

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В НЕЛИНЕЙНОМ АКТИВНОМ ФИЛЬТРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Решетняк С.А., д.ф-м.н., профессор кафедры телекоммуникационных систем Московского технологического университета (МИРЭА), e-mail: reshets@bk.ru;

Третьяков Г.Н., к.т.н., профессор кафедры телекоммуникационных систем Московского технологического университета (МИРЭА), e-mail: gennady.tretyakov@rambler.ru.

ABOUT AUTO OSCILLATIONS IN A NON LINEAR ACTIVE FILTER OF SECOND ORDER

Reshetnyak S.A., Tretyakov G.N.

A non linear active filter of second order was researched by numerical way. The condition of emergence of auto oscillations and their period in dependence of the filter parameters was found. Euler method of numerical simulation of non-linear second-order differential equations, convenient to signal spectral analysis of the auto oscillations was developed. Satisfactory agreement is obtained for the results of numerical analysis and formulas for period of auto oscillations.

Key words: non linear active filter of second order, auto oscillations, conditions for the generation.

Ключевые слова: активный нелинейный фильтр второго порядка, автоколебания, условия генерации.

Введение

Известно, что существует взаимодействие между гармоническими сигналами и шумом в процессе их прохождения через нелинейные фильтры [1-3]. Это взаимодействие при определенных условиях приводит к возникновению детально исследованного явления стохастического резонанса [1-2] и эффекта стохастической фильтрации (СФ) [3]. В радиотехнике эффект СФ вызывает наибольший интерес, так как он характеризуется превышением выходного отношения сигнал/шум над входным отношением. Экспериментальное подтверждение СФ было получено в результате исследований нелинейного электрического фильтра первого порядка [4]. К настоящему времени эффект СФ исследован более детально в фильтре первого порядка [4-7], чем в фильтре второго порядка [8]. Процессы взаимодействия сигнала и шума в фильтре второго порядка могут протекать по-разному в зависимости от его начального состояния [8], которое может характеризоваться либо состоянием покоя, либо состоянием развитых автоколебаний. Данная работа посвящена исследованию режима автоколебаний, определению условий их возникновения, периода и других его свойств.

Рассмотрим фильтр второго порядка, схема которого изображена на рис. 1.

Здесь нелинейный элемент (Н) содержит два одинаковых туннельных диода (ТД) с постоянными источниками напряжения смещения E .

В случае замкнутых входных полюсов фильтра воздействие на него отсутствует, и напряжение u на ёмкости подчиняется уравнению

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + [RC + L \frac{dI}{du}] \frac{du}{dt} + RI(u) + u = 0, \quad (1)$$

Путем цифрового моделирования исследован нелинейный активный фильтр второго порядка. Найдено условие возникновения генерации автоколебаний и их период в зависимости от параметров фильтра. Разработан метод Эйлера численного решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, удобный в спектральном анализе автоколебаний. Получено удовлетворительное совпадение результатов численного анализа и полученной формулы для периода автоколебаний.

где $I(u) = i_d(E + u) - i_d(E - u)$ – ток через нелинейный элемент, $i_d(u)$ – вольт-амперная характеристика отдельного туннельного диода N -типа.

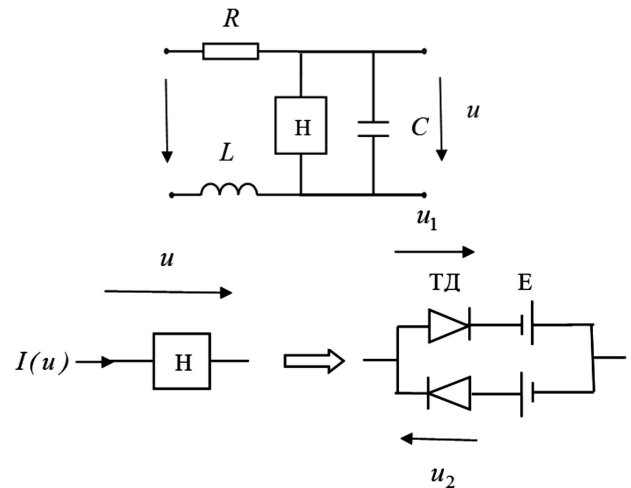


Рис. 1.

Так как $I(-u) = -I(u)$, то ряд по степеням переменной u тока $I(u)$ содержит только члены с нечётными степенями u . В [4] было установлено, что в рабочей области изменения тока $I(u)$ можно ограничиться рассмотрением только первых двух членов ряда. При выборе напряжения смещения E в области отрицательных сопротивлений туннельного диода первый член данного ряда становится отрицательной величиной, поэтому

$$I(u) = -Au + Bu^3,$$

где $A = -\left. \frac{dI}{du} \right|_{u=0} = 2 \left. \frac{di_d}{du} \right|_{u=E}$, $B = \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 I}{du^3} \right|_{u=0}$.

После введения в (1) масштабных значений напряжения $u_M = 1/\sqrt{RB}$ и времени $t_M = RC$ приходим к безразмерному уравнению (2):

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma(x) \frac{dx}{dt} + W'(x) = 0,$$

$$\mu = \frac{L}{R^2 C}, \quad \gamma(x) = 1 + \mu(-AR + 3x^2), \quad (2)$$

$$W'(x) = \frac{dW}{du} = (1 - AR)x + x^3.$$

Данное уравнение совпадает с описанием свободных нелинейных колебаний частицы с массой μ и нелинейным коэффициентом трения $\gamma(x)$ в потенциальном поле $W(x)$. Применительно к рассматриваемому фильтру величину μ можно считать параметром инерционности фильтра. Для решения (2) его следует дополнить начальными условиями по координате x и скорости $v = dx/dt$.

Рассмотрим начальную стадию развития генерации с ненулевыми начальными условиями, которые в общем случае определяются мощностью теплового шума. Для малых значений x из уравнения (2) имеем

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - \mu AR) \frac{dx}{dt} + (1 - AR)x = 0.$$

Из определения корней соответствующего характеристического уравнения следует, что любое малое начальное значение x со временем нарастает, если коэффициент трения принимает отрицательные значения или

$$\mu AR > 1, \quad L > RC/A. \quad (3)$$

Отсюда следует, что для возникновения автоколебаний в фильтре необходимо выбирать величину индуктивности выше некоторого порогового значения RC/A . Если неравенство (3) не выполняется, то начальное состояние фильтра соответствует практически нулевым начальным значениям x и скорости v , т.е. покою.

Принимая во внимание тесную аналогию процессов в фильтре и поведением частицы в потенциальном поле, будем функцию $W(x)$ называть потенциальной функцией. Для рассматриваемого фильтра она имеет вид:

$$W(x) = (1 - AR) \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

В зависимости от величины сопротивления нагрузки R вид $W(x)$ может быть разным. При $R < A^{-1}$ она имеет один минимум в точке $x = 0$, т.е. является монотонно-стабильной. При $R = A^{-1}$ она имеет критический вид $W(x) = x^4/4$. Для значений $R > A^{-1}$ потенциальная функция имеет два минимума, или два устойчивых положения равновесия в точках $x = \pm\sqrt{AR-1}$, в связи с чем её называют бистабильной. Устойчивые положения равновесия разделены потенциальным барьером, вы-

сота которого $W_0 = (AR - 1)^2 / 4$.

Поскольку аналитические методы решения уравнения (2) развиты недостаточно, то ниже мы остановимся на численных методах его анализа. Прежде всего, отметим, что известный метод Рунге-Кутты требует значительных временных затрат при исследовании статистических закономерностей с большим числом реализаций шума. На наш взгляд, в данном случае наиболее эффективным методом анализа является метод Эйлера-Коши, который ранее успешно применялся для исследования взаимодействия сигнала и шума в нелинейном фильтре первого порядка [7].

Уравнение (2) представим в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\mu} [\gamma(x)v + W'(x)]. \quad (4)$$

Выбор шага решения по времени Δt системы (4) определяется из условия того, что он должен быть существенно меньше периода автоколебаний. При этом значения выходного процесса в точках отсчётов времени t_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt,$$

$$v_{n+1} = v_n + (AR - \frac{1}{\mu})(x_{n+1} - x_n) -$$

$$-x_{n+1}^3 + x_n^3 - \frac{1}{\mu} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W'(x) dt,$$

где $x_n = x(t_n)$, $v_n = v(t_n)$.

Заметим, что формулы (5) являются точными. Оценка в них интегралов по методу трапеций приводит к приближенным рекуррентным формулам:

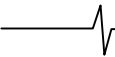
$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}(v_{n+1} + v_n),$$

$$v_{n+1} = v_n + (AR - \frac{1}{\mu})(x_{n+1} - x_n) -$$

$$-x_{n+1}^3 + x_n^3 - \frac{\Delta t}{2\mu} [W'(x_{n+1}) + W'(x_n)]. \quad (6)$$

Для произвольных потенциальных функций $W(x)$ формулы (6) дают основу построения итерационных схем решения системы (4). Однако в данном случае построение итерационных схем не понадобилось. Дело в том в том, что систему уравнений (6) нетрудно привести к кубическому уравнению для x_{n+1} при известных x_n и v_n , которое всегда имеет только один легко определяемый вещественный корень. Таким образом, рекуррентные формулы позволяют находить все значения x_{n+1} и v_{n+1} при известных начальных условиях.

Ниже основное внимание уделялось фильтрам с критическими потенциалами вида ($R = A^{-1}$) и различным значениям параметра μ . Найденные результаты сравнивались с решениями на основе известных методов



Рунге-Кутты. Временные зависимости $x = x(t)$ были настолько близки, что их невозможно отличить на представленных ниже графиках.

Приведём результаты численного анализа с шагом $\Delta t = 0,05$ и числом точек отсчётов по времени $N = 2^{15}$. Для $\mu = 2$ и начальных условий $x(0) = 0, v(0) = 0,01$ на рис. 2а и 2б представлены соответственно решение системы (6) и фазовый портрет развития автоколебаний.

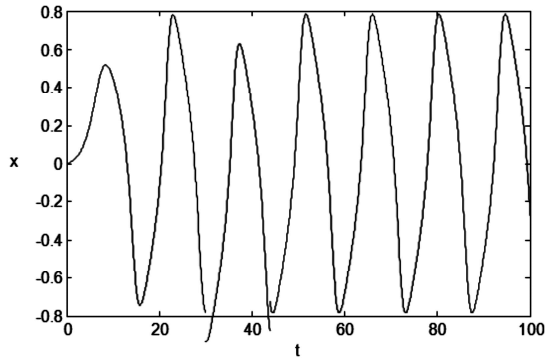


Рис. 2 а.

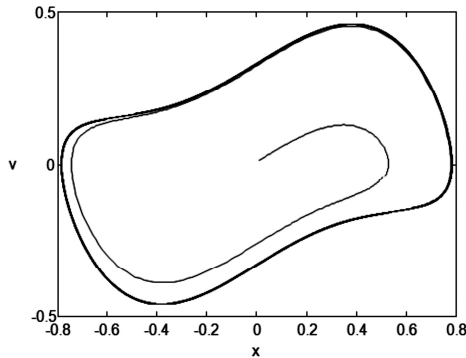


Рис. 2 б.

Из рис. 2б видно, что с течением времени траектория на фазовой плоскости приближается к предельному циклу, отвечающему развитым автоколебаниям в фильтре. Длительность переходного процесса в этом фильтре имеет порядок одного периода автоколебаний. В спектре мощности сигнала присутствует основная наиболее интенсивная гармоника и несколько боковых, имеющих существенно меньшую интенсивность. Частота основной гармоники предопределяет период автоколебаний.

В случае больших значений параметра μ автоколебания становятся существенно нелинейными и аналогичны релаксационным колебаниям в классическом генераторе Ван-дер-Поля. На рис. 3а представлено решение (6) для значения $\mu = 50$ и указанных ранее начальных условий. На рис. 3б изображено развитие этих колебаний на фазовой плоскости.

Полученные результаты показывают, что с ростом параметра инерционности μ период автоколебаний увеличивается. Длительность переходного процесса – также порядка одного периода колебаний. В спектре сигнала кроме основной гармоники с небольшими боковыми составляющими появляются гармоники с комбинационными частотами.

Проведенный в работе анализ фильтра с потенциалом критического вида установил, что решения системы

(6) для $\mu < 1$ с ненулевыми начальными условиями затухают со временем. Автоколебания в фильтре возникают лишь при $\mu > 1$, т. е. при выполнении условия (3). Найденная в стационарном режиме зависимость амплитуды A нелинейных колебаний от параметра μ (μ) изображена на рис. 4. При этом амплитуда и период автоколебаний не зависели от начальных условий. Для больших значений начальной скорости v траектории движения приближаются к предельному циклу с внешней стороны, т.е. он является 'аттрактором'.

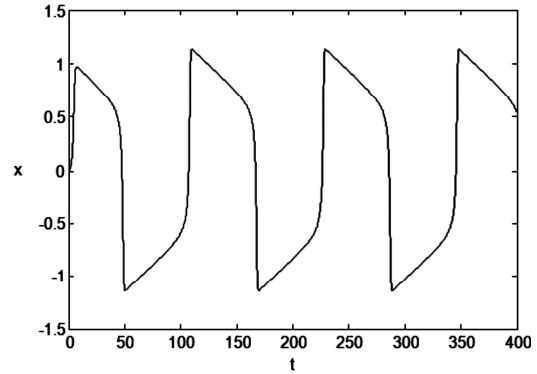


Рис. 3 а.

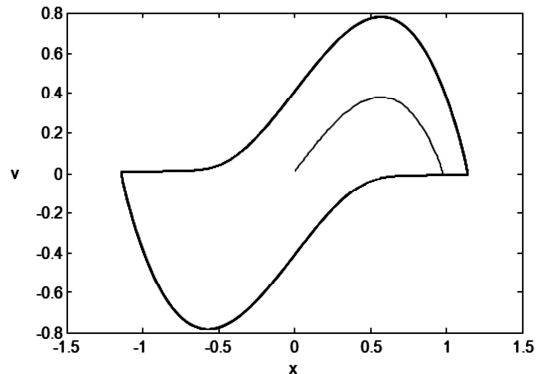


Рис. 3 б.

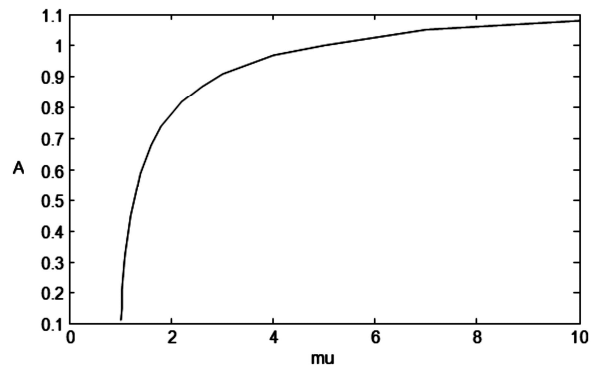


Рис. 4.

В ходе численного моделирования необходима оценочная формула для периода автоколебаний T_a , которая требуется для правильного выбора шага решения по времени Δt . С целью получения данной формулы рассмотрим первое уравнение системы (4), из которого следует

$$T_a = 2 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{v(x)}, \quad (7)$$

где x_0 – правая точка поворота на фазовой траектории

или наибольшая амплитуда нелинейных колебаний, $v(x)$ – положительная ветвь скорости предельного цикла.

Основной вклад в интеграл (7) даёт область интегрирования вблизи точек $\pm x_0$, где скорость v близка к нулю. С учётом малых значений v из второго уравнения системы (4) имеем

$$\frac{dv}{dx} \approx -\frac{1}{\mu v} W'(x), \quad \frac{1}{2} \mu v^2 + W(x) \approx W(x_0).$$

Отсюда приходим к следующей оценке периода колебаний:

$$T_a \approx 4 \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{\mu}}{2 \sqrt{W(x_0) - W(x)}} dx =$$

$$4 \int_0^{x_0} \sqrt{2\mu} \frac{dx}{\sqrt{x_0^4 - x^4}} \cong \frac{4\sqrt{\mu}}{x_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{2\pi\sqrt{\mu}}{x_0}.$$

Если положение x_0 точки поворота определить из условия на коэффициент трения $\gamma(x_0) = 0$, то приходим к следующей оценочной формуле на период T_a и частоту f_a автоколебаний:

$$f_a = \frac{1}{T_a} \approx \frac{\sqrt{\mu-1}}{2\pi\sqrt{3}\mu} \cong 0.1 \frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu}. \quad (8)$$

На рис. 5 приведены зависимости частоты автоколебаний от параметра μ , где сплошная линия – результат численного анализа, а пунктирная кривая – соответствует оценочной формуле (8). Обе они имеют одинаковый характер поведения, т.е. с ростом μ частота f_a сначала растёт в области $1 < \mu < 2$, а затем падает. Максимальное значение f_a достигается при $\mu = 2$, где наблюдается наибольшее расхождение порядка 40 % между теорией и численным счётом.

Таким образом, проведенное исследование показало, что автоколебания в рассматриваемом активном фильтре второго порядка возникают при величинах индуктивности выше порогового значения RC/A . При этом начальные условия не влияют на стационарное состояние установившихся автоколебаний. Разработанный в настоящей работе метод Эйлера-Коши даёт основу для численного моделирования процессов взаимодействия сигнала и шума при их прохождении через данный фильтр. На наш взгляд, он наиболее эффективен по сравнению с методом Рунге-Кутты по двум причинам. Во-первых, в нём находятся решения с одинаковым шагом по времени, что является необходимым условием в случае определения сигнальных спектров. Во-

вторых, он требует, по крайней мере, на порядок меньше времени счета для установления статистических закономерностей в исследовании эффекта СФ.

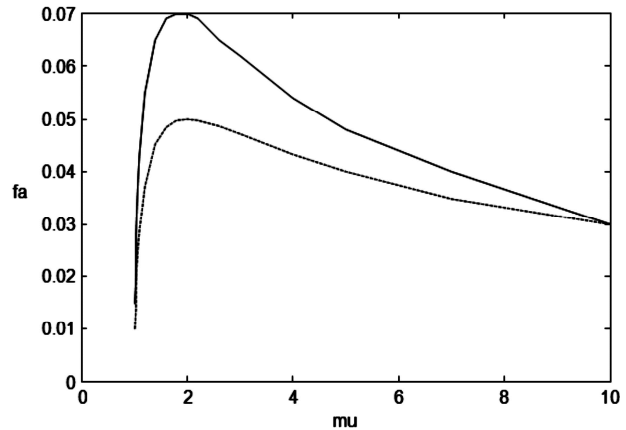


Рис. 5.

Литература

1. Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. // Stochastic resonance. Rev. of Mod. Phys., 1998, v.70, No.1, p. 223-287.
2. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. // УФН, 1999, т.169, №1, с.7-38.
3. Hanggi P., Inghiosa M.E., Fogliatti D., Bulsara A.B. Non-linear stochastic resonance: The saga of anomalous output-input gain // Phys. Rev. E, 2000, v.62, No.5, – p.6155-6163.
4. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Экспериментальная проверка теорий стохастического резонанса и фильтрации сигналов в электрической цепи с двумя туннельными диодами. // Научный вестник МИРЭА, 2007, №2(3), – с. 21-28.
5. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Стохастический резонанс и фильтрация сигналов в нелинейной электрической системе второго порядка. // Радиотехника, 2007, №9, – с.19-25.
6. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Теоретическое исследование эффекта стохастической фильтрации. // Радиотехника и электроника, 2013, т. 58, №4, с. 360-366.
7. Абоелазм М.А., Мельчаков В.Н., Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Исследование цифровой модели нелинейного активного фильтра первого порядка. // Цифровая обработка сигналов, 2014, №4, с. 68-72.
8. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. О стохастической фильтрации сигналов в нелинейных электрических системах. // Радиотехника и электроника, 2009, т. 54, № 11, с. 1369-1371.