$

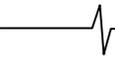


а) структурная схема набора фильтров



б) частотные характеристики каналов преобразования

Рис. 4. Метод двухступенчатого преобразования с использованием прореживания по частоте



Показатель узкополосности β в выражение (11) связан с числом каналов M системы частотной селекции сигналов прямо пропорциональной зависимостью (3).

Подставив выражения (10) и (11) в (9) с учетом (3), получим

$$\left\{ \begin{aligned} R_T &= 2(2\alpha + 1)M^2 \left[\frac{1}{v^2} + \frac{2v}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} \right] \times \\ &\times L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right) f_{кв}; \\ S &= 2(2\alpha + 1)M^2 \left[\frac{1}{v} + \frac{1}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} \right] L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right); \\ \tau &= \frac{(2\alpha + 1)M}{2f_{кв}} \left[1 + \frac{v}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} \right] L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right). \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Оптимальное значение коэффициента прореживания v_{1opt} , минимизирующее вычислительные затраты R_T , может быть найдено из решения кубического уравнения вида

$$v^3 - \frac{4\alpha^2}{(2\alpha + 1)M} v^2 + 4\alpha v - (2\alpha + 1)M = 0 \quad (13)$$

с помощью метода Кардано или непосредственно по целевой функции $R_T(v)$ (12) с использованием численных методов поиска экстремума. Последний способ является более предпочтительным, так как на параметр v наложены дополнительные ограничения: целочисленность и кратность числу каналов.

Подставив в выражение (12) принятые в примере исходные данные для оптимального целочисленного значения коэффициента прореживания $v_{1opt} = 8$, минимизирующего вычислительные затраты, получим:

$$R_T = 142,2 \times 10^6 \text{ умн./с}; S = 61716 \text{ ячеек}; \tau = 192 \text{ мс.}$$

Таким образом, переход к двухступенчатой структуре набора фильтров с применением предварительной групповой селекции сигналов позволил в рассматриваемом примере построения системы уменьшить объем вычислительных затрат приблизительно в 32 раза. В то же время на порядок увеличилась емкость памяти данных, что вызвано «расщеплением» входного сигнала $\dot{x}(nT)$ на множество сигналов $\dot{x}_l(nT)$, $l = \overline{0,7}$, после предварительной многократной трансформации его спектра. Каждый гребенчатый фильтр и последующий набор сглаживающих фильтров работают на свой групповой сигнал $\dot{x}_l(nT)$, и чем больше число групповых сигналов, т.е. чем меньше коэффициент прореживания v , тем больше затраты памяти данных. Поэтому с позиции минимизации емкости памяти данных желательно выбирать максимально допустимое значение коэффициента прореживания v , что одновременно минимизирует вычислительные затраты на реализацию гребенчатых фильтров. Однако с увеличением коэффициента прореживания v пропорционально увеличиваются затраты на реализацию сглаживающих фильтров. Для уменьшения затрат на реализацию набора узкополосных ЦСФ целесообразно построение каждого из них по аналогичной двухступенчатой структуре, а всей систе-

мы фильтров по трехступенчатой структуре. Но, прежде чем перейти к трехступенчатой реализации, оценим возможности эффективного сочетания алгоритмов предварительной гребенчатой фильтрации и быстрой свертки в рамках двухступенчатой реализации.

Метод двухступенчатого преобразования с применением ЦГФ и алгоритма быстрой свертки для реализации набора полосовых сглаживающих фильтров

Метод двухступенчатого преобразования с применением алгоритма быстрой свертки для реализации набора полосовых ЦСФ отличается от выше рассмотренного метода только тем, что вторая, наиболее затратная, ступень использует алгоритм БПФ для перехода в частотную область и обратно по каждому каналу, заменяя операцию свертки временных последовательностей на простое перемножение их дискретных Фурье-образов.

В общем случае, если число частотных каналов равно M , а коэффициент прореживания импульсной характеристики ЦГФ равен v , то число повторений преобразования по структуре на рис. 4, а определяется отношением M/v . При этом суммарные вычислительные затраты в единицу времени R_T и затраты памяти данных S на реализацию M -канальной системы фильтров составят:

$$R_T = \frac{2M}{v} \left\{ \frac{N_1}{v} + 4v [\log_2(2N_2 + 1)] \right\} f_{кв}; \quad (14)$$

$$S = \frac{2M}{v} (N_1 + 8N_2 + 2N_2v). \quad (15)$$

Переход к блочной обработке на второй ступени преобразований вносит дополнительную задержку, связанную с буферизацией входных и выходных данных:

$$\tau = (N_1 + 5N_2) \frac{1}{2f_{кв}}. \quad (16)$$

Подставив выражения (10) и (11) в (14)-(16) с учетом (3), получим

$$\left\{ \begin{aligned} R_T &= \frac{2M}{v} \left\{ \frac{2\alpha + 1}{v} ML\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right) + \right. \\ &+ 4v \left[\log_2 \left(\frac{2vM(2\alpha + 1)}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right) \right) + 1 \right] \left. \right\} f_{кв}; \\ S &= 2(2\alpha + 1)M^2 \left[\frac{1}{v} + \frac{1}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} \right] L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right); \\ \tau &= \frac{(2\alpha + 1)M}{2f_{кв}} \left[1 + \frac{v}{(2\alpha + 1)M - 2\alpha v} \right] L\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \varepsilon_2\right). \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Подставив в выражение (17) принятые в примере исходные данные для оптимального целочисленного значения коэффициента прореживания $v_{1opt} = 32$, минимизирующего вычислительные затраты, получим:

$$R_T = 45,8 \times 10^6 \text{ умн./с}; S = 65924 \text{ ячеек}; \tau = 237 \text{ мс.}$$

Таким образом, переход к двухступенчатой структуре набора фильтров с применением предварительной групповой селекции сигналов и алгоритма быстрой свертки на второй ступени преобразований позволил в рассмат-

риваемом примере построения системы уменьшить объем вычислительных затрат приблизительно в 3 раза при незначительном увеличении памяти данных и задержки по отношению к предыдущей схеме. Отметим, что многократное уменьшение требуемой памяти данных и задержки по отношению к обычной реализации алгоритма быстрой свертки по каждому частотному каналу обусловлено значительным уменьшением порядка ЦСФ N_2 по сравнению с порядком N набора ЦФФ.

Метод трехступенчатого преобразования с применением ЦГФ и прямой формы реализации набора полосовых сглаживающих фильтров

На рис. 5, а представлен вариант построения трехступенчатой структуры набора ЦФФ с заданными свойствами частотной избирательности. Предполагается, что набор полосовых сглаживающих фильтров (рис. 4) реализуется по двухступенчатой структуре с использованием дополнительного набора гребенчатых фильтров с функциями передачи $H_{2k}(j\omega)$, $k = \overline{0,3}$ и последующего набора ЦСФ с функциями передачи $H_{3i}(j\omega)$, $i = \overline{0,1}$. Рис. 5, б иллюстрирует процесс формирования функции передачи набора ЦФФ по нулевому (низкочастотному) каналу путем перемножения функций передачи последовательно включенных ЦГФ и ЦСФ: $H_0(j\omega) = H_{1,0}H_{2,0}H_{3,0}(j\omega)$. Аналогичным образом формируются функции передачи по всем частотным каналам. Например, для 8-го частотного канала функция передачи принимает вид: $H_8(j\omega) = H_{1,0}H_{2,2}H_{3,0}(j\omega)$.

В общем случае, если число частотных каналов равно M , а коэффициенты прореживания импульсной характеристики ЦГФ первой и второй ступеней преобразования принимают значения v_1 и v_2 , то число повторений преобразования по структуре на рис. 5,а на первой ступени определяется отношением M/v_1 , а на второй ступени – отношением M_2/v_2 , где $M_2 = v_1$ – число ЦГФ второй ступени преобразований. При этом суммарные вычислительные затраты в единицу времени R_T , затраты памяти данных S и задержка τ на реализацию M -канальной системы фильтров составят:

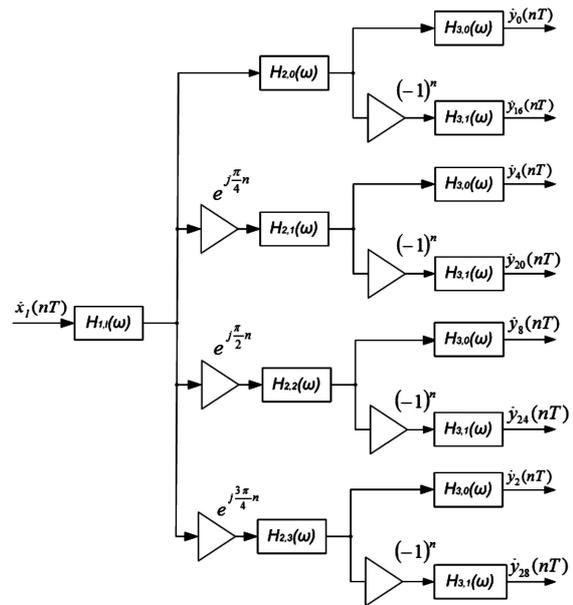
$$\begin{cases} R_T = \frac{2M}{v_1} \left[\frac{N_1}{v_1} + \frac{2v_1}{v_2} \left(\frac{N_2}{v_2} + v_2 N_3 \right) \right] f_{кв}; \\ S = \frac{2M}{v_1} \left[N_1 + \frac{2v_1}{v_2} (N_2 + v_2 N_3) \right]; \\ \tau = \frac{(N_1 + N_2 + N_3)}{2f_{кв}}. \end{cases} \quad (18)$$

Выражение (18) указывает на прямую зависимость вычислительных затрат и затрат памяти данных от коэффициентов прореживания v_1 и v_2 . С увеличением коэффициента прореживания v_1 уменьшаются затраты на реализацию ЦГФ первой ступени преобразований, но увеличиваются затраты на реализацию ЦГФ второй ступени и набора ЦСФ третьей ступени преобразований, так как порядок ЦГФ второй ступени принимает значение [4]:

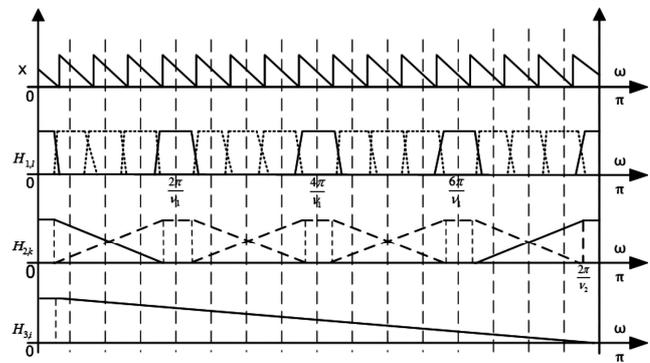
$$N_2 = \frac{v_1 \beta}{\beta - 2v_1} L \left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2 \right), \quad (19)$$

фактически пропорционально нарастающее с ростом v_1 . В тоже время с увеличением коэффициента прореживания v_2 уменьшаются затраты на реализацию ЦГФ второй ступени преобразований, но пропорционально увеличиваются затраты на реализацию набора ЦСФ, так как их порядок принимает значение:

$$N_3 = \frac{v_2 \beta}{\beta - 2v_2} L \left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2 \right). \quad (20)$$



а) структурная схема набора фильтров



б) частотные характеристики каналов преобразования

Рис. 5. Метод трехступенчатого преобразования с использованием прореживания по частоте

Порядок гребенчатых фильтров первой ступени преобразований, как и ранее, однозначно определяется заданной совокупностью параметров частотной избирательности $(\alpha, \beta, \varepsilon_{1don}, \varepsilon_{2don})$ проектируемой системы фильтров

$$N_1 = \alpha \beta L \left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2 \right). \quad (21)$$

Показатель узкополосности β в выражениях (19)–(21) связан с числом каналов M системы частотной селекции сигналов прямо пропорциональной зависимостью (3).

Подставив выражения (19)–(21) в (18) с учетом (3), получим

$$\begin{cases}
 R_T = \frac{2(2\alpha+1)M^2}{v_1} \left\{ \frac{1}{v_1} + \frac{2v_1}{v_2} \times \right. \\
 \times \left[\frac{v_1}{((2\alpha+1)M - 2\alpha v_1)v_2} + \right. \\
 \left. \left. + \frac{v_2^2}{(2\alpha+1)M - 2\alpha v_2} \right] \right\} L\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2\right) f_{кв}; \\
 S = \frac{2(2\alpha+1)M^2}{v_1} \left\{ 1 + \frac{2v_1}{v_2} \left[\frac{v_1}{(2\alpha+1)M - 2\alpha v_1} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{v_2^2}{(2\alpha+1)M - 2\alpha v_2} \right] \right\} L\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2\right); \\
 \tau = \frac{(2\alpha+1)M}{2f_{кв}} \left[1 + \frac{v_1}{(2\alpha+1)M - 2\alpha v_1} + \right. \\
 \left. + \frac{v_2}{(2\alpha+1)M - 2\alpha v_2} \right] L\left(\frac{\varepsilon_1}{3}, \varepsilon_2\right).
 \end{cases} \quad (22)$$

Подставив в выражение (22) принятые в примере исходные данные для оптимального сочетания целочисленных значений коэффициентов прореживания $v_{1opt} = 16$ и $v_{2opt} = 4$, минимизирующих вычислительные затраты, получим:

$$R_T = 63 \times 10^6 \text{ умн./с}; S = 39533 \text{ ячеек}; \tau = 200 \text{ мс.}$$

Таким образом, переход от двух- к трехступенчатой структуре набора ЦФФ позволил дополнительно уменьшить в 2 раза объем приведенных вычислительных затрат и в 1,5 раза емкость памяти данных при незначительном увеличении задержки.

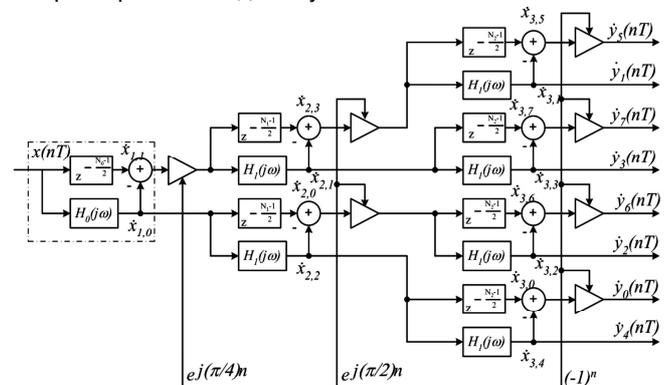
Многоступенчатая пирамидальная форма набора ЦФФ

Приняв за основу идею многоступенчатой реализации, перейдем к синтезу пирамидальной структуры набора фильтров частотной селекции с равноразнесенными центральными частотами. Для пояснения принципа работы предложенной в [7] структуры набора фильтров на рис.6,а представлена схема, реализующая восьмиканальную систему, а на рис. 6,б показаны преобразования спектра сигнала $\dot{x}(nT)$ при выделении четвертого канального сигнала $\dot{y}_4(nT)$ согласно принятой нумерации частотных каналов.

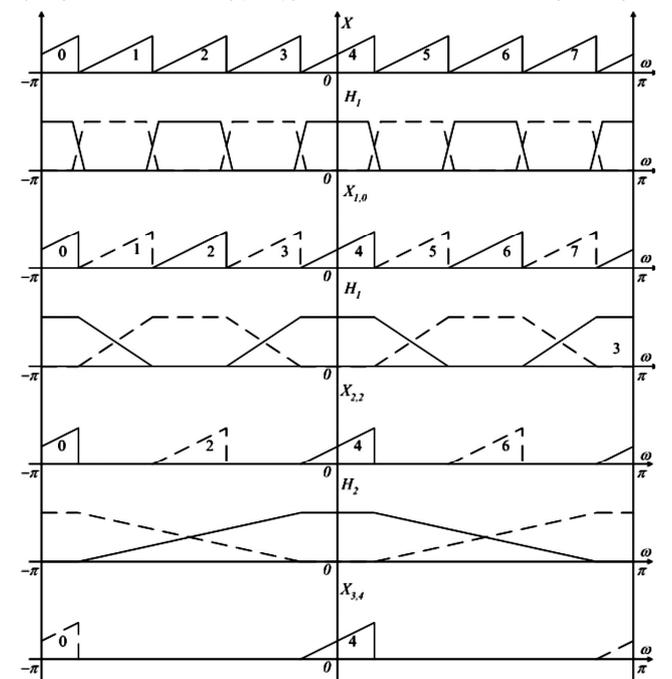
Цифровая восьмиканальная система частотной селекции сигналов, синтезируемая по пирамидальной структуре (см. рис. 6,а), состоит из трех каскадов фильтров, содержащих в общей сложности семь полуполосных ЦФФ. В первом каскаде входной сигнал $\dot{x}(nT)$ «расщепляется» на две последовательности данных: сигнал $\dot{x}_{1,0}(nT)$, содержащий нечетные составляющие, и сигнал $\dot{x}_{1,1}(nT)$, содержащий четные составляющие спектра входного сигнала. При этом необходим только один полуполосный ЦФФ с функцией передачи $H_0(j\omega)$, непосредственно выделяющий сигнал $\dot{x}_{1,0}(nT)$, а для селекции сигнала $\dot{x}_{1,1}(nT)$ достаточно воспользоваться

свойством антисимметричности АЧХ используемого полуполосного ЦФФ, а полученные на его выходе данные $\dot{x}_{1,0}(nT)$ вычесть из задержанной на $(N_0 - 1)/2$ отсчетов (N_0 — порядок фильтра) последовательности входных данных $\dot{x}(nT)$ согласно структуре, выделенной на рис. 6, а штрихпунктирной линией.

Заметим, что спектральная структура сигнала $\dot{x}_{1,1}(nT)$ отличается от структуры сигнала $\dot{x}_{1,0}(nT)$ сдвигом по частоте информативных (отличных от нуля) спектральных составляющих на величину $\Omega = \pi/4$. Для идентичности последующей обработки сигналов $\dot{x}_{1,0}(nT)$ и $\dot{x}_{1,1}(nT)$ спектр последнего трансформируется в низкочастотную область путем умножения на функцию $e^{+i\frac{\pi}{4}n}$. Аналогичную процедуру «расщепления» сигналов $\dot{x}_{1,0}(nT)$ и $\dot{x}_{1,1}(nT)$ на четные и нечетные спектральные составляющие выполняется на второй и последующей ступенях преобразования, с удвоением числа фильтров на каждой ступени.



а) пирамидальная структура 8-канальной системы фильтров



б) преобразования спектра входного сигнала при выделении четвертого канала

Рис. 6. Метод многоступенчатого преобразования с использованием прореживания по частоте

В результате на выходе рассматриваемой структуры получим группу сигналов $\dot{y}_i(nT) = \dot{x}_{2,i}(nT)$, $i = \overline{0,7}$, каждый из которых несет информацию о соответствующей спектральной составляющей входного сигнала $\dot{x}_{2,2}(nT)$, причем спектры сигналов $\dot{y}_i(nT) = \dot{x}_{2,i}(nT)$, $i = \overline{1,4}$, расположены в окрестности нулевой частоты, а спектры оставшихся сигналов – в окрестности частоты $\omega = \pi$. Для выделения комплексной огибающей $\dot{y}_i(nT)$, $i = \overline{0,5,6,7}$, последних используется простейшая трансформирующая функция $e^{+j\pi n}$, которая фактически представляет собой последовательность чисел +1 и -1.

При проектировании цифровой системы частотной селекции в общем случае на M каналов используется аналогичный принцип построения пирамидальной структуры: формирование в первом каскаде четных и нечетных каналов фильтрации с помощью входного полуполосного ЦГФ на два антисимметричных выхода и «прореживание» полученных спектральных составляющих от каскада к каскаду последующими полуполосными ЦГФ с пошаговым изменением их спектрального положения.

Оценим эффективность пирамидальной формы построения M -канальной системы фильтров с позиции требуемых вычислительных затрат в единицу времени $R_T(N, M)$. Вычислительные затраты на реализацию всей системы фильтров определяются затратами на квадратурную модуляцию и затратами на построение $M - 1$ полуполосных ЦГФ с двухканальными выходами. Оценку вычислительных затрат на квадратурную модуляцию запишем в виде

$$R_{TM}(M) = 2M \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{M} \right) f_{кв} \approx 4M f_{кв}.$$

Если учесть, что трансформирующие функции последнего и предпоследнего каскадов рассматриваемой структуры $e^{j\pi n}$ и $e^{j\frac{\pi}{2}n}$ представляют собой последовательности чисел $\{(-1)^n\}$ и соответственно $\{1 + j0; 0 + j1; -1 + j0; 0 - j1\}$, то фактические затраты на модуляцию составят $R_{TM} = M$.

При заданных значениях порядков N_i и коэффициентов прореживания v_i , $i = \overline{0, m-1}$, импульсной характеристики фильтров i -й ступени преобразования оценки вычислительных затрат (с учетом затрат на модуляцию) и емкости памяти данных на реализацию M -канальной системы (M равно степени двойки) по пирамидальной структуре представим в виде

$$\begin{cases} R_T = \left(M + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i \frac{N_i}{v_i} \right) f_{кв}; \\ S = 2 \sum_{i=0}^{m-1} 2^i N_i, \end{cases} \quad (23)$$

где $m = \log_2 M$.

При записи выражений (23) предполагалось, что удвоение вычислительных затрат на реализацию филь-

тров с комплексными входными сигналами компенсируется их уменьшением во столько же раз за счет дополнительной «прореженности» импульсной характеристики полуполосного ЦГФ.

Многоступенчатая обработка вносит дополнительную задержку на каждой ступени преобразования на половину длины импульсной характеристики полуполосных гребенчатых фильтров. Суммарная задержка принимает значение

$$\tau = \left(\sum_{i=0}^{m-1} N_i \right) \frac{1}{2f_{кв}}. \quad (24)$$

Пусть α , β , ε_{1don} , ε_{2don} – совокупность числовых параметров, определяющих требуемые свойства частотной избирательности канальных фильтров. Порядок N_0 входного ЦГФ найдем по введенному ранее выражению для оценки порядка КИХ-фильтра:

$$N_0 = \alpha \beta L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right), \quad (25)$$

где множитель $1/m$ отражает зависимость неравномерности АЧХ канального фильтра от числа ступеней преобразования (каскадов включения) m . Коэффициент прореживания v импульсной характеристики ЦГФ нулевой ступени преобразования принимает предельно максимальное значение $v_0 = M/2$, однозначно определяемое числом каналов M (рассматривается комплексный входной сигнал со спектральной структурой, представленной на рис. 6, б).

Оценку порядка N_i полуполосного ЦГФ i -й ступени преобразования в форме (25 с учетом выражения, связывающего показатель прямоугольности АЧХ α_i с коэффициентом прореживания импульсной характеристики v_{i-1} ЦГФ $(i-1)$ -й ступени [4]

$$\alpha_i = \frac{v_{i-1}}{\beta - 2v_{i-1}} = \frac{v_0}{2^{i-1}\beta - 2v_0},$$

запишем в виде

$$N_i = \alpha_i \beta L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right) = \frac{v_{i-1} \beta}{\beta - 2v_{i-1}} L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right), \quad (26)$$

где коэффициент прореживания импульсной характеристики $v_i = v_0 2^i$, $i = \overline{1, m-1}$.

Подставив (25) и (26) в выражения (23) и (24), с учетом равенств $v_0 = M/2$, $\beta = [(2\alpha + 1)/\alpha]M$ получим

$$\begin{cases} R_T(\alpha, M) = \{ M + 2(2\alpha + 1) \times \\ \times \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i \frac{1}{(2\alpha + 1) - 2^{-i}\alpha} \right] L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right) \} f_{кв}; \\ S(\alpha, M) = 2(2\alpha + 1)M \times \\ \times \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(2\alpha + 1) - 2^{-i}\alpha} \right] L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right); \\ \tau = (2\alpha + 1)M \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(2\alpha + 1) - 2^{-i}\alpha} \right] \frac{L \left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2 \right)}{f_{кв}}, \end{cases} \quad (27)$$

где $m = \log_2 M$; $L\left(\frac{\varepsilon_1}{m}, \varepsilon_2\right) = -\frac{2}{3} \lg \frac{10\varepsilon_1\varepsilon_2}{m}$ (для полуполосных ЦГФ обычно принимают $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $m=1$).

Выражения (27) позволяют оценить затраты на реализацию M -канальной пирамидальной структуры фильтров для заданных значений параметров частотной избирательности.

Для рассматриваемого контрольного примера суммарные затраты на реализацию составят

$$R_T = 6,54 \times 10^6 \text{ умн./с}; S = 11\,760 \text{ ячейки}; \tau = 246 \text{ мс.}$$

Таким образом, применение пирамидальной структуры позволяет многократно по отношению к трехкаскадной структуре (в рассмотренном примере в 10 раз) уменьшить требуемую скорость обработки при одновременном уменьшении в несколько раз емкости памяти данных и незначительном увеличении задержки.

Заключение

С целью наглядной иллюстрации эффективности реализации рассмотренных выше методов результаты проведенных расчетов сведены в табл. 1.

Таблица 1.

№ п/п	Метод реализации	R_T , умн./с	S , ячеек	τ , мс
1	Прямая форма	4593×10^6	7178	180
2	Быстрая свертка	$66,6 \times 10^6$	488033	897
3	Двухступенчатая прямая, $v_{opt} = 8$	$142,2 \times 10^6$	61716	192
4	Двухступенчатая быстрая, $v_{opt} = 32$	$45,8 \times 10^6$	65924	237
5	Двухступенчатая быстрая, $v = 8$	112×10^6	70640	199
6	Трехступенчатая прямая, $v_{1,opt} = 16$; $v_{2,opt} = 4$	63×10^6	39533	205
7	Многоступенчатая пирамидальная	$6,54 \times 10^6$	11760	246

Анализ представленных результатов расчета затрат на реализацию набора ЦПФ с заданными свойствами частотной избирательности позволяет сделать следующие выводы.

Прямая форма реализации без предварительных преобразований отличается минимальной емкостью памяти данных и минимальной задержкой. Это самая простая форма реализации в смысле алгоритма обработки входных данных и структурной схемы! Но и самая затратная с позиции вычислительных затрат (на два-три порядка по отношению к оптимальному решению). Приведенные вычислительные затраты нарастают пропорционально квадрату числа частотных каналов M .

Быстрая свертка предполагает, что каждый ЦПФ строится с использованием двойного быстрого преобразования Фурье (причем обратное преобразование выполняется отдельно по каждому частотному каналу), что позволяет почти на два порядка уменьшить вычислительные затраты, но переход к блочной обработке данных и вынужденное использование механизма буферизации приводят к многократному (на два порядка) увеличению емкости памяти данных и задержки (в пять раз).

Переход к двух- и трехступенчатой реализации набора ЦПФ с предварительной обработкой с использованием цифровых гребенчатых фильтров дает возможность (при оптимальных значениях коэффициентов прореживания их импульсных характеристик) уменьшить приведенные вычислительные затраты на два порядка по отношению к прямой форме реализации и уменьшить на порядок емкость памяти данных и в 3-5 раз задержку по отношению к быстрой свертке (не уступая по скорости обработки).

Наилучшее решение поставленной задачи по совокупности критериев, и в первую очередь вычислительных затрат, дает многоступенчатая пирамидальная форма реализации, впервые опубликованная в работе [7]. При соизмеримых затратах на память данных и задержку по отношению к прямой форме многоступенчатая пирамидальная реализация позволила уменьшить приведенные вычислительные затраты почти на три порядка и на порядок по отношению к быстрой свертке.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в Рязанском государственном радиотехническом университете (проект № 14-19-01263).

Литература

- Behrouz Farhang-Boroujeny. OFDM Versus Filter Bank Multicarrier // IEEE Signal Processing Magazine, - 2011, - Vol. 28, № 3, - P. 92-112.
- Lin L. and Farhang-Boroujeny B. Cosine modulated multitone modulation for very high-speed digital subscriber lines // EURASIP J. Appl. Signal Processing, - 2006, Article ID 19329.
- Витязев В.В., Овинников А.А. Методы анализа/синтеза сигналов в системах беспроводной связи со многими несущими // Электросвязь. 2013. № 9. – с. 28-32.
- Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. М.: Радио и связь, 1993. 240 с.
- Витязев В.В., Муравьев С.И., Степашкин А.И. Метод синтеза цифровых узкополосных КИХ-фильтров // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1981. – Т. 24, № 7. – С. 55-59.
- Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический курс: Пер. с англ. М.: Изд.дом «Вильямс», 2004. 992 с.
- Витязев В.В., Муравьев С.И. Синтез цифровой системы частотной селекции сигналов на основе полуполосных гребенчатых фильтров // Электросвязь. – 1988. - № 3. – С.57-61.