

УДК 681.3.06

## МАСШТАБИРОВАНИЕ СТРУКТУР РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ В MATLAB

*Солонина А. И., к.т.н, доц., проф., Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, e-mail: as-io@yandex.ru.*

### THE SCALING OF RECURSIVE DIGITAL FILTERS IN MATLAB

*Solonina A.I.*

*Theoretical basis of scaling procedures in the second order sections (SOS) is well known. However this basis does not consider many problems related to modeling the procedures by MATLAB. The report contains some additional interpretations of the existing theory allowing the user to realize the above mentioned modeling.*

*General principles of scaling procedures in the fixed-point second order sections are described and main steps of scaling are substantiated. It is considered implementation of these principles for SOS with typical structures: Direct-form I, Direct-form II, Direct-form I transposed, Direct-form II transposed. Each of scaling stages is illustrated by a specific SOS example with two sections.*

*Analytical formulas for the own noise variance of IIR filters with different SOS structures after scaling are derived. New coefficient matrixes of equivalent system functions for MATLAB algorithm are formed.*

**Key words:** digital filters, fixed-point, structures, algorithm, scaling, own noise, MATLAB.

**Ключевые слова:** цифровые фильтры, структуры, алгоритм, фиксированная запятая, масштабирование, собственные шумы, MATLAB.

*Рассматриваются теоретические основы масштабирования каскадных структур рекурсивных фильтров в MATLAB, подтвержденные результатами моделирования, с оценкой дисперсии собственного шума после масштабирования.*

#### Введение

Как известно [1-4], в цифровых системах с фиксированной точкой взаимосвязанные эффекты квантования – шум АЦП, собственный шум цифровой системы, ошибки квантования коэффициентов и переполнения сумматоров – не позволяет формализовать нелинейный оператор в соотношении вход/выход цифровой системы, поэтому их исследуют отдельно для каждого из источников, в предположении об их независимости.

В предыдущей работе автора [5] шла речь об эффектах квантования, обусловленных умножителями, – собственном шуме цифровых систем. Была предложена эквивалентная линейная модель, на основе которой легко получены аналитические оценки собственного шума каскадных структур рекурсивных фильтров, и предложен простой алгоритм их расчета в MATLAB. При этом, однако, осталась за скобками процедура масштабирования каскадных структур, после которой следует уточнить оценки дисперсии собственного шума.

В настоящей работе будет восполнен этот пробел, и для этого потребуются рассмотреть эффекты квантования, обусловленные сумматорами, – ошибки переполнения сумматоров.

Ошибки переполнения сумматоров возникают в том случае, если результат сложения, представленный в формате расширенного слова, по модулю превосходит единицу и сохраняется в ячейке памяти в формате слова, при этом знаковый бит будет восприниматься как значащий, и результат операции окажется непредсказуемым.

В отличие от принципиально неустранимых собственных шумов цифровой системы, ошибки переполнения

сумматоров можно предотвратить либо минимизировать. Эти ошибки исследуют на линейной модели, в предположении, что остальные эффекты квантования отсутствуют.

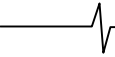
Если при вычислении суммы во внутреннем регистре (в формате расширенного слова) возникает переполнение, то при ее сохранении в ячейке памяти (в формате слова) результат автоматически заменяется, в зависимости от выбранного режима переполнения (Overflow Mode):

- Saturate (арифметика насыщения) – максимальным (по модулю) значением для формата слова;
- Wrap (модульная арифметика) – значением по модулю 2.

В структурах нерекурсивных цифровых фильтров режим переполнения вполне удовлетворительно минимизирует возможные искажения результата (отсчетов реакции).

Наиболее уязвимы к ошибкам переполнения сумматоров каскадные структуры рекурсивных цифровых фильтров. Применение одной лишь этой меры может привести к непредсказуемому и необратимому искажению результата вследствие обратных связей. Поэтому в каскадных структурах переполнения предотвращают либо минимизируют с помощью масштабирования (при минимизации сохраняется режим переполнения).

Теоретические основы масштабирования известны [1-4], однако для моделирования в MATLAB концептуальных понятий недостаточно. Необходима их систематизация и детализация на уровне алгоритма, не очевидная для пользователя, что и является целью настоящей работы.



Общая идея борьбы с переполнением сводится к его предотвращению в  $k$ -й точке структуры. Для того чтобы при ограниченном воздействии:

$$\max |x(n)| \leq 1$$

максимум модуля реакции:

$$\max |y_k(n)| = \max \left| \sum_{m=0}^{\infty} h_k(m) x(n-m) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|,$$

где  $h_k(n)$  – импульсная характеристика части структуры от входа до  $k$ -й точки, не превосходил единицу, на входе структуры ставится масштабирующий множитель  $1/s_k$  (умножитель):

$$\max |y_k(n)| \leq \frac{1}{s_k} \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)| \leq 1,$$

где значение  $1/s_k$  соответствует норме  $\|x\|_1$  ( $L1$ ) для импульсной характеристики:

$$s_k = \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|.$$

Масштабирование на основе этой нормы гарантирует отсутствие переполнений, однако платой оказывается существенное снижение уровня слабых сигналов.

На практике наибольшее распространение получила норма  $\|x\|_{\infty}$  (Linf) для АЧХ, наиболее простая для вычислений и гарантирующая отсутствие переполнений при гармоническом воздействии. Из определения частотной характеристики:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\omega T n}$$

следует, что

$$|H_k(e^{j\omega T})| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n) e^{-j\omega T n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_k(n)|,$$

откуда:

$$s_k = \max |H_k(e^{j\omega T})| = \max A_k(\omega),$$

где  $|H_k(e^{j\omega T})| = A_k(\omega)$  – АЧХ части структуры от входа до  $k$ -й точки.

Рассмотрим реализацию в MATLAB общей идеи масштабирования для каскадных структур.

### Масштабирование каскадных структур в MATLAB

Масштабирование каскадных структур с передаточной функцией

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left( \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^L H_k(z), \quad (1)$$

где  $G = b_{01} \cdot b_{02} \cdot \dots \cdot b_{0L}$ , выполняется после расстановки звеньев [5] и основано на следующих общих принципах:

– в каждом звене переполнение контролируется на выходе только того сумматора, где накапливается рекурсивная часть реакции, т.к. вследствие обратной связи оно может повлечь за собой неконтролируемое последующее переполнение;

– для предотвращения переполнения на выходе сумматора, масштабирующий множитель  $1/s_k$  учитывается на его входе;

– для того чтобы сохранить соответствие между уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на выходе сумматора добавляется множитель  $s_k$ ;

– для уменьшения дисперсии собственного шума каскадной структуры, масштабирующие множители  $1/s_k$  учитываются на входе предыдущего звена;

– явное масштабирование выполняется путем добавления множителей  $1/s_k$  и  $s_k$  в каскадную структуру;

– неявное масштабирование предполагает учет масштабирующих множителей в коэффициентах числителей передаточных функций звеньев для уменьшения дисперсии собственного шума каскадной структуры.

Проиллюстрируем их реализацию на примере 2-х каскадной структуры с передаточной функцией

$$H(z) = G \prod_{k=1}^2 \left( \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^2 H_k(z). \quad (2)$$

При прямой структуре звеньев (Direct-form I, SOS) и явном масштабировании выполняются следующие действия (рис. 1, а):

– в прямой структуре звена имеется только один сумматор, на выходе которого накапливается сумма нерекурсивной и рекурсивной части реакции. Для предотвращения (минимизации) переполнения на выходе сумматора, на его входе ставится масштабирующий множитель (умножитель):  $1/s_1$  – на входе первого звена,  $1/s_2$  – второго;

– для того чтобы сохранить соответствие между уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на выходе сумматора добавляется множитель:  $s_1$  – на выходе первого звена,  $s_2$  – второго;

– для уменьшения дисперсии собственного шума масштабирующий множитель  $1/s_2$  учитывается на входе предыдущего (первого) звена (рис. 1, б).

При неявном масштабировании (рис. 1, в) масштабирующие множители учитываются в коэффициентах числителей передаточных функций звеньев, и передаточная функция (2) принимает вид:

$$H(z) = \left( \prod_{k=1}^2 \frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) s_2 = \left( \prod_{k=1}^2 H'_k(z) \right) s_2, \quad (3)$$

где  $s_2$  – коэффициент усиления на выходе каскадной структуры (Output Gain), а соответствие с коэффициентами числителей  $H(z)$  (2) следующее:

$$b'_{01} = \frac{G}{s_1 s_2}; \quad b'_{11} = \frac{G}{s_1 s_2} b_{11}; \quad b'_{21} = \frac{G}{s_1 s_2} b_{21}; \quad (4)$$

$$b'_{02} = s_1; \quad b'_{12} = s_1 b_{12}; \quad b'_{22} = s_1 b_{22}.$$

Обобщая результат на  $L$ -каскадную структуру, получим передаточную функцию

$$H(z) = \left( \prod_{k=1}^L \frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) s_L = \left( \prod_{k=1}^L H'_k(z) \right) s_L, \quad (5)$$

где  $s_L$  – коэффициент усиления на выходе каскадной структуры (Output Gain).

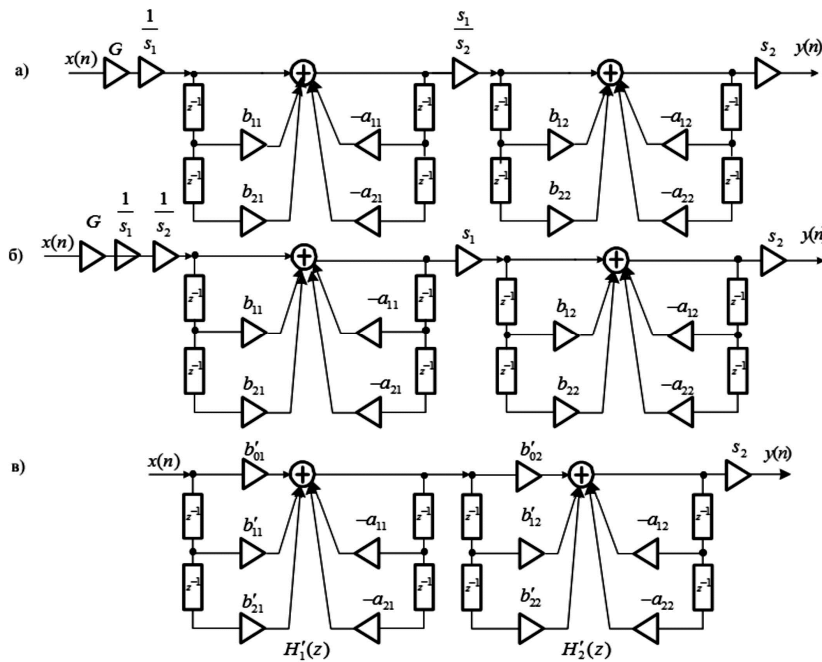


Рис. 1. Прямая структура звеньев: явное масштабирование (а); учет масштабирующего множителя в предыдущем звене (б); неявное масштабирование (в)

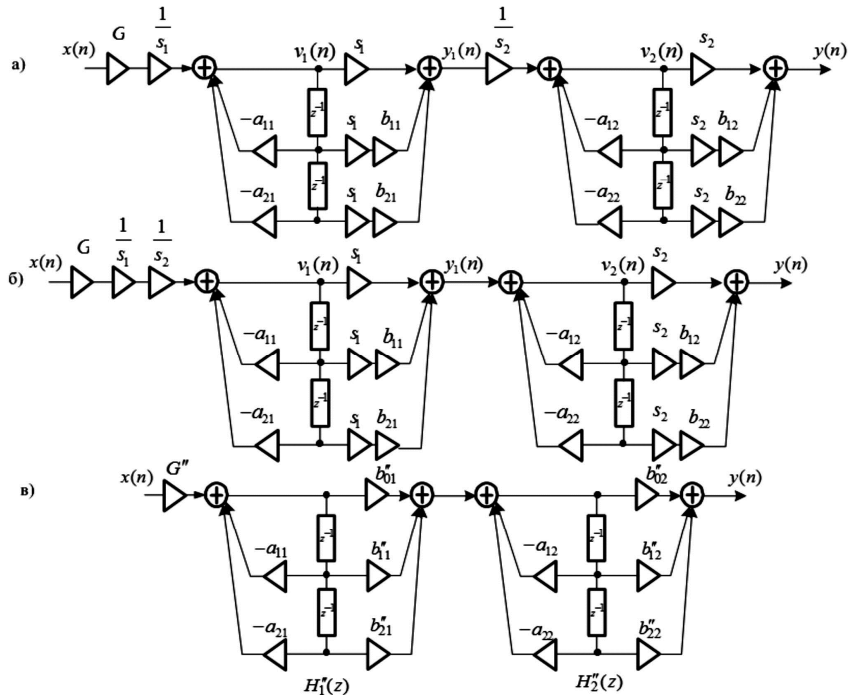


Рис. 2. Прямая каноническая структура звеньев: явное масштабирование (а); учет масштабирующего множителя в предыдущем звене (б); неявное масштабирование (в)

При прямой канонической структуре звеньев (Direct form II, SOS) и явном масштабировании выполняются следующие действия (рис. 2, а):

- в прямой канонической структуре звена имеется только один сумматор (левый), на выходе которого накапливается сумма рекурсивной части реакции; для предотвращения (минимизации) переполнения на выходе сумматора, на его входе ставится масштабирующий множитель (умножитель):  $1/s_1$  – на входе первого звена,  $1/s_2$  – второго;
- для того чтобы сохранить соответствие между

уровнями выходного и входного сигналов звена в заданном динамическом диапазоне, на выходе сумматора добавляется умножитель:  $s_1$  – на выходе первого звена (на всех ветвях),  $s_2$  – второго;

- для уменьшения дисперсии собственного шума масштабирующий множитель  $1/s_2$  учитывается на входе предыдущего (первого) звена (рис. 2, б).

При неявном масштабировании (рис. 2, в) масштабирующие множители учитываются в коэффициентах числителей передаточных функций звеньев, и передаточ-

ная функция (2) принимает вид:

$$H(z) = G'' \prod_{k=1}^2 \left( \frac{b_{0k}'' + b_{1k}'' z^{-1} + b_{2k}'' z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = G'' \prod_{k=1}^2 H_k''(z), \quad (6)$$

где  $G''$  – коэффициент усиления на входе каскадной структуры (Input Gain), а соответствие с коэффициентом усиления и коэффициентами числителей  $H(z)$  (2) следующее:

$$G'' = \frac{G}{s_1 s_2}; \quad b_{01}'' = s_1; \quad b_{11}'' = s_1 b_{11}; \quad b_{21}'' = s_1 b_{21}; \quad (7)$$

$$b_{02}'' = s_2; \quad b_{12}'' = s_2 b_{12}; \quad b_{22}'' = s_2 b_{22}.$$

Обобщая результат на  $L$ -каскадную структуру, получим передаточную функцию

$$H(z) = G'' \prod_{k=1}^L \left( \frac{b_{0k}'' + b_{1k}'' z^{-1} + b_{2k}'' z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right) = G'' \prod_{k=1}^L H_k''(z), \quad (8)$$

где  $G''$  – коэффициент усиления на входе каскадной структуры (Input Gain).

При прямой транспонированной структуре звеньев (Direct-form I transposed, SOS) после масштабирования передаточная функция будет представлена в виде (8), а при прямой канонической транспонированной (Direct-form II transposed, SOS) – в виде (5), в чем легко убедиться самостоятельно, сравнивая соответствующие структуры звеньев.

### Пример масштабирования структуры БИХ-фильтра

Проверим полученные соотношения для БИХ-фильтра, синтезированного в GUI FDATool.

Синтезируем БИХ-фильтр ФНЧ Золотарева-Кауэра (Elliptic) при заданных требованиях к АЧХ (дБ): частота дискретизации 2000 Гц, граничные частоты ПП и ПЗ – 500 и 700 Гц, максимально допустимое затухание в ПП 1 дБ, минимально допустимое затухание в ПЗ 40 дБ.

Получен 2-каскадный БИХ-фильтр, передаточная функция которого после расстановки звеньев в порядке возрастания их дисперсий собственного шума (рис. 3, Reordering со сброшенным флажком Scale) имеет вид (2):

$$H(z) = 0,1044 \frac{1 + 1,7021z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \times \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}, \quad (9)$$

где  $G = b_{01} \cdot b_{02}$  – произведение коэффициентов усиления звеньев.

Выберем прямую структуру звеньев (Direct-form I, SOS). После масштабирования на основе нормы Linf для АЧХ (рис. 3 с установленным флажком Scale) передаточная функция (9) примет вид (3), где коэффициенты числителей звеньев автоматически рассчитаны по формулам (4):

$$H(z) = \frac{0,1816 + 0,309z^{-1} + 0,1816z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \times \frac{0,575 + 0,5095z^{-1} + 0,575z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 0,9999. \quad (10)$$

Проверим соответствия (4). Определив значения  $s_1$  и  $s_2$ :

$$s_1 = b_{02}' = 0,575; \quad s_2 = \frac{G}{s_1 b_{01}'} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,1816} = 0,9998, \quad (11)$$

получим коэффициенты числителей:

$$b_{01}' = \frac{G}{s_1 s_2} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} = 0,1816;$$

$$b_{11}' = \frac{G}{s_1 s_2} b_{11} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} \cdot 1,7021 = 0,309;$$

$$b_{21}' = \frac{G}{s_1 s_2} b_{21} = \frac{0,1044}{0,575 \cdot 0,9998} \cdot 1 = 0,1816; \quad b_{02}' = s_1 = 0,575;$$

$$b_{12}' = s_1 b_{12} = 0,575 \cdot 0,886 = 0,5094;$$

$$b_{22}' = s_1 b_{22} = 0,575 \cdot 1 = 0,575.$$

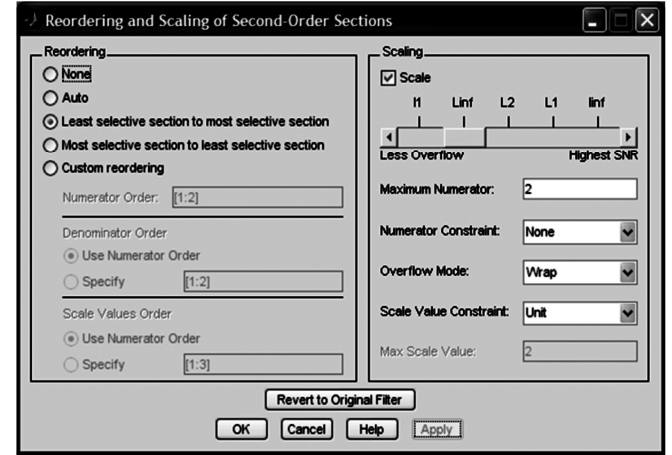


Рис. 3. Окно FDATool для расстановки звеньев (слева) и масштабирования (справа)

Выберем прямую каноническую структуру звеньев (Direct-form II, SOS). После масштабирования (рис. 3) передаточная функция (9) примет вид (6), где коэффициенты числителей звеньев автоматически рассчитаны по формулам (7):

$$H(z) = 0,58 \cdot \frac{0,1742 + 0,2966z^{-1} + 0,1742z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \times \frac{1,0331 + 0,9153z^{-1} + 1,0331z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}}. \quad (12)$$

Проверим соответствия (7). Определив значения  $s_1$ ,

$s_2$  и  $G''$ :

$$s_1 = b_{01}'' = 0,1742; \quad s_2 = b_{02}'' = 1,0331.$$

$$G'' = \frac{G}{s_1 s_2} = \frac{0,1044}{0,1742 \cdot 1,0331} = 0,5801, \quad (13)$$

получим коэффициенты числителей:

$$b_{11}'' = s_1 b_{11} = 0,1742 \cdot 1,7021 = 0,2966;$$

$$b_{21}'' = s_1 b_{21} = 0,1742 \cdot 1 = 0,1742;$$

$$b_{12}'' = s_2 b_{12} = 1,0331 \cdot 0,886 = 0,9153;$$

$$b_{22}'' = s_2 b_{22} = 1,0331 \cdot 1 = 1,0331.$$

Отметим, что после масштабирования АЧХ и импульсная характеристика БИХ-фильтра не изменятся, в чем легко убедиться самостоятельно.

### Расчет масштабирующих множителей

Рассмотрим расчет значений  $s_k$  на основе нормы  $\|x\|_\infty$  для АЧХ. Запишем АЧХ части каскадной структуры (1) из  $k$  звеньев:

$$|H(e^{j\omega T})| = G \prod_{i=1}^k |H_i(e^{j\omega T})|.$$

В соответствии с нормой  $\|x\|_{\infty}$ , значение  $s_k$  равно максимуму АЧХ части структуры от входа до  $k$ -й точки, где контролируется переполнение, следовательно:

$$s_k = G \max \prod_{i=1}^k A_i(\omega), \quad k=1, 2, \dots, L, \quad (14)$$

где  $A_i(\omega)$ ,  $i \neq k$ , – АЧХ  $i$ -го звена;  $A_i(\omega)$ ,  $i = k$ , – АЧХ части  $k$ -го звена от его входа до выхода сумматора, где контролируется переполнение.

Соотношение (14) описывает алгоритм расчета значений  $s_k$ , а именно:

$$s_1 = G \max A_1(\omega); \quad (15)$$

$$s_2 = G \max \{A_1(\omega)A_2(\omega)\}; \quad (16)$$

...

$$s_L = G \max \{A_1(\omega)A_2(\omega) \dots A_L(\omega)\},$$

где все АЧХ вычисляются в основной полосе частот.

Рассчитаем в MATLAB значения  $s_1$  и  $s_2$  при прямой структуре звеньев. В этом случае выход сумматора, где контролируется переполнение, является выходом звена, следовательно, в (15) и (16)  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$  – АЧХ звеньев:

```
% сетка нормированных частот
>> w = 0:pi/1000:pi;
% коэффициенты звена 1
>> b1 = [1 1.7021 1]; a1 = [1 -0.6106 0.3029];
% коэффициенты звена 2
>> b2 = [1 0.886 1]; a2 = [1 -0.0013 0.8093];
% коэффициент усиления
>> G = 0.1044;
% АЧХ звена 1
>> MAG1 = abs(freqz(b1,a1,w));
% значение s1
>> s1 = G*max(MAG1);
% АЧХ звена 2
>> MAG2 = abs(freqz(b2,a2,w));
% АЧХ произведения
>> MAG3 = abs(MAG1).*abs(MAG2);
% значение s2
>> s2 = G*max(MAG3);
s1 = 0.5749
s2 = 0.9999
```

Значения  $s_1$  и  $s_1$  практически совпали с (11).

Рассчитаем значения  $s_1$  и  $s_2$  при прямой канонической структуре звеньев. В этом случае выход сумматора, где контролируется переполнение, является выходом рекурсивной части звена, следовательно, в (15)  $A_1(\omega)$  – АЧХ рекурсивной части первого звена, а в (16)  $A_1(\omega)$  – АЧХ первого звена и  $A_2(\omega)$  – АЧХ рекурсивной части второго звена:

```
% сетка нормированных частот
>> w = 0:pi/1000:pi;
% коэффициенты рекурсивной части звена 1
>> b1r = [1 0 0]; a1 = [1 -0.6106 0.3029];
% коэффициент усиления
>> G = 0.1044;
% АЧХ рекурсивной части звена 1
```

```
>> MAG1 = abs(freqz(b1r,a1,w));
% значение s1
>> s1 = G*max(MAG1)
% коэффициенты звена 1
>> b1 = [1 1.7021 1]; a1 = [1 -0.6106 0.3029];
% АЧХ звена 1
>> MAG2 = abs(freqz(b1,a1,w));
% коэффициенты рекурсивной части звена 2
>> b2r = [1 0 0]; a2 = [1 -0.0013 0.8093];
% АЧХ рекурсивной части звена 2
>> MAG3 = abs(freqz(b2r,a2,w));
% АЧХ произведения
>> MAG4 = abs(MAG2).*abs(MAG3);
% значение s2
>> s2 = G*max(MAG4)
s1 = 0.1800
s2 = 1.0327
```

Значения  $s_1$  и  $s_1$  практически совпали с (13). В обоих случаях небольшие расхождения объясняются более высокой точностью вычислений в MATLAB.

### Нормирование коэффициентов

Нормирование коэффициентов числителей передаточных функций звеньев в каскадных структурах выполняется после масштабирования и основано на следующих принципах:

- нормирование выполняется в том случае, если хотя бы один из них превысил единицу (по модулю);
- нормируются коэффициенты всех звеньев к максимальному (по модулю) коэффициенту каждого звена;
- нормирующий множитель  $G_{\text{вых}}$ , равный произведению максимальных (по модулю) коэффициентов звеньев, добавляется на выходе каскадной структуры (Output Gain) для того чтобы нормирование не привело к изменению выходного сигнала.

При прямой структуре звеньев с передаточной функцией (5)  $G_{\text{вых}}$  умножается на  $s_L$ .

В приведенных примерах нормирование коэффициентов числителей следует выполнить в передаточной функции (12). Установив 1 в поле ввода Maximum Numerator (рис. 3), получим:

$$H(z) = 0,58 \cdot \frac{0,5875 + 1z^{-1} + 0,5875z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \times \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 0,3064. \quad (17)$$

В первом звене коэффициенты нормировались к максимальному значению 0,2966, и было получено:

$$\tilde{b}_{01} = \tilde{b}_{21} = 0,1742/0,2966 \approx 0,5875,$$

а во втором – к максимальному значению 1,0331, и было получено:

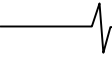
$$\tilde{b}_{12} = 0,9153/1,0331 = 0,886.$$

Нормирующий множитель  $G_{\text{вых}}$  в (17) равен произведению:

$$G_{\text{вых}} = 0,2966 \cdot 1,0331 = 0,3064.$$

Возможно нормирование к степени двойки (Power of Two), которое просто реализовать поразрядным сдвигом.

Для коэффициентов усиления  $s_L$  в (5) или  $G''$  в (8), в случае, если их значения превысили единицу, выполняется нормирование к степени двойки. При этом авто-



матически рассчитываются новые коэффициенты усиления для всех звеньев (равные степени двойки) и нормирующий множитель на выходе (не равный степени двойки), а их произведение остается таким же, как до нормирования.

В передаточной функции (17) коэффициенты усиления меньше единицы, поэтому просто проиллюстрируем технологию их нормирования. Установив Power of Two в поле ввода Scale Value Constrain и 0.5 в поле ввода Max. Scale Value (рис. 3), получим:

$$H(z) = 0,25 \cdot \frac{0,5875 + 1z^{-1} + 0,5875z^{-2}}{1 - 0,6106z^{-1} + 0,3029z^{-2}} \times \\ \times 0,5 \cdot \frac{1 + 0,886z^{-1} + 1z^{-2}}{1 - 0,0013z^{-1} + 0,8093z^{-2}} \cdot 1,4217.$$

Произведение коэффициентов усиления  $0,25 \cdot 0,5 \cdot 1,4217 = 0,1777$  осталось таким же, как до нормирования в (16):  $0,58 \cdot 0,3064 = 0,1777$ .

После масштабирования (и, при необходимости, нормирования) в MATLAB моделируется структура БИХ-фильтра с ФТ (арифметикой Fixed Point), и результаты анализируются с помощью команд меню Analysis [4].

### Дисперсия собственного шума после масштабирования

В [5] приведены аналитические формулы и алгоритм расчета в MATLAB дисперсии собственного шума  $\sigma_{e_c}^2$  БИХ-фильтров до масштабирования с передаточной функцией (1).

Для каскадной структуры с прямой структурой звеньев при округлении каждого локального произведения формула имела вид:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2, \quad (18)$$

где  $h(n)$  – импульсная характеристика (ИХ) каскадной структуры,  $h_s^k(n)$  – эквивалентная ИХ, соответствующая эквивалентной передаточной функции

$H_s^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$ , в которой  $H_s^k(z)$  – эквивалентная передаточная функция рекурсивной части структуры звена а  $H_i(z)$  – передаточная функция всей структуры звена.

Для каскадной структуры с прямой канонической структурой звеньев формула имела вид:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \\ + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12}, \quad (19)$$

где  $h^k(n) = h_s^k(n)$  – эквивалентная ИХ, соответствующая эквивалентной передаточной функции

$H^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$ ,  $H^k(z) = H_s^k(z)$  – эквивалентная передаточная функция всей структуры звена.

После масштабирования для каскадной структуры с прямой структурой звеньев передаточная функция примет вид (5), где коэффициент усиления на входе отсут-

ствует, коэффициенты  $b_{0k}'$  и  $b_{2k}'$  не равны единице и на выходе добавлен множитель, формула (18) примет вид:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{5Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_s^k(n)]^2 + \frac{LQ_y^2}{12}.$$

Для каскадной структуры с прямой канонической структурой звеньев передаточная функция примет вид (8), где коэффициенты  $b_{0k}''$  и  $b_{2k}''$  не равны единице, формула (19) примет вид:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \\ + \frac{3Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{3Q_y^2}{12}.$$

В обоих случаях в алгоритме расчета дисперсии собственного шума потребуется лишь изменить матрицы коэффициентов эквивалентных передаточных функций. Проиллюстрируем на примере 2-каскадной структуры.

До масштабирования при прямой структуре звеньев матрицы коэффициентов имели вид:

$$H(z) = \frac{1 + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h(n);$$

$$H_s^1(z) = \frac{1}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_s^1(n);$$

$$H_s^2(z) = \frac{1}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_s^2(n).$$

После масштабирования они примут вид:

$$H(z) = \frac{b_{01} + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{b_{02} + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h(n);$$

$$H_s^1(z) = \frac{1}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{b_{02} + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_s^1(n);$$

$$H_s^2(z) = \frac{1}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_s^2(n).$$

До масштабирования при прямой канонической структуре звеньев матрицы коэффициентов имели вид:

$$H(z) = H^1(z) = \frac{1 + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^1(n);$$

$$H^2(z) = \frac{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^2(n).$$

После масштабирования они примут вид:

$$H(z) = H^1(z) = \frac{b_{01} + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{b_{01} + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^1(n);$$

$$H^2(z) = \frac{b_{02} + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^2(n).$$

Результаты расчета СКО собственного шума до и после масштабирования для 2-х каскадного БИХ-фильтра с передаточными функциями (10) и (12) при шаге квантования  $Q_y = 2^{-by} = 2^{-15}$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. СКО собственного шума БИХ-фильтра до и после масштабирования

Структура звеньев	СКО собственного шума	
	до масштабирования	после масштабирования
Прямая	$7,79 \times 10^{-5}$	$4,54 \times 10^{-5}$
Прямая каноническая	$10,01 \times 10^{-5}$	$2,35 \times 10^{-5}$

Как видим, внесение множителей в предыдущее звено и неявное масштабирование привело к снижению СКО собственного шума, однако платой за это станет уменьшение динамического диапазона выходного цифрового сигнала:

$$D = 20 \lg \left( \frac{|a_{\max}|}{|a_{\min}|} \right) \text{ (дБ)},$$

поскольку его максимум  $|a_{\max}|$  теперь не будет превосходить единицу. В этом случае при реализации каскадной структуры на базе цифрового устройства, возможно, потребуется учесть нормирующий множитель для отсчетов выходного сигнала, если  $\max |y(n)| > 1$ .

### Заключение

Рассмотрены теоретические основы технологии масштабирования каскадных структур рекурсивных фильтров в MATLAB, подтвержденные результатами моделирования.

Приведены аналитические формулы для оценки дисперсии собственного шума после масштабирования и модифицированные матрицы коэффициентов эквивалентных передаточных функций для алгоритма расчета данных оценок в MATLAB.

Результаты работы могут быть использованы при реализации структуры БИХ-фильтра на базе цифрового устройства.

### Литература

1. Ingle V., Proakis J. Digital Signal Processing Using MATLAB, Second Edition – Thomson.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. – М. – СПб. – Киев: Вильямс, 2004.
3. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006.
4. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
5. Солонина А.И. Оценки собственного шума структур рекурсивных цифровых фильтров и их вычисление в MATLAB // Цифровая обработка сигналов. 2015, № 2.