

УДК 519.246.27

ЦИФРОВОЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПСЕВДОАНСАМБЛЯ СЕГМЕНТОВ ЗНАКОВОГО СИГНАЛА

*Якимов В.Н., д.т.н., профессор Самарского государственного технического университета,
e-mail: yvnr@hotmail.com;*

Машков А.В., преподаватель Самарского государственного технического университета, e-mail: mavstu@list.ru;

*Горбачев О.В., специалист департамента разработки ПО ООО «Открытый код»,
e-mail: oleg.gorbachev@gmail.com.*

DIGITAL HARMONIC ANALYSIS BASED ON THE METHOD OF AVERAGING THE FOURIER TRANSFORM OF SEGMENTS PSEUDO-ENSEMBLE OF SIGN-FUNCTION SIGNAL

Yakimov V.N., Mashkov A.V., Gorbachev O.V.

Fast digital algorithms for computing amplitude spectrum estimates based on the sign-function analog stochastic quantization of the stochastic processes. In order to increase the statistical evaluation of the amplitude spectrum stability is used the method of averaging the results of Fourier transform pseudo-ensemble of sign-function signal segment, which is formed in the course of the sign-function analog stochastic quantization. The results of experimental calculations of amplitude spectrum estimations are presented for the multi-component model of harmonics in the additive noise for one, three, seven and twelve segments.

Key words: harmonic analysis, Fourier transform, random process, amplitude spectrum, sign-function analog-stochastic quantization, fast algorithm.

Ключевые слова: гармонический анализ, преобразование Фурье, случайный процесс, спектр амплитуд, знаковое аналого-стохастическое квантование, быстрые алгоритмы.

Введение

Гармонический анализ является одним из наиболее эффективных инструментов исследования случайных процессов (СП). В ходе гармонического анализа осуществляется оценивание спектра амплитуд, который позволяет получить представление о распределении мощности СП по дискретным частотам составляющих его гармоник. С прикладной точки зрения это имеет важнейшее значение, в частности, для диагностики и неразрушающего контроля текущего состояния технических систем, когда дискретные компоненты оцениваются на фоне случайных возмущений.

В настоящее время гармонический анализ обычно предполагает реализацию процедур обработки наблюдаемой реализации СП в цифровом виде. При этом широкое применение получило прямое дискретное преобразование Фурье [1]. На основе данного преобразования разработаны различные методы и подходы для цифрового оценивания гармонических компонент СП. Однако существует проблема, заключающаяся в том, что при анализе многокомпонентных широкополосных СП для вычисления дискретного спектра амплитуд классические цифровые алгоритмы гармонического анализа даже при использовании быстрого преобразования Фурье могут потребовать существенных временных затрат на обработку многозарядных отсчетов,

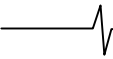
Разработан цифровой алгоритм вычисления оценок спектра амплитуд на основе знакового аналого-стохастического квантования исследуемых случайных процессов. Для повышения статистической устойчивости оценивания спектра амплитуд используется метод усреднения результатов Фурье-преобразования псевдоансамбля сегментов знакового сигнала, который формируется в ходе выполнения знакового аналого-стохастического квантования. Приведены результаты экспериментального вычисления оценок спектра амплитуд для многокомпонентной модели гармонических составляющих в аддитивном шуме по одному, трем, семи и двенадцати сегментам.

формируемых в результате выполнения традиционного аналого-цифрового преобразования, основу которого составляют процедуры равномерной дискретизации во времени и многоуровневого квантования. Данное обстоятельство приводит к необходимости разработки новых цифровых алгоритмов гармонического анализа, позволяющих упростить выполнение преобразования Фурье и снизить вычислительную нагрузку оценивания дискретного спектра амплитуд.

Предлагаемый подход

Получить эффективное решение упрощения выполнения цифровых процедур гармонического анализа можно за счет использования в качестве первичного преобразования исследуемого СП $X(t)$ знакового аналого-стохастического квантования. Данный вид квантования основан на формировании знакового сигнала [2-4]:

$$z(t) = \begin{cases} -1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi(t) < 0; \\ +1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi(t) \geq 0. \end{cases}, \quad (1)$$



где $\overset{\circ}{x}(t)$ – центрированная, т.е. имеющая нулевое математическое ожидание, наблюдаемая реализация исследуемого многокомпонентного СП $X(t)$; $\xi(t)$ – вспомогательный случайный процесс (ВСП), который выполняет функцию стохастического порога квантования.

ВСП $\xi(t)$ принимает значения в пределах интервала $-\xi_{\max} \leq \xi(t) \leq +\xi_{\max}$ и имеет равномерное распределение. Здесь $\xi_{\max} \geq |\overset{\circ}{x}(t)|_{\max}$, где $|\overset{\circ}{x}(t)|_{\max}$ – максимально возможное по абсолютной величине значение, которое может принять $\overset{\circ}{x}(t)$.

Согласно предложенному в [5-9] подходу, разработанному на основе знакового аналого-стохастического квантования, в ходе гармонического анализа оценки коэффициентов Фурье вычисляются в пределах интервала времени $0 \leq t \leq T$ с шагом дискретизации по частоте $f_0 = T^{-1}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{a}_k = 2\xi_{\max} T^{-1} \int_0^T z(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt ; \\ \hat{b}_k = 2\xi_{\max} T^{-1} \int_0^T z(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt ; \end{cases} \quad (2)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, K$; K – число подлежащих оцениванию гармонических компонент с дискретными частотами kf_0 .

В [5] показано, что оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k являются несмещенными и состоятельными. В соответствии со свойством состоятельности для дисперсий $D[\hat{a}_k]$ и $D[\hat{b}_k]$ имеем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D[\hat{a}_k] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} D[\hat{b}_k] = 0. \quad (3)$$

Предельные соотношения (3) свидетельствуют о том, что оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k при $T \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к искомым коэффициентам Фурье. Исходя из этого, для уменьшения их дисперсий используем метод сегментирования и усреднения, который, в частности, описан в работе [10]. Согласно этому методу будем вычислять оценки \hat{a}_k и \hat{b}_k по отдельным сегментам знакового сигнала $z(t)$ с последующим усреднением полученных результатов.

На рис.1 представлена иллюстрация результата процедуры сегментирования знакового сигнала $z(t)$. Сегменты $z(m, t)$, длительность каждого из которых

равна T , сдвинуты во времени друг относительно друга на значение T_0 и связаны со знаковым сигналом $z(t)$ соотношением:

$$z(m, t) = z(t + (m-1)T_0), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (4)$$

где M число сегментов.

В приведенном на рис. 1 примере $T_0 = T/3$, т.е. имеет место частичное перекрытие сегментов. Целью такого формирования сегментов является увеличение их числа при заданной или ограниченной общей продолжительности времени гармонического анализа T_A .

В соответствии с (2) оценки коэффициентов ряда Фурье \hat{a}_k и \hat{b}_k в процессе гармонического анализа для каждого из сегментов $z(m, t)$ в пределах интервала времени его формирования $(m-1)T_0 \leq t \leq (m-1)T_0 + T$ будем искать в следующем виде:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k,m} = 2\xi_{\max} T^{-1} \int_{(m-1)T_0}^{(m-1)T_0+T} z(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt ; \\ \hat{b}_{k,m} = 2\xi_{\max} T^{-1} \int_{(m-1)T_0}^{(m-1)T_0+T} z(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt . \end{cases} \quad (5)$$

Оценки амплитудного спектра будем вычислять следующим образом:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{A}_{k,m} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\hat{a}_{k,m}^2 + \hat{b}_{k,m}^2}. \quad (6)$$

Знаковый сигнал $z(t)$ ограничен по уровню и его значения строго последовательно сменяют друг друга во времени. Это позволяет каждый сегмент $z(m, t)$ однозначно представить в дискретной форме. Для этого достаточно знать только одно его начальное значение $z((m-1)T_0)$ и множество отсчетов времени t_i^z , в который знаковый сигнал $z(t)$ пересекает нулевой уровень (т.е. меняют свое текущее значение на противоположенное) в пределах интервала времени формирования этого сегмента. В соответствии с этим, введя предварительно обозначения $t_{v(m)}^z = (m-1)T_0$ и $t_{p(m)}^z = (m-1)T_0 + T$, будем иметь M множеств, представляющих собой описание в дискретной форме сегментов $z(m, t)$:

$$\{z(t_{v(m)}^z); t_i^z\}, \quad \text{где } 1 \leq m \leq M \text{ и } v(m) \leq i \leq p(m). \quad (7)$$

Индексы $v(m)$ и $p(m)$ являются целыми числами и обозначены именно так, чтобы показать их зависимость от номера сегмента $z(m, t)$.

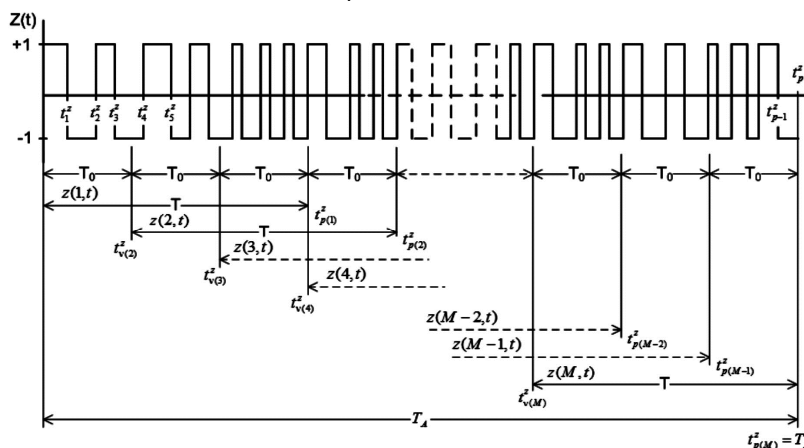


Рис. 1. Сегментирование знакового сигнала $z(t)$

Принимая во внимание, что для каждого из сегментов $z(m, t)$ в пределах интервалов времени $t_i^z \leq t \leq t_{i+1}^z$, где $v(m) \leq i \leq p(m) - 1$, его значения остаются постоянными и равны только «-1» или «+1», интегралы в (5) могут быть представлены в виде суммы интегралов:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k,m} = 2\xi_{\max} T^{-1} z(t_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)-1} (-1)^{i-v(m)} \int_{t_i^z}^{t_{i+1}^z} \cos(2\pi k f_0 t) dt; \\ \hat{b}_{k,m} = 2\xi_{\max} T^{-1} z(t_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)-1} (-1)^{i-v(m)} \int_{t_i^z}^{t_{i+1}^z} \sin(2\pi k f_0 t) dt. \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что интегралы в (8) могут быть вычислены аналитически. Тогда после интегрирования получаем:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k,m} = -2\alpha_k z(t_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sin(2\pi k f_0 t_i^z); \\ \hat{b}_{k,m} = 2\alpha_k z(t_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \cos(2\pi k f_0 t_i^z); \end{cases} \quad (9)$$

$$\alpha_k = \frac{\xi_{\max}}{k\pi} \text{ и } \lambda_i = \begin{cases} 1, & i = v(m) \text{ и } i = p(m); \\ 2, & v(m) + 1 \leq i \leq p(m) - 1. \end{cases}$$

Оценки спектра квадрата амплитуд будут вычисляться следующим образом:

$$\hat{A}_{k,m}^2 = \hat{a}_{k,m}^2 + \hat{b}_{k,m}^2 = S 2\alpha_k^2 \times \left(\mathcal{G}_m + \sum_{i=v(m)}^{p(m)-1} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sum_{j=i+1}^{p(m)} (-1)^{j-v(m)} \lambda_j \cos 2\pi k f_0 t_{j,i}^z \right), \quad (10)$$

где $\mathcal{G}_m = 2(p(m) - v(m)) - 1$ и $t_{j,i}^z = t_j^z - t_i^z$.

Для того чтобы иметь возможность использовать (9) и (10) на практике перейдем к числовому представлению дискретных отсчетов времени $\{t_i^z\}$. Согласно классическому подходу к цифровому представлению интервалов времени будем иметь:

$$\eta_i^z = \text{int}[t_i^z / \Delta t],$$

где $\text{int}[\dots]$ – оператор определения целой части числа в квадратных скобках; Δt – период счетных импульсов.

В результате получаем множество целых чисел $\{\eta_i^z\}$. При этом $N = \text{int}[T / \Delta t]$ и $N_0 = \text{int}[T_0 / \Delta t]$. В соответствии с этим будем иметь:

$$\eta_{v(m)}^z = (m-1)N_0 \text{ и } \eta_{p(m)}^z = (m-1)N_0 + N.$$

В итоге (9) и (10) примут вид:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k,m} = -2\alpha_k z(\eta_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sin(2\pi k f_0 \eta_i^z); \\ \hat{b}_{k,m} = 2\alpha_k z(\eta_{v(m)}^z) \sum_{i=v(m)}^{p(m)} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \cos(2\pi k f_0 \eta_i^z); \end{cases} \quad (11)$$

$$\hat{A}_{k,m}^2 = 2\alpha_k^2 \times \left(\mathcal{G}_m + \sum_{i=v(m)}^{p(m)-1} (-1)^{i-v(m)} \lambda_i \sum_{j=i+1}^{p(m)} (-1)^{j-v(m)} \lambda_j \cos 2\pi k f_0 \eta_{j,i}^z \right), \quad (12)$$

где $\eta_{j,i}^z = \eta_j^z - \eta_i^z$.

Соотношения (11) и (12) представляют собой цифровые алгоритмы вычисления дискретных оценок $\hat{a}_{k,m}$,

$\hat{b}_{k,m}$ и $\hat{A}_{k,m}^2$ с частотами $k f_0$. Они не требуют выполнения многоразрядных цифровых операций умножения. Хорошо видно, что основными операциями этих алгоритмов являются арифметические операции суммирования и вычитания фильтрующих функций \sin и \cos . Данное обстоятельство ведет к повышению быстродействия выполнения процедур гармонического анализа.

Эксперимент

На основе алгоритмов (11) и (12) был разработан специализированный программный модуль, предназначенный для функционирования в составе комплексного программного обеспечения измерительной системы для оперативного статистического анализа многокомпонентных процессов.

Для проверки метрологических характеристик разработанных алгоритмов были проведены экспериментальные исследования на основе имитационного моделирования процедуры аналого-стохастического квантования.

При этом модель централизованной реализации $x(t)$ анализируемого СП представляла собой сумму независимых в статистическом смысле гармонических составляющих в аддитивном белом шуме $e(t)$, т.е.

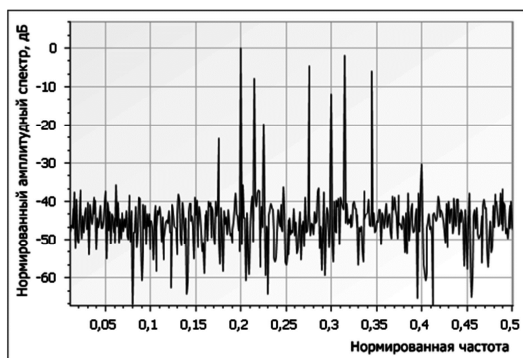
$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k^H \cos(2\pi f_k^H t + \varphi_k) + e(t).$$

Таблица 1. Параметры модели реализации $x(t)$

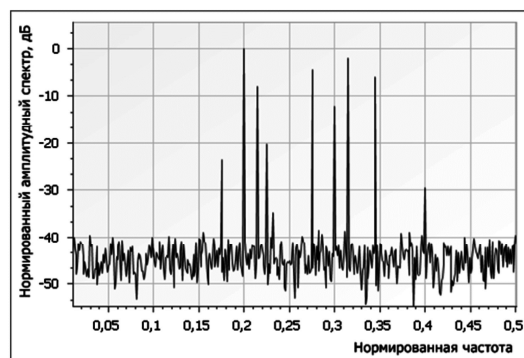
Номер гармонической составляющей, k	A_k^H	f_k^H	A_k^2 / A_{\max}^2 , дБ
1	0,07	0,175	-23,10
2	1,0	0,2	0
3	0,4	0,215	-7,96
4	0,1	0,225	-20,00
5	0,6	0,275	-4,43
6	0,25	0,3	-12,04
7	0,8	0,315	-1,94
8	0,5	0,345	-6,02
9	0,03	0,4	-30,46

Гармонические составляющие генерировались с частотами $f_k^H \in]0; 0,5]$, которые интерпретировались как нормированные $f_k^H = f_k / 2F_{\max}$, где частота F_{\max} рассматривается как верхняя граничная частота диапазона, в пределах которого осуществляется гармонический анализ. Использование в ходе экспериментальных исследований понятия нормированных частот объясняется тем, что это обеспечивает постоянство частотного диапазона представления результатов гармонического анализа моделей СП, имеющих в априори различные частотные диапазоны. Амплитуды гармонических составляющих A_k^H принимались равными от нуля до единицы и также интерпретировались как нормированные. Начальные фазы φ_k гармонических составляющих задавались генератором равномерно распределенных величин из интервала $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$. Аддитивный шум $e(t)$ представлял собой белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

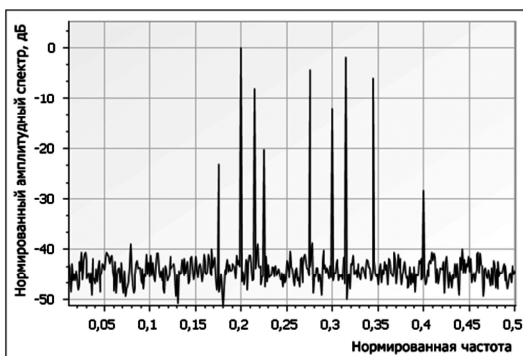
В частности, модель реализации $x(t)$ содержала девять гармонических составляющих, параметры которых приведены в табл. 1. На рис. 2 представлены оценки



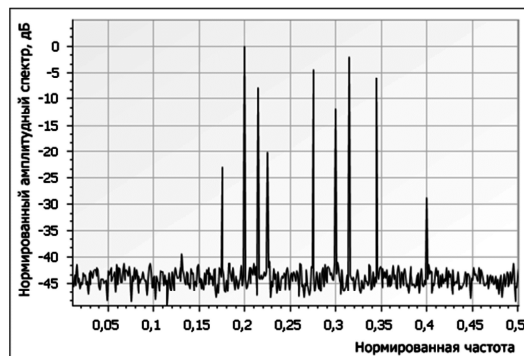
а) один сегмент



б) три сегмента



в) семь сегментов



г) двенадцать сегментов

Рис. 2. Оценка спектра амплитуд

спектра амплитуд в децибелах, полученные в результате обработки одного, трех, семи и двенадцати сегментов. При этом обработка сегментов проводилась с их половинным перекрытием.

Нетрудно видеть, что результаты моделирования хорошо согласуются с теоретическими значениями параметров гармонических составляющих модели. При этом с увеличением числа обрабатываемых сегментов наблюдается устойчивая тенденция к улучшению разрешения и идентификации гармонических составляющих в белом шуме. Уже для трех сегментов имеем однозначное разрешение по частоте гармонических составляющих для данной модели СП. На графике, полученном для семи сегментов, положение в спектре всех девяти гармонических составляющих точно соответствует их исходным значениям. Ложных спектральных пиков в спектре не наблюдается, также не наблюдается расщепление спектральных линий. Каждая спектральная линия четко различима, и сильные гармонические составляющие не маскируют слабые. Последний график (для двенадцати сегментов) дает визуальное представление о возможности существенного снижения влияния белого шума на результаты анализа с увеличением числа сегментов.

Заключение

Таким образом, полученные результаты моделирования, позволяют сделать вывод о том, что с помощью разработанных алгоритмов можно с высокой точностью и разрешением по частоте осуществлять цифровой гармонический анализ многокомпонентных СП. При этом практическая реализация данных алгоритмов не требует выполнения многочисленных операций цифрового умножения многозарядных отсчетов наблюдаемых реализаций СП, что обеспечивает их более высокую вычислительную

эффективность по сравнению с классическими цифровыми процедурами гармонического анализа. Это существенно расширяет область возможного применения разработанных алгоритмов для решения задач, связанных с необходимостью проведения гармонического анализа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-00269-А).

Литература

1. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа. – СПб.: Лань, 2012. – 304 с.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2 т. Т.1. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
3. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с.
4. Якимов В.Н. Обобщенная математическая модель двухуровневого знакового преобразования // Техника машиностроения. – 2000. – №4. – С. 72-74.
5. Якимов В.Н. Частотный анализ дискретных составляющих колебательных процессов // Технология машиностроения. – 2001. – № 5. – С. 32-36.
6. Якимов В.Н. Цифровой гармонический анализ многокомпонентных случайных процессов // Измерительная техника. – 2006. – №4. – С. 22-26.
7. Yakimov V.N. Digital harmonic analysis of multicomponent random processes // Measurement Techniques. – Publisher: Springer US. 2006. Vol.49, № 4. P. 341-347.
8. Якимов В.Н., Горбачев О.В. Программно-аппаратное обеспечение системы оценки амплитудного спектра многокомпонентных процессов // Приборы и техника эксперимента. – 2013. – № 5. – С. 49-55.
9. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the amplitude spectrum evaluating system for multicomponent processes // Instruments and Experimental Techniques. – Publisher: Springer US. 2013. Vol.56, № 5. P. 540-545.
10. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.