

УДК 621.372

## СИНТЕЗ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННЫМИ СЕЛЕКТИВНЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ

*Бугров В.Н., к.т.н., доцент Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского,  
e-mail: bug@rf.unn.ru.*

### INTEGER DESIGN OF IIR FILTERS WITH DIFFICULT SELECTIVE REQUIREMENTS

*Bugrov V.N.*

*The integer simulation and development infinite impulse response (IIR) filters taking into account the possibilities of their realization on digital integer platforms are considered. The problem statement and solution of multifunctional synthesis of digital filters such a problem on the basis of the numerical methods of integer nonlinear mathematical programming are given. As an several typical examples, the problem solution of synthesis of IIR-filters with difficult selective requirements has been given. The analysis of their characteristics is resulted.*

**Key words:** the integer IIR-filter, integer nonlinear programming, multifunctional synthesis, criterion function.

**Ключевые слова:** целочисленный рекурсивный фильтр, целочисленное нелинейное программирование, многофункциональный синтез, целевая функция.

#### Введение

Одним из наиболее востребованных алгоритмов цифровой обработки сигналов является, как известно, цифровая фильтрация. В современных цифровых системах доля цифровой фильтрации может составлять до половины общего объёма цифровых вычислений. Являясь устройствами частотной селекции входного сигнала, цифровые фильтры обычно разрабатываются на основе требований к их частотным характеристикам, таким как требуемые амплитудно-частотная (АЧХ), фазо-частотная характеристики (ФЧХ), требуемые характеристики групповой задержки. В настоящее время появляется множество прикладных задач с весьма сложными требованиями к амплитудной селекции полезного сигнала. Наиболее высокие возможности в удовлетворении таких сложных селективных требований имеют, как известно, рекурсивные цифровые фильтры (БИХ-фильтры). Однако классические методы проектирования рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу с применением метода билинейного преобразования либо различных подходов, на нём базирующихся, не позволяют, как это показано в [1-3], синтезировать БИХ-фильтры со сложной, произвольной формой АЧХ, не дают возможности удовлетворить постоянно возрастающие селективные требования. Вещественный формат представления данных при билинейном преобразовании вынуждает квантовать их значения, что приводит к весьма нежелательным для работы такого БИХ-фильтра последствиям, таким как: искажение частотных характеристик, появление шумов квантования, необходимость масштабирования вещественных коэффициентов фильтра и возможность появления малых предельных циклов при квантовании результатов внутренних

*Рассматриваются вопросы целочисленного моделирования и синтеза рекурсивных (IIR) цифровых фильтров с учетом возможностей их реализации на цифровых платформах с целочисленной арифметикой вычислений. Приводится постановка и решение задачи многофункционального синтеза IIR-фильтров методами целочисленного нелинейного математического программирования. Иллюстрируется эффективность применения данного подхода на нескольких характерных примерах решения сложноселективных задач синтеза рекурсивных целочисленных фильтров. Проводится анализ характеристик синтезированных фильтров.*

вычислений. К тому же проектное решение в вещественных числах может быть реализовано только на специализированных сигнальных процессорах (в формате с плавающей запятой), тогда как наиболее перспективная на сегодняшний день программируемая логика, а также и микропроцессорные контроллеры, требуют целочисленной арифметики вычислений.

Возможность прямого синтеза цифровых БИХ-фильтров со сложными селективными требованиями непосредственно в целочисленном пространстве состояний может быть предоставлена методологией целочисленного нелинейного программирования (ЦНП), общее описание которой приведено в работах [1-6]. Идеология ЦНП позволяет эффективно проектировать целочисленные рекурсивные фильтры с заданной разрядностью представления данных при максимальном выполнении требований к совокупности частотных характеристик фильтра при произвольной форме их задания. Важным достоинством таких целочисленных цифровых фильтров (ЦЦФ) является отсутствие процедуры квантования как коэффициентов фильтра, так и результатов промежуточных вычислений в ходе расчёта отклика фильтра в реальном времени, а, следовательно, и отсутствие негативных последствий квантования данных, перечисленных выше.

В данной статье приводятся несколько характерных примеров решения сложноселективных задач синтеза рекурсивных целочисленных фильтров компьютерным

пакетом ЦНП, примеров, иллюстрирующих принципиальные возможности данного подхода к многофункциональному проектированию цифровых систем.

### Моделирование и синтез рекурсивного ЦЦФ

Рекурсивные фильтры, являясь дискретными линейными системами с обратной связью (рекурсией), обладают значительно большими селективными возможностями по сравнению с нерекурсивными, поэтому они позволяют реализовать требуемые сложные формы частотных характеристик цифрового фильтра значительно меньшим порядком фильтра. Что касается структуры построения рекурсивных фильтров, то в [3, 7] приведено сравнение каскадных, параллельных, прямых и волновых структур построения цифровых БИХ-фильтров, и показано, что каскадная структура является наилучшей. Поэтому в настоящее время построение рекурсивных ЦЦФ в форме каскадного соединения звеньев первого или второго порядка прямой формы на практике используется наиболее часто.

Передаточная функция для рекурсивного ЦЦФ, состоящего из каскадного соединения  $m$ -звеньев второго порядка ( $m = N/2$ ), имеет следующий вид [1, 3]:

$$H(z) = \prod_{i=1}^m \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad (1)$$

где комплексная переменная  $z$  при переходе к описанию комплексной частотной характеристики принимает значение  $z = e^{j\omega}$ , а  $\omega = \frac{2\pi f}{F_d}$  – приведенная круговая частота.

Все коэффициенты системной функции (1) являются целочисленными, а их интервал изменения (вариации) определяется заданной длиной битового слова (разрядностью) коэффициентов фильтра. Целочисленный рекурсивный фильтр будет устойчив, если все полюсы  $p_i$  передаточной функции лежат внутри единичного круга в  $Z$  – плоскости:

$$|Zp_i| < 1. \quad (2)$$

Из соотношения (1) легко получается разностное уравнение для одного звена фильтра:

$$y_n = (b_0x_n + b_1x_{n-1} + b_2x_{n-2} - a_1x_{n-1} - a_2x_{n-2}) / a_0, \quad (3)$$

где  $x_n, y_n$  – входная и выходная целочисленные временные последовательности,  $a_0$  – масштабирующий множитель.

Как видно из (3), при вычислении отклика фильтра должна выполняться операция деления на целочисленный коэффициент  $a_0$ , которая может быть реализована операцией сдвига при условии принадлежности каждого  $i$ -го коэффициента биномиальному целочисленному ряду:

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = \overline{0, W_k} \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где  $W_k$  – длина битового слова целочисленных коэффициентов фильтра.

На рис. 1 приведена типичная структура звеньев рекурсивного целочисленного фильтра, соответствующая разностному уравнению (3). Как видно, при аппаратной его реализации на кристалле для вычисления отклика фильтра  $y_n$  кроме традиционных операций сложения, умноже-

ния и задержки на такт присутствует операция сдвига на  $B = \log_2 a_0$  бит, с помощью которой реализуется целочисленное деление на биномиальный коэффициент  $a_0$ .

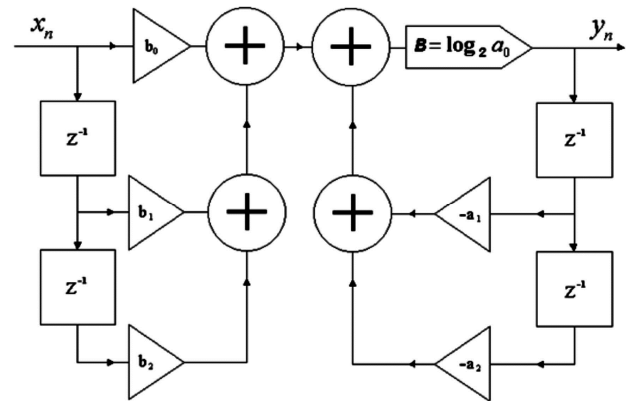


Рис. 1. Структура звена рекурсивного ЦЦФ

Таким образом, при расчёте отклика фильтра используется минимальное количество базовых операций, причём все эти операции целочисленные, что определяет высокое быстродействие рекурсивного ЦЦФ при работе в реальном времени. Что касается результатов необходимых для расчёта отклика промежуточных вычислений, то все они также являются целочисленными, и при заданной битовой разрядности квантования входного сигнала  $W_x$  достаточно выделить внутренний аккумуляторный регистр с разрядностью

$$W_{ak} = W_x + W_k + 2 [bum]$$

для хранения результата целочисленного умножения с накоплением, осуществляемого по алгоритму (3).

Как известно, в каскадных формах построения цифровых фильтров необходима процедура масштабирования сигнала, что позволяет каскадному фильтру работать в широком динамическом диапазоне входных сигналов. Однако, в каскадных ЦЦФ расчёт такого масштабирования целочисленного звена гораздо легче осуществлять не применением  $Lp$ -нормы, а прямым введением требования обеспечения малого разброса коэффициентов передачи отдельных звеньев. Формально требование масштабирования усиления записываются двусторонними функциональными ограничениями экстремальной задачи ЦНП-синтеза [1, 4].

В общем виде задачу целочисленного нелинейного программирования при машинном синтезе рекурсивного ЦЦФ можно записать так [4]:

$$F^o(IX) = \min F(IX) \quad (5)$$

$$IX \in I^{6m}$$

$$-2^{W_k} - 1 \leq a_{di} \leq 2^{W_k} - 1 \quad d = \overline{1, 2} \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$-2^{W_k} - 1 \leq b_{di} \leq 2^{W_k} - 1 \quad d = \overline{0, 2} \quad i = \overline{1, m},$$

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = \overline{0, W_k} \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$|Z_{pi}| < 1 \quad i = \overline{1, m} \quad |Z_{pi}| < 1 \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$K_i^{\min} \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq K_i^{\max} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где  $m$  – число звеньев второго порядка,  $IX$  – вектор многомерного целочисленного пространства параметров (коэффициентов),  $F(IX)$  – целевая функция,  $d$  – индекс коэффициента передаточной функции звена (1),  $K_i^{\min}$ ,

$K_i^{max}$  – допустимые границы изменения коэффициента усиления  $i$ -го звена.

Экстремальная задача синтеза (5) записана относительно целочисленного пространства  $I^{6m}$  параметров (коэффициентов фильтра), размерностью  $6m$ . Ограничения (6) задают границы изменения этих целочисленных коэффициентов, а соотношение (7) определяет принадлежность коэффициентов  $a_{0i}$  биномиальному ряду. Функциональные ограничения (8) контролируют в процессе синтеза условие устойчивости рекурсивного фильтра по всем полюсам коэффициента передачи, а ограничения (9), как уже сказано выше, масштабируют коэффициенты передачи звеньев в заданный интервал.

Многофункциональное задание целевой функции наиболее часто формируется в виде взвешенной суммы (10) частных целевых функций  $f_i(\mathbf{IX})$ , которые определяют выполнение функциональных требований по той или иной частотной характеристике фильтра [5]:

$$F(\mathbf{IX}) = \sum_i \beta_i \cdot f_i(\mathbf{IX}). \tag{10}$$

Коэффициент  $\beta_i$  задает значимость (вес) характеристики ( $i$ -го частотного окна). Сами частные целевые функции  $f_i(\mathbf{IX})$  формирует функциональный редактор пакета синтеза по критерию минимума среднеквадратичного отклонения

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2}, \tag{11}$$

либо по критерию минимизации максимальной ошибки:

$$f_i(\mathbf{IX}) = \max_n \{ |Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T|^2 \}, \tag{12}$$

где  $Y_n(\mathbf{IX})$  – текущее значение характеристики фильтра на  $n$ -ой дискретной частоте диапазона определения, а  $Y_n^T$  – требуемое значение частотной характеристики.

Поисковое итеративное решение экстремальной задачи ЦНП (5) в заданном пространстве параметров осуществляет программный алгоритмический комплекс [4, 8], обращаясь к модельному блоку программы для расчёта текущих функциональных характеристик фильтра. Вектор  $\mathbf{IX}^0$ , минимизирующий скалярную целевую функцию  $F(\mathbf{IX})$  на множестве допустимых целочисленных решений (6), является эффективным решением задачи параметрического ЦНП-синтеза рекурсивного ЦЦФ.

Рассмотрим некоторые характерные примеры синтеза рекурсивных ЦЦФ со сложными селективными требованиями.

**Рекурсивный фильтр верхних частот с линейной фазой**

Рекурсивные фильтры нижних частот (ФНЧ) с линейной ФЧХ в целочисленном пространстве параметров

синтезируются наиболее просто [2, 9]. Однако методом ЦНП возможен синтез и фильтров верхних частот (ФВЧ) с требуемой фазовой линейностью в полосе пропускания. При синтезе рекурсивного ФВЧ с линейной фазой целевая функция формируется в виде взвешенной суммы частных целевых функций  $f_{AЧХ}(\mathbf{IX})$  и  $f_{ФЧХ}(\mathbf{IX})$ , обеспечивающих соответственно выполнение требований как к амплитудной селективности фильтра, так и к линейности его фазы

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_{AЧХ}(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_{ФЧХ}(\mathbf{IX}), \tag{13}$$

$$f_{ФЧХ}(\mathbf{IX}) = \Delta\varphi_{MAX} = \max |\varphi(\mathbf{IX}) - \varphi^L|,$$

где  $\varphi^L$  – требуемая линейная ФЧХ фильтра верхних частот.

Графики требуемых АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 2 (выделены пунктиром).

Относительно целевой функции (13) задача целочисленного программирования для синтеза рекурсивного ФВЧ в форме каскадного соединения пяти звеньев второго порядка прямой формы с разрядностью представления данных  $W_k = 10$  бит записывается так:

$$F^0(\mathbf{IX}^0) = \min F(\mathbf{IX}) \tag{14}$$

$$\mathbf{IX} \in I^{25}$$

$$-511 \leq a_{di} \leq 511 \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,5}, \tag{15}$$

$$-511 \leq b_{di} \leq 511 \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,5},$$

$$a_{0i} = 512 \quad i = \overline{1,5}, \tag{16}$$

$$|Z_{pj}| < 1,$$

$$1,0 \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq 3,0 \quad i = \overline{1,5}. \tag{17}$$

Таким образом, минимизация целевого функционала осуществлялась на 25-мерном целочисленном пространстве параметров в допустимой области (15) при фиксированных нормирующих коэффициентах (16) и выполнении функциональных ограничений масштабирования сигнала (17).

В табл. 1 приведены оптимальные значения целочисленных 10-битовых коэффициентов передаточной функции ФВЧ, а также достигнутые значения коэффициентов усиления его звеньев. АЧХ и ФЧХ фильтра по синтезу представлены на рис. 2. Время решения данной задачи на стандартном персональном компьютере не превышало 10 минут.

В качестве цифровой платформы для аппаратной реализации синтезированного ФВЧ была выбрана программируемая логическая схема Spartan 3AN FPGA фирмы XILINX. Программирование осуществлялось на языке VHDL под заданную структуру фильтра и найденные целочисленные коэффициенты её звеньев (табл. 1).

Таблица 1. Оптимальные коэффициенты целочисленного ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена Kmax
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
1	225	56	18	8	89	1,14
2	130	60	-130	183	-105	2,25
3	-207	144	35	254	-142	2,61
4	-30	71	-36	-187	-387	2,44
5	-202	66	122	392	-249	2,93

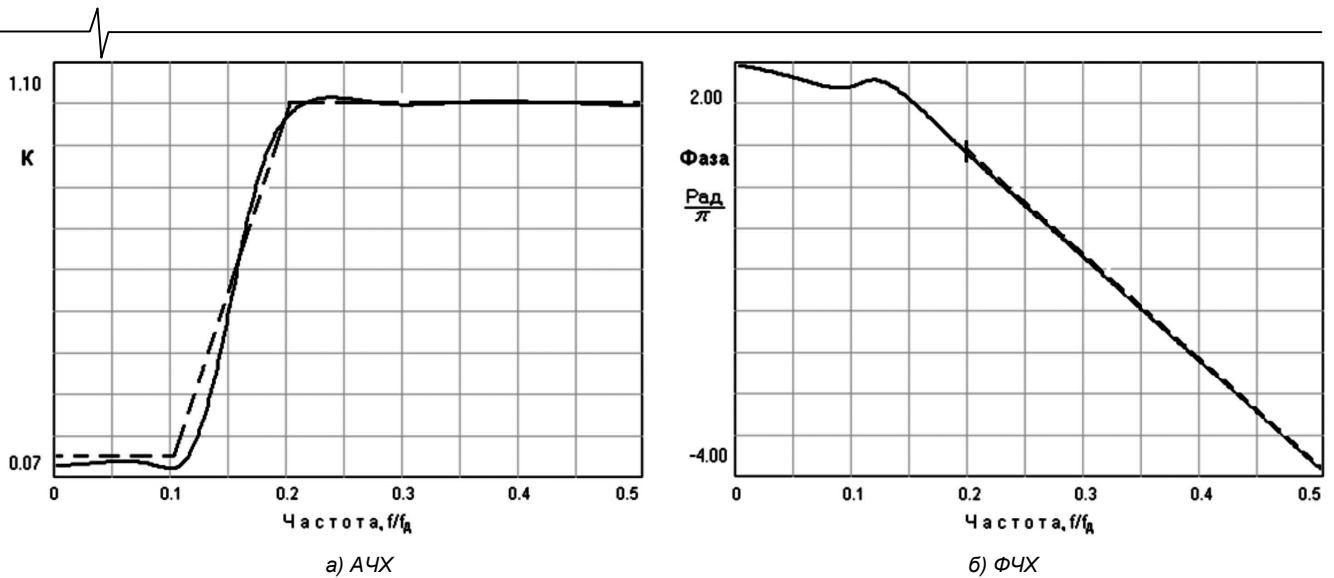


Рис. 2. Характеристики ФВЧ по синтезу

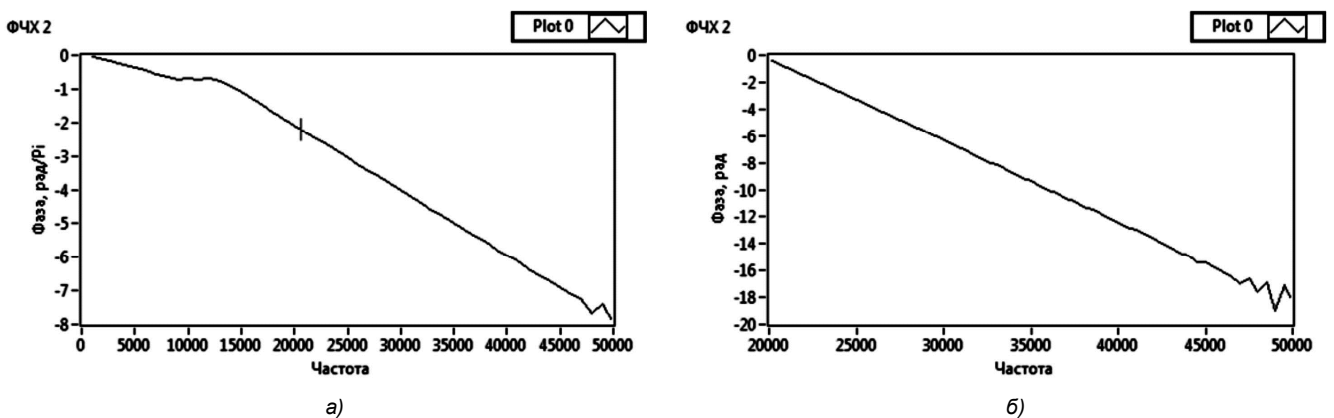


Рис. 3. Экспериментальные измерения ФЧХ на всём интервале Найквиста (а), и только в полосе пропускания фильтра (б)

Измерение частотных характеристик фильтра осуществляется на реальном сигнале с помощью автоматизированной панорамной измерительной системы, разработанной в среде виртуальных приборов LabVIEW. Экспериментальные графики ФЧХ фильтра для частоты дискретизации 100 кГц приведено на рис. 3. Так как выходной сигнал снимался непосредственно с цифроаналогового преобразователя, то наблюдается возрастание шумов измерения вблизи частоты Найквиста, где эффекты квантования наиболее выражены.

Как видно из приведённых графиков, требования по функциональным характеристикам рекурсивного целочисленного ФВЧ были выполнены с высокой точностью. Фазовые искажения  $\Delta\varphi(\omega)$  в полосе пропускания фильтра не превышали 3 градусов.

### Узкополосный гауссов фильтр

Фильтры специальной формы частотных характеристик широко используются в современной радиоэлектронной аппаратуре. К таким устройствам в первую очередь можно отнести гауссовы фильтры, амплитудно-частотная характеристика которых близка к гауссовой кривой [10, 11].

Нормированная резонансная характеристика для гауссовой кривой (рис. 4) определяется следующим образом:

$$y(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{\alpha}}, \quad (18)$$

где  $\xi = f - f_0$  – абсолютная расстройка от резонансной частоты, а параметр  $\alpha$  определяет нормированную полосу пропускания гауссовой кривой:

$$\alpha = \frac{n^2}{4 \ln \sqrt{2}},$$

здесь  $\Pi$  – абсолютная полоса пропускания по уровню 0,7.

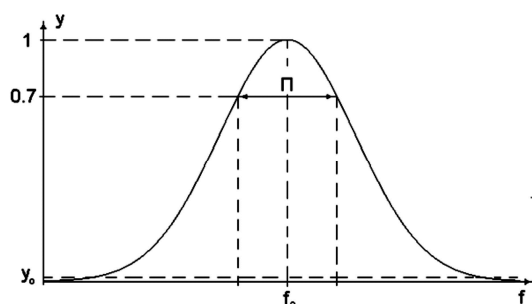


Рис. 4. Гауссова характеристика фильтра

Как известно, фильтры с гауссовой характеристикой имеют самое короткое из возможных время установления колебаний при отсутствии выбросов за фронтом. Это главное достоинство гауссовых фильтров широко используется в современной радиоэлектронике, как аналоговой, так и цифровой. Что касается принципов построения цифровых гауссовых фильтров, то из общей теории электрических фильтров известно, что при каскадном (последовательном) соединении  $m$  звеньев второго порядка (цифровых резонаторов) АЧХ системы стремится к гауссовой кривой [10].

Формально для оценки степени близости текущей АЧХ фильтра к гауссовой кривой удобно использовать средне-квадратичная погрешность  $\sigma$  в полосе пропускания фильтра по заданному уровню (уровень  $y_0$  на рис. 4):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^p [y(\xi_i) - y^r(\xi_i)]^2}, \quad (19)$$

где  $y(\xi_i)$  – текущее значение характеристики в  $i$ -ой дискретной точке определения, а  $y^r(\xi_i)$  – значение идеальной гауссовой характеристики в этой точке.

Задача дискретного целочисленного программирования для синтеза узкополосного рекурсивного гауссова фильтра с центральной частотой 700 Гц и относительной полосой пропускания 1,4 % (частота дискретизации  $F_s=2$  кГц) в форме каскадного соединения восьми звеньев второго порядка с разрядностью представления данных  $W_k=10$  бит выглядит так:

$$F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}) \quad (20)$$

$$\mathbf{IX} \in I^{40}$$

$$\begin{aligned} -511 \leq a_{di} \leq 511 \quad d=1,2 \quad i=1,8 \\ -511 \leq b_{di} \leq 511 \quad d=1,2 \quad i=1,8 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_{oi} = 512 \quad i=1,8, \\ |Z_{pi}| < 1, \\ 0,8 \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq 4,0 \quad i=1,8. \end{aligned} \quad (22)$$

Вектор  $\mathbf{IX}^o$ , минимизирующий скалярную целевую функцию  $F(\mathbf{IX})$  на множестве допустимых целочисленных решений (21), является эффективным решением задачи параметрического синтеза рекурсивного гауссова фильтра. Спецификой задачи в данном случае являлась необходимость контроля всего главного интервала цифровых частот гауссова фильтра, т.к. при поисковом решении задачи синтеза (20) возможно появление боковых лепестков АЧХ фильтра, уровень которых должен быть минимален. Поэтому целевой функционал данной задачи формировался в виде аддитивной свёртки (23) четырёх частных целевых функций  $f_i(\mathbf{IX})$ , которые определяли ту или иную область АЧХ гауссова фильтра:

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}). \quad (23)$$

Здесь

- частная целевая функция  $f_1(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_1=1$  формировала зону основного гауссова лепестка фильтра, рассчитанного по соотношению (18) для заданной полосы пропускания фильтра, и определялась среднеквадратичной ошибкой (19) отклонения текущей АЧХ фильтра от идеальной гауссовой АЧХ. Таким образом, данное частотное окно контролировало основной гауссов лепесток в интервале уровня  $y_0 = 0,01$  (-40 дБ) подавления побочных лепестков (рис. 4);

- частная целевая функция  $f_2(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_2=0,2$  определяла внеполосное (вне гауссова лепестка) подавление побочных лепестков на интервале цифровых частот ниже гауссова лепестка;

- частная целевая функция  $f_3(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_3=0,2$  определяла внеполосное подавление побочных лепестков по уровню  $y_0$  на интервале цифровых частот выше основного гауссова лепестка вплоть до частоты Найквиста.

Указанные характеристики графически вводились в соответствующее окно функционального редактора пакета ЦНП-синтеза и затем оцифровывались. Время решения задачи (20) на стандартном персональном компьютере не превышало 10 мин. при полном выполнении условий устойчивости работы гауссова фильтра.

В табл. 2 приведены оптимальные значения целочисленных 10-битовых коэффициентов передаточной функции узкополосного гауссова фильтра, а также максимальные значения коэффициентов усиления его звеньев. На рис. 5 представлен график его АЧХ по синтезу, а на рис. 6-8 – экспериментальных характеристик гауссова фильтра.

Как видно из рисунков все требования по функциональным показателям и характеристикам узкополосного гауссова фильтра были выполнены с высокой точностью, а среднеквадратичная ошибка (СКО) реализации гауссовой формы АЧХ была минимальной (СКО=0,018).

Таблица 2. Оптимальные коэффициенты гауссова фильтра

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена $K_{max}$
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
1	285	119	298	420	270	1,64
2	48	26	-102	-241	0	1,13
3	267	202	191	253	192	1,04
4	301	238	39	12	-5	2,5
5	310	241	-49	-9	-26	3,42
6	276	244	-30	-12	-26	1,92
7	294	240	-29	-24	-30	0,86
8	386	242	-27	-22	-29	0,9

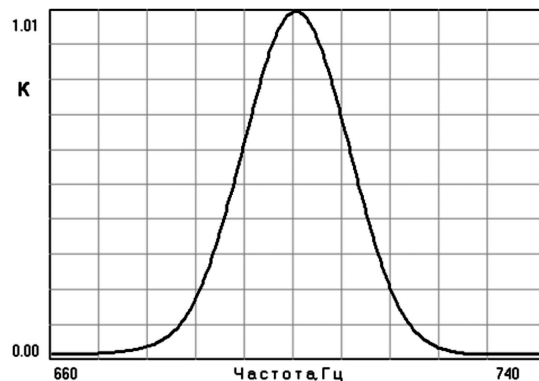


Рис. 5. АЧХ гауссова фильтра по синтезу

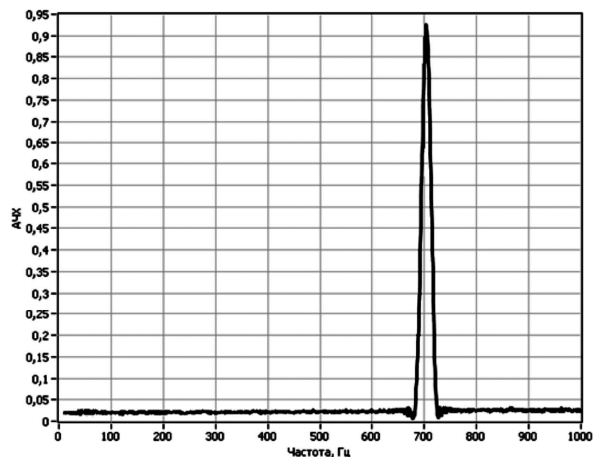


Рис. 6. Измерение АЧХ фильтра на всем интервале Найквиста

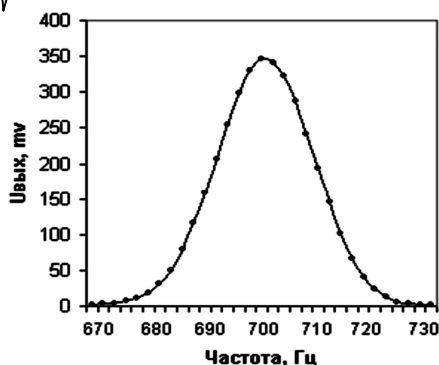


Рис. 7. Измерение АЧХ фильтра в полосе центральной частоты (700 Гц)

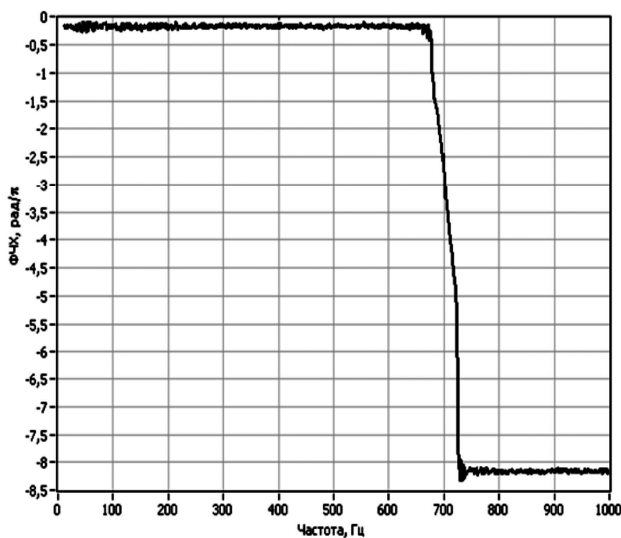


Рис. 8. Измерение ФЧХ фильтра на интервале Найквиста

### Двухполосный гауссов фильтр с кратными центральными частотами

Методология ЦНП позволяет эффективно решать и задачи синтеза многополосных гауссовых ЦЦФ с заданным соотношением центральных частот. Такие фильтры находят широкое применение в цифровой радиоэлектронике, например, в цифровых системах кодирования и криптозащиты. Ниже, в качестве примера, рассмотрена задача синтеза двухполосного гауссова ЦЦФ с кратным соотношением центральных резонансных частот

при фиксированной ширине полосы пропускания гауссовой АЧХ.

Общая постановка задачи ЦНП-синтеза такого фильтра практически ничем не отличалась от приведённой выше задачи синтеза однополосного гауссова ЦЦФ за исключением более высокого порядка синтезируемого фильтра и более сложного целевого функционала, который в данном случае формировался функциональным редактором в виде взвешенной суммы уже пяти частных целевых функций;

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}) + \beta_4 f_4(\mathbf{IX}) + \beta_5 f_5(\mathbf{IX}), \quad (24)$$

где

- частная целевая функция  $f_1(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_1 = 0,2$  определяла внеполосное (вне гауссова лепестка) подавление побочных лепестков АЧХ по уровню 0.01 (-40 дБ) на интервале цифровых частот ниже первого гауссова лепестка;

- частная целевая функция  $f_2(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_2 = 1$  формировала зону первого гауссова лепестка фильтра с центральной частотой 400 Гц, рассчитанного по соотношению (18) для заданной полосы пропускания 30 Гц, и определялась среднеквадратичной ошибкой (19) отклонения текущей АЧХ фильтра от идеальной гауссовой АЧХ в данном частотном диапазоне;

- частная целевая функция  $f_3(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_3 = 0,2$  определяла внеполосное подавление побочных лепестков АЧХ по уровню 0.01 (-40дБ) на интервале между центральными частотами гауссовых АЧХ;

- частная целевая функция  $f_4(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_4 = 1$  формировала зону второго гауссова лепестка фильтра с центральной частотой 800 Гц и такой же полосой пропускания 30 Гц (рис. 4);

- частная целевая функция  $f_5(\mathbf{IX})$  с весом  $\beta_5 = 0,2$  определяла внеполосное подавление побочных лепестков по уровень  $y_0$  на интервале цифровых частот выше второго гауссова лепестка вплоть до частоты Найквиста;

Указанные характеристики графически вводились в соответствующее окно функционального редактора пакета ЦНП и затем оцифровывались. Время решения задачи синтеза по целевому функционалу (24) не превышало 30 мин. при полном выполнении условий устойчивости работы двухполосного гауссова фильтра.

Таблица 3. Оптимальные коэффициенты двухполосного фильтра

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена $K_{\max}$
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
1	1397	790	-550	-6	426	4,21
2	-705	916	1171	-1126	1167	2,97
3	138	30	-843	-43	606	1,46
4	-499	874	0	-443	-247	3,88
5	-577	842	147	-128	-624	4,52
6	1607	897	378	239	223	4,03
7	-483	871	698	-98	703	1,92
8	-155	26	-465	-648	-463	1,7
9	-575	731	-549	33	751	4,45
10	1452	836	-515	-562	-708	3,65
11	-178	367	-853	111	-853	1,3
12	1586	869	-597	-336	176	4,99
13	1443	847	-598	-452	50	3,67
14	1422	813	-593	-445	-8	2,78

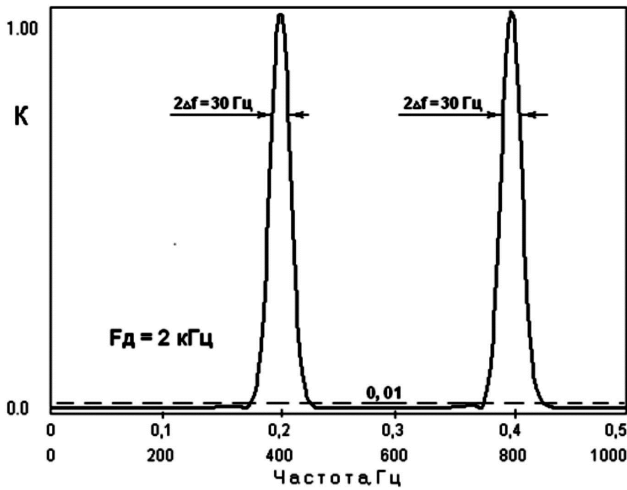


Рис. 9 а. АЧХ фильтра на интервале Найквиста

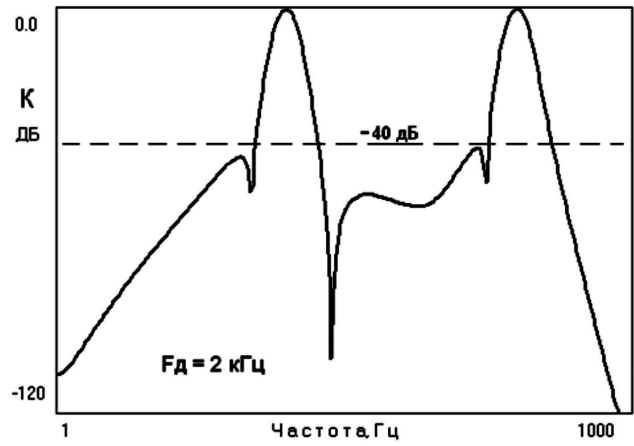


Рис. 9 б. АЧХ фильтра (дБ)

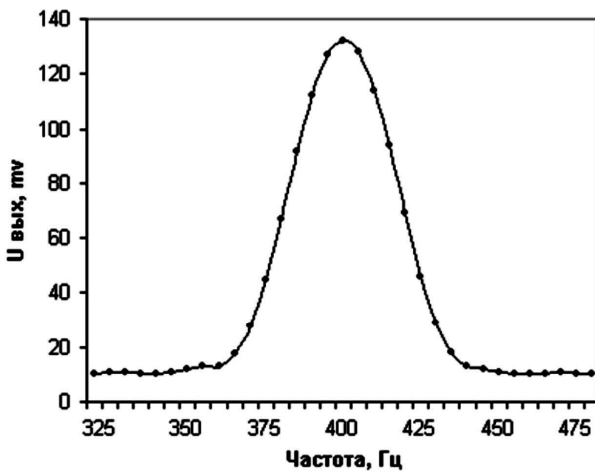


Рис. 9 в. Измерение АЧХ фильтра в полосе первого резонанса (400 Гц)

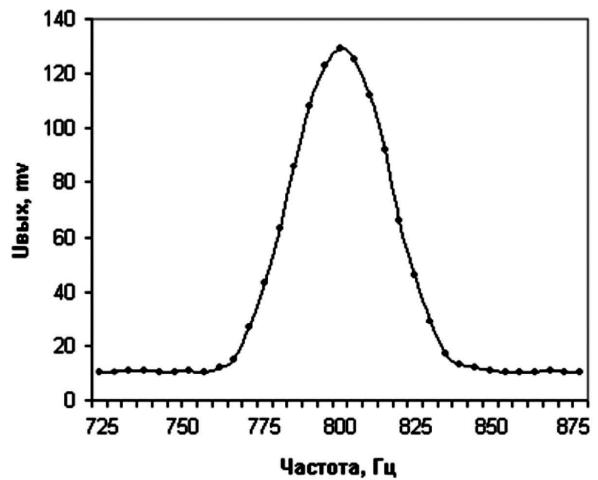


Рис. 9 г. Измерение АЧХ фильтра в полосе второго резонанса (800 Гц)

В табл. 3 приведены оптимальные значения целочисленных 12-битовых коэффициентов передаточной функции фильтра, а также максимальные значения коэффициентов усиления его отдельных звеньев (нормирующие коэффициенты всех звеньев были одинаковы  $a_{0i} = 1024$ ).

На рис. 9а-9б приведены графики АЧХ фильтра по синтезу, а на рис. 9в-9г – экспериментальное измерение его резонансных кривых.

Таблица 4. Функциональные показатели фильтра

Функциональные показатели фильтра	Синтез на ЭВМ	Измерение
1. Частота первого резонанса, Гц	400	400
2. Частота второго резонанса, Гц	800	800
3. Полоса пропускания, Гц	30	32
4. СКО выполнения гауссовой кривой	$\leq 0,01$	0,008
5. Уровень подавления боковых лепестков АЧХ не менее, дБ	-40	-42
6. Коэффициент передачи	1.0	0.98
7. Разрядность представления данных, бит	12	12
8. Фазовые искажения в полосе, град	$\leq 2$	$\leq 2$
9. Порядок рекурсивного ЦНП-фильтра	28	28

В табл. 4 приведены функциональные показатели синтезированного двухполосного гауссова ЦЦФ по ре-

зультатам компьютерного синтеза и экспериментальных измерений.

Как видно из рисунков и таблицы все требования по функциональным показателям и характеристикам двухполосного гауссова фильтра были выполнены с высокой точностью и ошибка реализации гауссовой формы АЧХ была минимальной (СКО=0,008).

### Рекурсивный фильтр тракта УПЧИ телеприёмника

Другим характерным примером селективных фильтров специальной формы частотной характеристики является цифровой фильтр тракта усиления промежуточной частоты изображения (УПЧИ) телеприёмника. АЧХ такого фильтра, как известно, имеет сложную форму (рис. 10а) с горизонтальной площадкой по уровню 0,1 под несущую частоту звукового сопровождения и линейным высокочастотным склоном в области несущей частоты изображения [12, 13].

При синтезе целочисленного рекурсивного фильтра тракта УПЧИ в пакете ЦНП применялась естественная фрагментация данной АЧХ в четыре частотные окна функционального редактора. Это необходимо для качественной оцифровки и реализации требуемой формы характеристики в области несущей звука, полосы про-

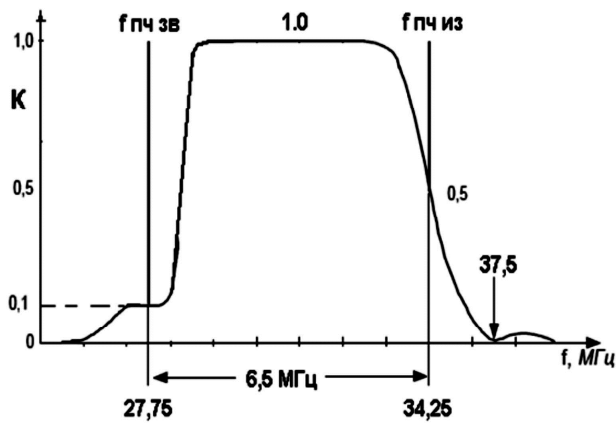


Рис. 10 а. Требуемая характеристика фильтра

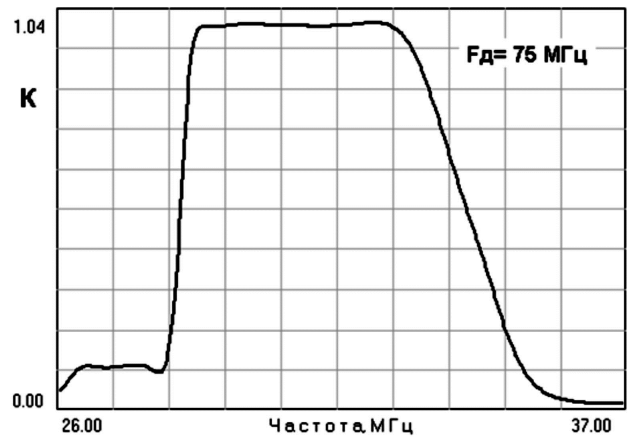


Рис. 10 б. АЧХ фильтра УПЧИ по синтезу

пускания, линейного высокочастотного склона и обеспечения требуемого уровня подавления в области частоты Найквиста. Таким образом, целевой функционал в данном случае имел следующий вид;

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}) + \beta_4 f_4(\mathbf{IX}) \quad (25)$$

Весовые коэффициенты оконных целевых функций определялись практически в ходе поэтапного решения следующей экстремальной задачи целочисленного программирования:

$$F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}) \quad (26)$$

$$\mathbf{IX} \in I^{60}$$

$$-2047 \leq a_{di} \leq 2047 \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,12} \quad (27)$$

$$-2047 \leq b_{di} \leq 2047 \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,12}$$

$$a_{0i} = 1024 \quad i = \overline{1,12},$$

$$|Z_{pj}| < 1, \quad (28)$$

$$0,8 \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq 6,0 \quad i = \overline{1,12} \quad (29)$$

Таким образом, синтезировался рекурсивный ЦЦФ в форме каскадного соединения двенадцати звеньев второго порядка с разрядностью представления данных  $W_k = 12$  бит при частоте дискретизации 75 МГц. Минимизация целевого функционала (25) осуществлялась на 60-мерном целочисленном пространстве параметров в допустимой области (27) при фиксированных нормирующих коэффициентах и выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (28) и масштабирования (29) максимальных значений коэффициентов усиления звеньев в заданный интервал. Вектор  $\mathbf{IX}^o$ , минимизирующий скалярную целевую функцию (25), является эффективным решением задачи синтеза рекурсивного фильтра тракта УПЧИ. График АЧХ синтезированного фильтра приведён на рис. 10б, а в табл. 5 представлены оптимальные значения целочисленных 12-битовых коэффициентов передаточной функции фильтра, а также достигнутые значения коэффициентов усиления его звеньев (нормирующие коэффициенты всех звеньев были одинаковы  $a_{0i} = 1024$ ).

Время решения данной задачи на стандартном персональном компьютере не превышало 30 минут, причём значение целевого функционала (27) в начальной точке составляло 7930, а значение в точке оптимума было

равно 0,017 при полном выполнении условий устойчивости работы фильтра.

Таблица 5. Оптимальные коэффициенты рекурсивного УПЧИ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена $K_{max}$
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
1	1374	822	-255	136	414	3,31
2	1734	844	234	325	228	1,68
3	1460	980	306	206	182	5,71
4	891	285	485	139	16	0,87
5	1876	914	-203	-92	97	2,75
6	1019	401	-588	-277	316	1,46
7	1193	974	286	216	196	2,54
8	833	329	-683	-155	336	1,47
9	1103	466	483	-227	258	2,64
10	960	330	68	-37	261	0,93
11	1187	458	704	181	-75	1,79
12	1155	503	642	227	-226	1,69

Практическая реализация осуществлялась на ПЛИС Spartan 3AN FPGA фирмы Xilinx. Программирование осуществлялось на языке VHDL под заданную структуру фильтра и найденные целочисленные коэффициенты её звеньев (табл. 5). Ручное измерение частотной характеристики фильтра осуществляется на реальном сигнале методом вольтметра – генератора. Экспериментальный график АЧХ фильтра для частоты дискретизации 100 кГц представлен на рис. 11.

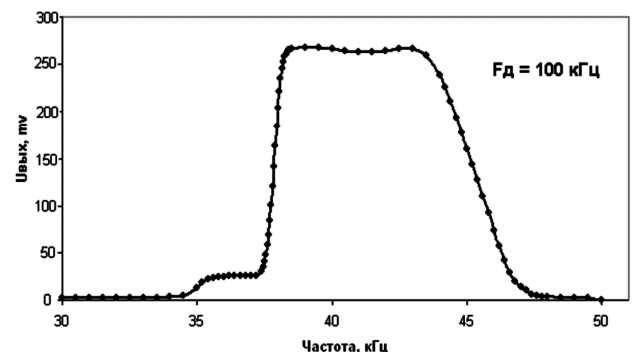


Рис. 11. Экспериментальное измерение АЧХ фильтра

Как видно из приведённых теоретических и экспериментальных графиков, требования к форме АЧХ рекурсивного целочисленного фильтра тракта УПЧИ телеприёмника были выполнены с высокой точностью. Требуемый уровень масштабирования усиления подтверждают



приведённые в табл. 5 максимальные значения коэффициентов усиления каскадов. Все коэффициенты усиления звеньев находятся в поле заданного интервала.

### Заключение

Методы целочисленного нелинейного программирования в приложении к задачам проектирования линейных цифровых фильтров являются современной и перспективной альтернативой традиционным классическим методам проектирования цифровых фильтров [14-16]. Принципиальное отличие ЦНП-синтеза заключается в том, что в данном случае для удовлетворения требуемого функционирования фильтра на стадии его проектирования не используются искусственные приёмы и подходы классических методов (аналоговые прототипы, методы аппроксимации, взвешивание окном, частотные выборки и др.), приводящие к существенным ограничениям в выполнении функциональных требований и систематическим ошибкам, а осуществляется прямой поиск требуемых целочисленных коэффициентов фильтра прямо по его математическому определению (модели). Критерием поиска является соответствие совокупного текущего функционирования синтезируемого фильтра его требуемому функционированию. Современные алгоритмические комплексы целочисленной минимизации позволяют решать такую задачу весьма надёжно и эффективно при выполнении всех внешних требований и ограничений к работе цифрового фильтра. Это даёт возможность существенно повысить качество проектируемых фильтров, сократить время их разработки, заметным образом снизить их стоимость.

Из материалов, приведённых в статье видно, что в сравнении с традиционными подходами, синтез цифровых фильтров методом целочисленного нелинейного программирования позволяет:

1. Осуществлять синтез фильтра по совокупности требуемых его частотных характеристик, причём селективные требования к характеристикам могут быть произвольными, весьма сложными, а частотная шкала – требуемая (линейная, логарифмическая и др.).

2. Возможна широкая фрагментация характеристик фильтра, когда важные их участки выделяются в отдельное функциональное окно для обеспечения их детальной проработки в ходе синтеза.

3. Устойчивость решения для целочисленных БИХ-фильтров гарантируется приоритетным выполнением функциональных условий устойчивости в процессе ЦНП-синтеза фильтра.

4. Глобальная модельная идеология поиска определяет высокую надёжность отыскания эффективного решения экстремальной задачи ЦНП практически из любой начальной точки. Хорошего начального приближения (прототипа) здесь не требуется. Как правило, в проектных задачах со сложными селективными требованиями оптимальное решение определяется не из начальной точки, заданной пользователем, а из точки, сгенерированной самим поисковым алгоритмом решения задачи.

5. Необходимое масштабирование сигнала в каскадных структурах может быть обеспечено непосредственно в ходе ЦНП-синтеза целочисленного фильтра. Здесь нет необходимости использования косвенных приёмов масштабирования усиления применением, например,  $L_p$ -нормы.

6. Целочисленная дискретизация пространства параметров (коэффициентов) фильтра позволяет получать проектные решения в целых числах, что снимает все ограничения по арифметике вычислений при реализации ЦНП-фильтров на любых цифровых платформах (сигнальных процессорах, контроллерах, ПЛИС) с заданной разрядностью представления данных, а также на кристаллах заказных или полужаказных СБИС.

### Литература

1. Бугров В.Н. Проектирование цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования. // Вестник ННГУ, 2009, № 6. с. 61-70.
2. Шкелев Е.И., Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Целочисленные цифровые фильтры – эффективное решение для 8-битовых цифровых платформ. М., Компоненты и технологии, № 10, 2013, с. 104-110.
3. Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 1. М., Компоненты и технологии, № 6, 2014, с. 124-129.
4. Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 2. М., Компоненты и технологии, № 8, 2014, с. 43-49.
5. Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 3. М., Компоненты и технологии, № 1, 2015, с. 154-159.
6. Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Синтез цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования. 17-ая международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA-2015», Тезисы докладов. М.: НТО РЭС им. А.С. Попова, 2015 г, с. 200 – 204.
7. Dempster A.G., Macleod M.D. IIR digital filter design using minimum adder multiplier blocks. //IEEE Trans.on Circuits and Systems-II, 1998, v. 45, N 6.
8. Воинов Б.С., Бугров В.Н., Воинов Б.Б. Информационные технологии и системы: поиск оптимальных, оригинальных и рациональных решений. М.: Наука, 2007, 730 с.
9. Артемьев В.В., Бугров В.Н. Синтез цифровых рекурсивных фильтров с линейной фазой. М., Компоненты и технологии, № 7, 2013, с. 132-134
10. Бугров В.Н. Целочисленное проектирование гауссовых цифровых фильтров // Вестник ННГУ, 2012, № 3. с. 49 – 54.
11. Мингазин А.Т. Синтез БИХ-фильтров малой сложности с характеристиками, близкими к гауссовой кривой. М., Компоненты и технологии, № 11, 2013, с. 144-148
12. Джакония В.Е. Телевидение. М.: Горячая линия - Телеком, 2007, 618 с
13. Бриллиантов Д.П., Куликов Б.Н., Роксман М. А. Переносные цветные телевизоры – М.: Радио и связь, 1989, 306с.
14. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978.-848 с.
15. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004.
16. Мингазин А.Т. Програма DIFID: эффективный синтез каскадных цифровых БИХ-фильтров. М., DSPA, 2002. Т.1. С. 90-93.