

УДК 681.3.06

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННОГО ШУМА СТРУКТУР РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ В MATLAB

Солонина А. И., к.т.н, доц., проф., Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, as-io@yandex.ru.

THE ESTIMATING OF SELF-NOISE DIGITAL SYSTEMS

Solonina A.I., professor of Saint-Petersburg State University of Telecommunications, e-mail: as-io@yandex.ru.

The article reviews the general equivalent linear model for estimating the self-noise of digital systems with fixed point. Feature of this model is the formation of vectors for the input $e_{y_{ВХ}}(n)$ and output $e_{y_{ВЫХ}}(n)$ noise multipliers, as well as equivalent transfer functions $H_j(z)$ of structure parts, processing components of the input noise multipliers. The equivalent linear model depends on the structure of the digital system and architecture of the digital device on the basis of which structure is implementing.

The general algorithm is the basis for creating models and estimating the self-noise of digital systems with typical structures.

Particular attention is given to the creation of the equivalent linear model for the cascade structure. The article discusses the technique of estimating the self-noise cascade structure with different section structures.

Key words: self-noise, estimating, digital systems, linear model, cascade structure, multiplier, fixed point, MATLAB.

Ключевые слова: структура, множитель, сумматор, округление, собственный шум, эквивалентная линейная модель, вектор, дисперсия, алгоритм.

Введение

В цифровых системах с фиксированной точкой нелинейная процедура квантования сопровождается внесением ошибок квантования, источниками которых являются АЦП, множители, квантование коэффициентов и сумматоры. Совокупность взаимосвязанных эффектов квантования – шума АЦП, собственного шума цифровой системы, ошибок квантования коэффициентов и переполнения сумматоров – не позволяет формализовать нелинейный оператор в соотношении вход/выход цифровой системы. Поэтому в теории ЦОС эти эффекты исследуют отдельно для каждого из источников, в предположении об их независимости [1-5].

В этом случае на линейной модели анализируют изменение характеристик при квантовании коэффициентов. Ошибки переполнения сумматоров стремятся предотвратить или минимизировать, применяя в наиболее уязвимых в этом смысле каскадных структурах масштабирование. Для шумов получают аналитические оценки при следующих предположениях:

– шумы не коррелированы с квантуемыми сигналами.

Это позволяет представить цифровые сигналы в виде аддитивной смеси дискретного сигнала и шума:

$$x_{Ц}(n) = x(n) + e_{ВХ}(n);$$

$$y_{Ц}(n) = y(n) + e_{ВЫХ}(n),$$

и мысленно выделить в цифровой обработке две независимые составляющие: обработку дискретных сигналов – линейная модель – и обработку шумов – нелинейная модель;

Предлагается эквивалентная линейная модель с векторным представлением соотношения вход/выход, на основе которой созданы универсальные эквивалентные линейные модели структур рекурсивных цифровых фильтров, получены аналитические оценки собственного шума и разработан алгоритм их вычисления в MATLAB.

– шумы от разных источников не коррелированы между собой.

Это позволяет использовать свойство аддитивности для шумов и мысленно выделить в их обработке две независимые составляющие: обработку шума АЦП – линейная модель – и обработку шумов множителей – линейная модель с аддитивными источниками шума множителей (линейная модель с шумами множителей);

– шум представляет собой эргодический случайный сигнал типа «белый шум»;

– ошибка квантования в любой момент времени – случайная величина с равномерной плотностью вероятности.

На основе линейных моделей отдельно оценивают:

– шум, обусловленный АЦП, не зависящий от структуры цифровой системы [1-4];

– собственный шум, обусловленный шумами множителей, зависящий от структуры цифровой системы и архитектуры цифрового устройства, на базе которого она реализуется.

Структура определяет конфигурацию множителей, поэтому принято говорить о собственном шуме структуры цифровой системы, а архитектура – специфику округления результатов умножения: каждое локальное произведение или их сумма.

Оценки шума всех множителей совпадают с оценками ошибки квантования, которые при округлении данных равны: математическое ожидание $\mu_y = 0$ и дисперсия

$$\sigma_y^2 = \frac{Q_y^2}{12}, \quad (1)$$

где $Q_y = 2^{-b_y}$ – шаг квантования, b_y – число значащих битов.

Детерминированные оценки и вероятностные оценки собственного шума при усечении данных в работе не рассматриваются, но легко могут быть получены по аналогии.

Линейная модель

Линейная модель может использоваться для оценивания собственного шума тех структур, в которых шумы всех умножителей можно заменить одним эквивалентным шумом.

Это характерно для всех структур КИХ-фильтра. В линейной модели прямой структуры (рис. 1) эквивалентный шум, равный сумме шумов умножителей, поступает непосредственно на выход и представляет собой собственный шум данной структуры.

Дисперсия собственного шума при округлении каждого локального произведения будет равна сумме дисперсий шумов умножителей (1):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{NQ_y^2}{12},$$

а при округлении суммы локальных произведений – дисперсии шума одного умножителя:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12}.$$

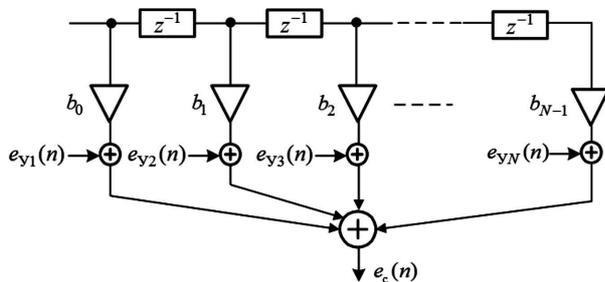


Рис. 1. Линейная модель прямой структуры КИХ-фильтра

Оптимальной для КИХ-фильтра будет прямая приведенная структура с округлением суммы локальных произведений: дисперсия собственного шума и число умножителей будут минимальными.

Эквивалентная линейная модель

Эквивалентная линейная модель создается для тех структур, в которых шумы умножителей обрабатываются различными частями структуры.

Это характерно для всех структур БИХ-фильтров, среди которых практический интерес представляют каскадная и параллельная структуры. Оценивание собственного шума данных структур связано с тремя проблемами, которые будем рассматривать «по мере поступления».

Первая проблема возникает на этапе создания эквивалентной линейной модели. В частности, в модели каскадной структуры необходимо одновременно отоб-

разить и части структуры звеньев, и части каскадной структуры, обрабатывающие шумы умножителей, учитывая при этом структуру звеньев и специфику округления результатов умножения. Поэтому универсальной эквивалентной линейной модели каскадной структуры не приводится, и получают оценки собственного шума для частных случаев [1-4].

Эта проблема снимается, если использовать эквивалентную линейную модель с векторным представлением соотношения вход/выход (рис. 2), где $e_{y_{вх}}(n)$, $e_{y_{вых}}(n)$ – векторы входных и выходных шумов умножителей, $H_3(z)$ – вектор-столбец эквивалентных передаточных функций частей структуры, обрабатывающих составляющие вектора $e_{y_{вх}}(n)$.

Собственный шум структуры $e_c(n)$ будет равен сумме составляющих вектора $e_{y_{вых}}(n)$.

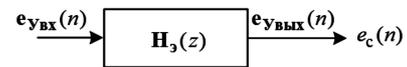


Рис. 2. Эквивалентная линейная модель с векторным представлением соотношения вход/ выход

Составляющие $e_{y_{вхk}}(n)$ вектора $e_{y_{вх}}(n)$ при округлении каждого локального произведения формируются из шумов умножителей на входах K сумматоров, $k = 1, 2, \dots, K$, а при округлении суммы локальных произведений – на выходах сумматоров. В последнем случае эквивалентную линейную модель называют линейной моделью с пост-накоплением [1, 4].

Составляющие $e_{y_{выхk}}(n)$ вектора $e_{y_{вых}}(n)$ определяются по формуле свертки:

$$e_{y_{выхk}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{3k}(m) e_{y_{вхk}}(n-m), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2)$$

где $h_{3k}(n)$ – эквивалентная импульсная характеристика (ИХ) части структуры с эквивалентной передаточной функцией $H_{3k}(z)$.

Если шум $e_{y_{вхk}}(n)$ поступает непосредственно на выход эквивалентной линейной модели, то $H_{3k}(z) = 1$ и $e_{y_{выхk}}(n) = e_{y_{вхk}}(n)$.

С учетом свойств дисперсии для независимых случайных величин:

$$D\{X + Y\} = D\{X\} + D\{Y\};$$

$$D\{CX\} = C^2 D\{X\},$$

дисперсия суммы локальных произведений некоррелированных отсчетов белого шума (2) будет равна

$$\sigma_{e_{y_{выхk}}}^2 = \sigma_{e_{y_{вхk}}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_{3k}^2(n),$$

где дисперсия $\sigma_{e_{y_{выхk}}}^2$ при округлении каждого локального произведения будет равна сумме дисперсий шумов умножителей на входе k -го сумматора, а при округлении их суммы – дисперсии шума одного умножителя (1).

Аналогично легко показать, что математическое ожидание шума $\sigma_{e_{y_{выхk}}}^2(n)$, $k = 1, 2, \dots, K$, будет равно нулю.

Поэтому далее можно ограничиться анализом дисперсии собственного шума.

Определим составляющие векторов $e_{y_{вх}}(n)$, $H_3(z)$, $e_{y_{вых}}(n)$ для типовых структур рекурсивных звеньев, в передаточной функции которых коэффициент $b_0 = 1$, как в каскадной структуре.

Эквивалентные линейные модели типовых структур рекурсивных звеньев

В эквивалентной линейной модели прямой структуры звена и линейной модели с пост-накоплением (рис. 3) векторы представлены одной составляющей: $e_{y_{вх}}(n) = e_{y_{вх1}}(n)$, $H_3(z) = H_{31}(z)$, $e_{y_{вых}}(n) = e_{y_{вых1}}(n)$, где $H_{31}(z)$ – эквивалентная передаточная функция рекурсивной части структуры.

Дисперсия собственного шума при округлении каждого локального произведения равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_{31}^2(n),$$

а при округлении суммы локальных произведений:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_{31}^2(n).$$

В эквивалентной линейной модели прямой канони-

ческой структуры звена и линейной модели с пост-накоплением (рис. 4) векторы представлены двумя составляющими: $e_{y_{вх}}(n) = [e_{y_{вх1}}(n) \ e_{y_{вх2}}(n)]^T$, $H_3(z) = [H_{31}(z) \ 1]^T$, $e_{y_{вых}}(n) = [e_{y_{вых1}}(n) \ e_{y_{вых2}}(n)]$, где $H_{31}(z) = H(z)$ – эквивалентная передаточная функция всей структуры.

Дисперсия собственного шума при округлении каждого локального произведения равна

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12},$$

а при округлении суммы локальных произведений:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12},$$

где $h(n) = h_{31}(n)$ – эквивалентная импульсная характеристика всей структуры.

В эквивалентной линейной модели прямой транспонированной структуры звена (рис. 5) с четырьмя сумматорами фактически обрабатываются два входных шума умножителей:

$$e_{y_{вх1}}(n) = e_{y_4}(n-1) + e_{y_5}(n-2);$$

$$e_{y_{вх2}}(n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n-1) + e_{y_3}(n-2),$$

как в эквивалентной линейной модели прямой канонической структуры (рис. 4), следовательно, дисперсии собственного шума данных структур совпадают.

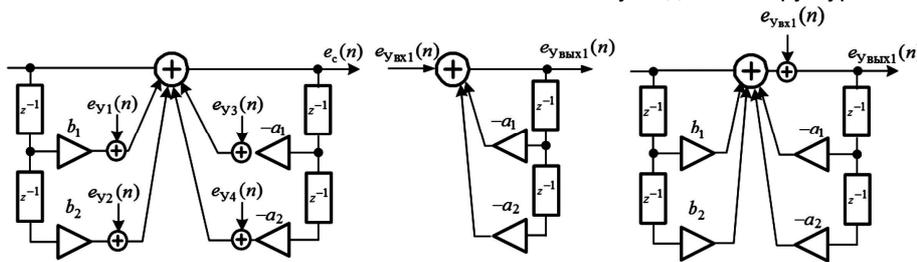


Рис. 3. Модели прямой структуры звена: линейная, эквивалентная линейная и линейная с пост-накоплением

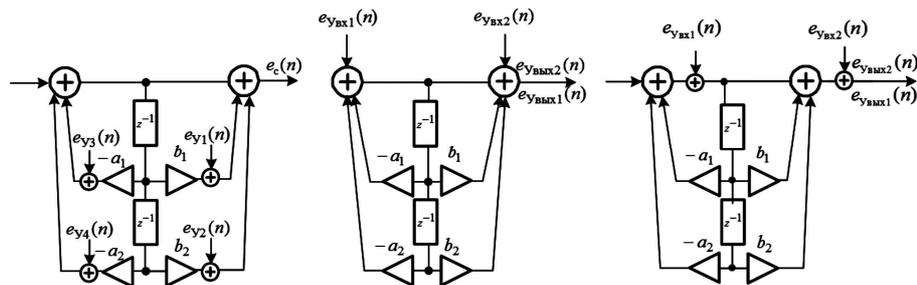


Рис. 4. Модели прямой канонической структуры звена: линейная, эквивалентная линейная и линейная с пост-накоплением

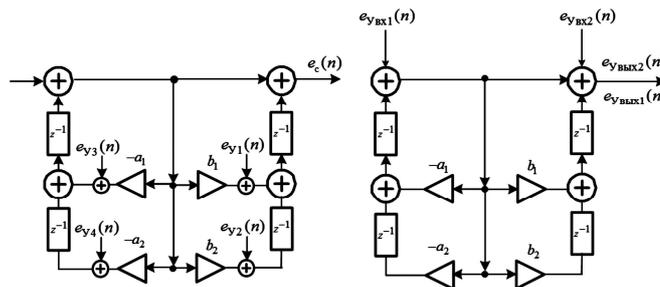


Рис. 5. Линейная и эквивалентная линейная модели прямой транспонированной структуры звена

В эквивалентной линейной модели прямой канонической транспонированной структуры звена (рис. 6) с тремя сумматорами фактически обрабатывается один входной шум умножителей $e_{y_{вх1}}(n) = e_{y_1}(n) + e_{y_2}(n-1) + e_{y_3}(n-2) + e_{y_4}(n-1) + e_{y_5}(n-2)$, как в эквивалентной линейной модели прямой структуры (рис. 3), следовательно, дисперсии собственного шума данных структур совпадают.

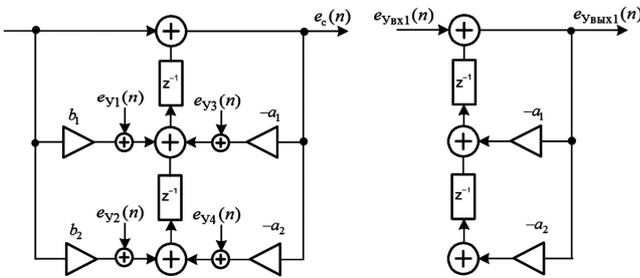


Рис. 6. Линейная и эквивалентная линейная модели прямой канонической транспонированной структуры звена

Это позволяет далее рассматривать прямую и прямую каноническую структуру звеньев.

Влияние нулей и полюсов на дисперсию собственного шума звеньев

Представим передаточную функцию звена в виде произведения простейших множителей:

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{(1 - r_o e^{j\varphi_o} z^{-1})(1 - r_o e^{-j\varphi_o} z^{-1})}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} = \frac{1 - 2r_o \cos \varphi_o z^{-1} + r_o^2 z^{-2}}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}}$$

и запишем импульсную характеристику:

$$h(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} - 2r_o \cos \varphi_o r_*^{(n-1)} \times \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin \varphi_*} + r_o^2 r_*^{(n-2)} \frac{\sin[(n-1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}$$

Дисперсия собственного шума звена $\sigma_{e_c}^2$ зависит от крутизны эквивалентной ИХ: чем она круче (значения ИХ по модулю быстрее убывают), тем меньше дисперсия.

Эквивалентная ИХ прямой структуры звена соответствует ее рекурсивной части и зависит только от полюсов. С их приближением к единичной окружности ИХ становится более пологой и дисперсия $\sigma_{e_c}^2$ увеличивается.

Эквивалентная ИХ прямой канонической структуры звена соответствует всей структуре и зависит от нулей и полюсов. В пределе, при их совпадении, получим $H(z) = 1$ и $h(n) = u_0(n)$, т.е. «максимально крутую» ИХ в виде цифрового единичного импульса. Следовательно, сближение нулей с полюсами сопровождается возрастанием крутизны ИХ и уменьшением дисперсии $\sigma_{e_c}^2$. С приближением полюсов к единичной окружности они удаляются от нулей, и дисперсия $\sigma_{e_c}^2$ увеличивается.

На рис. 7 приведены три варианта расположения нулей и полюсов, а на рис. 8 – СКО собственного шума звеньев при $Q_y = 2^{-by} = 2^{-15}$, подтверждающие теоретические выводы.

Отметим (рис. 8), что распространенное мнение о прямой структуре звена, как менее шумящей, не всегда справедливо: это зависит от расположения полюсов и нулей.

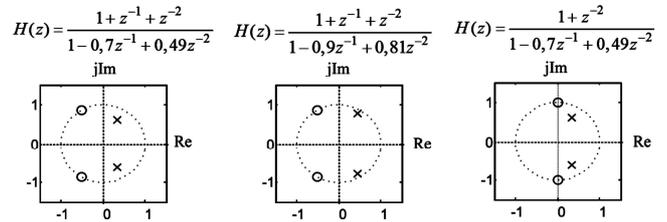


Рис. 7. Карты нулей и полюсов (слева направо): исходная, полюсы приблизились к единичной окружности, нули приблизились к полюсам



Рис. 8. СКО собственного шума прямой и прямой канонической структуры звеньев

Вычисление эквивалентных импульсных характеристик

Вторая проблема обозначилась при вычислении в MATLAB эквивалентных ИХ, теоретически бесконечных. В обобщенной постановке она сводится к ограничению длины ИХ.

Эта проблема снимается, если:

- описывать структуру, либо ее часть, в виде объекта `dfilt` [4];
- вычислять ИХ объекта `dfilt` с помощью функции `impz(H)`, где `H` – имя объекта.

Длина ИХ в таком случае будет автоматически ограничиваться при достижении задаваемой по умолчанию высокой точности (разности между модулями значений соседних отсчетов).

В этом легко убедиться самостоятельно, например, описать прямую структуру рекурсивного звена в виде объекта `H = dfilt.df1(b,a)`, где `b`, `a` – векторы коэффициентов передаточной функции, вычислить ИХ – `h = impz(H)`, и определить ее длину – `length(h)`. Без оператора присваивания функция `impz(H)` автоматически выведет график ИХ в GUI FVTool [4].

Дополнительные рекомендации для расчета эквивалентных ИХ в каскадных структурах приводятся в последнем разделе.

Эквивалентная линейная модель параллельной структуры

Эквивалентная линейная модель параллельной структуры (рис. 9) с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=1}^L \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = \sum_{k=1}^L H_k(z),$$

создана на основе эквивалентной линейной модели звеньев.

Дисперсия собственного шума параллельной структуры будет равна сумме дисперсий собственного шума звеньев. Приведенные для звеньев аналитические формулы сохраняются, но эквивалентные ИХ звеньев, естественно, изменятся.

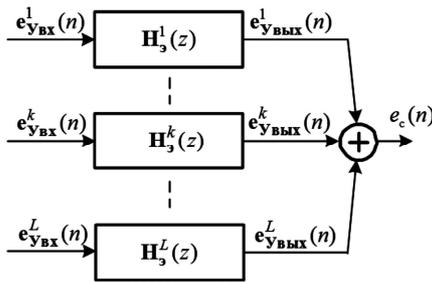


Рис. 9. Эквивалентная линейная модель параллельной структуры

Эквивалентная линейная модель каскадной структуры

Эквивалентная линейная модель каскадной структуры (рис. 10) с передаточной функцией

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) = G \prod_{k=1}^L H_k(z)$$

создана также на основе эквивалентной линейной модели звеньев.

Собственный шум каскадной структуры $e_c(n)$ будет равен сумме шумов:

$$e_c(n) = e_0(n) + \sum_{k=1}^L e_c^k(n), \tag{3}$$

где $e_0(n)$ – реакция каскадной структуры на шум $e_G(n)$,

$e_c^k(n)$ – реакция части эквивалентной линейной модели с эквивалентной передаточной функцией

$$H_3^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z) \text{ на шум } e_{y_{вх}}^k(n).$$

Дисперсия собственного шума каскадной структуры $\sigma_{e_c}^2$ будет равна сумме дисперсий шумов в (3). Зная векторы $e_{y_{вх}}^k(n)$, $H_3^k(z)$ эквивалентных линейных мо-

делей звеньев и их дисперсию собственного шума, легко получить аналитические формулы для дисперсии собственного шума каскадной структуры.

При прямой структуре звеньев и округлении каждого локального произведения дисперсия $\sigma_{e_c}^2$ будет равна (здесь и далее первая сумма – дисперсия собственного шума $e_0(n)$):

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_3^k(n)]^2, \tag{4}$$

а при округлении суммы локальных произведений:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h_3^k(n)]^2, \tag{5}$$

где $h(n)$ – ИХ каскадной структуры, $h_3^k(n)$ – эквивалентная ИХ, соответствующая эквивалентной передаточной функции $H_3^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$, $H_3^k(z)$ – эквивалентная передаточная функция рекурсивной части структуры звена.

При прямой канонической структуре звеньев и округлении каждого локального произведения дисперсия $\sigma_{e_c}^2$ будет равна:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12}, \tag{6}$$

а при округлении суммы локальных произведений:

$$\sigma_{e_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12} \sum_{k=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} [h^k(n)]^2 + \frac{Q_y^2}{12}, \tag{7}$$

где $h^k(n) = h_3^k(n)$ – эквивалентная ИХ, соответствующая эквивалентной передаточной функции $H^k(z) \prod_{i=k+1}^L H_i(z)$, $H^k(z) = H_3^k(z)$ – эквивалентная передаточная функция всей структуры звена.

Для минимизации собственного шума каскадной структуры предложен алгоритм расстановки звеньев [2], в соответствии с которым звенья располагают в порядке возрастания их дисперсий собственного шума, для чего выполняются следующие действия:

- полюс, ближайший к единичной окружности, объединяется с ближайшим нулем;
- процедура повторяется до тех пор, пока не будут сгруппированы все полюсы с нулями:

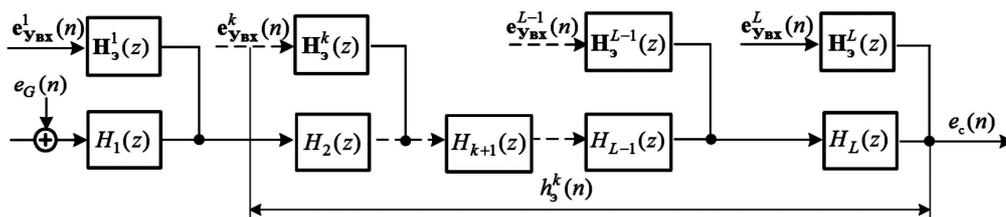


Рис. 10. Универсальная эквивалентная линейная модель каскадной структуры

– сформированные звенья расставляются в порядке возрастания радиусов полюсов.

Вычисление дисперсии собственного шума БИХ-фильтров в MATLAB

Алгоритм вычисления дисперсии собственного шума БИХ-фильтра в MATLAB включает в себя следующие основные этапы:

– описание каскадной структуры в виде объекта `dfilt` с матрицей коэффициентов [4]:

$$H(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 1 & b_{1k} & b_{2k} & 1 & a_{1k} & a_{2k} \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 1 & b_{1L} & b_{2L} & 1 & a_{1L} & a_{2L} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

– вычисление ИХ данного объекта с помощью функции `impz`;

– формирование матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций;

– описание частей эквивалентной линейной модели с эквивалентными передаточными функциями в виде объектов `dfilt`;

– вычисление эквивалентных ИХ данных объектов с помощью функции `impz`;

– вычисление дисперсии собственного шума каскадной структуры.

Третья проблема связана с формированием матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций.

Эта проблема снимается, если использовать закономерность последовательного обнуления элементов матрицы (8). Проиллюстрируем ее на примере 2-каскадной структуры.

При прямой структуре звеньев дисперсия собственного шума (4) будет равна:

$$\sigma_{\epsilon_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} [h^1(n)]^2 + \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} [h^2(n)]^2,$$

а соответствующие матрицы коэффициентов будут иметь вид:

$$H(z) = \frac{1+b_{11}z^{-1}+b_{21}z^{-2}}{1+a_{11}z^{-1}+a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1+b_{12}z^{-1}+b_{22}z^{-2}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h(n);$$

$$H_1^1(z) = \frac{1}{1+a_{11}z^{-1}+a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1+b_{12}z^{-1}+b_{22}z^{-2}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_1^1(n);$$

$$H_2^2(z) = \frac{1}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h_2^2(n).$$

При прямой канонической структуре звеньев дисперсия собственного шума (6) будет равна:

$$\sigma_{\epsilon_c}^2 = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \frac{2Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} [h^1(n)]^2 +$$

$$+ \frac{4Q_y^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} [h^2(n)]^2 + \frac{2Q_y^2}{12},$$

а соответствующие матрицы коэффициентов будут иметь вид:

$$H(z) = H^1(z) = \frac{1+b_{11}z^{-1}+b_{21}z^{-2}}{1+a_{11}z^{-1}+a_{21}z^{-2}} \cdot \frac{1+b_{12}z^{-1}+b_{22}z^{-2}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^1(n);$$

$$H^2(z) = \frac{1+b_{12}z^{-1}+b_{22}z^{-2}}{1+a_{12}z^{-1}+a_{22}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow h^2(n).$$

С учетом этого, на основе приведенного алгоритма были разработаны простые циклические программы. БИХ-фильтр, синтезированный в GUI FDATool, после расстановки звеньев и масштабирования [5], экспортируется в Workspace в виде объекта `dfilt`, сохраняется по команде `save` и загружается в программу по команде `load`. В программах необходимо предусмотреть следующее:

– части каскадной структуры в виде объектов `dfilt` формируются в цикле с одинаковым именем;

– для каждого объекта вычисляется эквивалентная ИХ, при этом автоматически ограничиваемые длины всех ИХ будут одинаковыми.

В общем случае, вид эквивалентных ИХ определяется расположением полюсов и нулей, поэтому их ограниченные длины для различных БИХ-фильтров будут различными, но точность при ее ограничении – одинаковой. Это позволяет сравнивать оценки собственного шума БИХ-фильтров, вычисленные в тождественных условиях.

В качестве примера были рассчитаны оценки собственного шума БИХ-фильтров ФНЧ при $Q_y = 2^{-b_y} = 2^{-15}$ и одинаковых требованиях к АЧХ: частота дискретизации 4000 Гц, граничные частоты ПП и ПЗ – 1000 и 1200 Гц, максимально допустимое затухание в ПП 0,4455 дБ, минимально допустимое затухание в ПЗ 40 дБ.

На рис. 11 приведены СКО собственного шума БИХ-фильтров с прямой структурой звеньев и КИХ-фильтра, синтезированного при тех же требованиях к АЧХ.

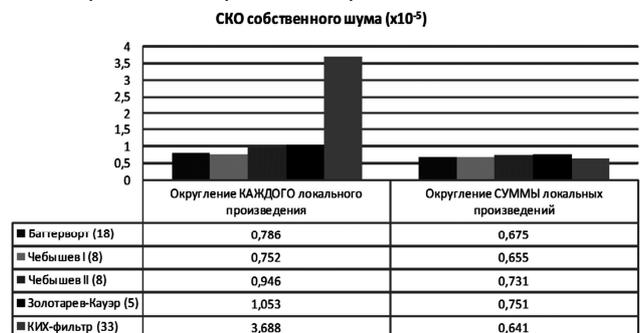


Рис. 11. СКО собственного шума БИХ-фильтров с прямой структурой звеньев и КИХ-фильтра (в скобках указан порядок фильтра)

При округлении каждого локального произведения наиболее шумящим оказался КИХ-фильтр, а среди БИХ-

фильтров – фильтр Золотарева-Кауэра, хотя у него наименьший порядок. При округлении суммы локальных произведений СКО всех фильтров уменьшилось, причем у КИХ-фильтра весьма существенно, в $\sqrt{33}$ раз, и он стал наименее шумящим.

На рис. 12 представлены СКО собственного шума БИХ-фильтров с прямой и прямой канонической структурой звеньев при округлении каждого локального произведения.



Рис. 12. СКО собственного шума БИХ-фильтров с прямой и прямой канонической структурой звеньев

БИХ-фильтры с прямой канонической структурой звеньев, как и ожидалось, оказались более шумящими. Существенное увеличение СКО БИХ-фильтра Чебышева I легко объяснить, анализируя карты нулей и полюсов в GUI FDATool: расстояния между нулями и полюсами этого фильтра – наибольшие, а значит, наибольшие дисперсии собственного шума звеньев и каскадной структуры в целом.

Оптимальной для БИХ-фильтра будет прямая каноническая транспонированная структура звеньев с округлением суммы локальных произведений: дисперсия

собственного шума и число элементов задержки будут минимальными.

Заключение

Получены аналитические формулы оценок собственного шума БИХ-фильтров и разработан алгоритм их вычисления в MATLAB.

Это стало возможным, благодаря решению трех проблем:

- созданию универсальной эквивалентной линейной модели каскадной структуры;
- формированию матриц коэффициентов эквивалентных передаточных функций путем последовательного обнуления элементов матрицы коэффициентов каскадной структуры;
- вычислению эквивалентных импульсных характеристик с автоматическим ограничением их длины.

Результаты работы могут быть использованы при выборе структуры цифрового фильтра и ее реализации на базе цифрового устройства.

Литература

1. Ingle V., Proakis J. Digital Signal Processing Using MATLAB, Second Edition – Thomson.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. – М. – СПб. – Киев: Вильямс, 2004.
3. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006.
4. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
5. Солонина А.И., Клионский Д.М., Меркучева Т.В., Перов С.Н. Цифровая обработка сигналов и MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2013.

НАУЧНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ:

Теория и методы цифровой обработки сигналов. Техническая реализация систем обработки сигналов

Секция 2: Теория и методы цифровой обработки сигналов

В работах, проводимых по данному базовому направлению теоретических исследований, закладываются фундаментальные основы построения систем ЦОС. Поэтому работа секции вызывает повышенный интерес всех участников конференции. Как показывает анализ представленных докладов, исследования российских ученых ведутся по всем основным направлениям развития мировой науки в области информационных технологий реального времени, а именно: цифровой фильтрации, многоскоростной обработки и вейвлет-преобразования, частотно-временной обработки и спектрального анализа, теории быстрых алгоритмов ЦОС, оптимальной и адаптивной обработки сигналов и нелинейной фильтрации.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:

- оценивание собственного шума цифровых систем;
- адаптивная фильтрация в задачах идентификации многолучевого канала связи;
- анализ чувствительности адаптивных алгоритмов в задаче эхокомпенсации;
- гармонические вейвлеты и их применение;
- применение сплайнов для непрерывного вейвлет-преобразования;
- оценивание частоты комплексной синусоиды по трем отсчетам ДПФ;
- оптимальное проектирование многоскоростных адаптивных фильтров;
- модифицированное параметрическое ДПФ;
- исследование устойчивости цифровых гребенчатых БИХ-фильтров;
- синтез группового сигнала с применением банка цифровых гребенчатых КИХ-фильтров;
- факторизация параунитарного банка фильтров на основе кватернионов;
- применение мультирегрессионной модели для решения задач конверсии голоса;
- анализ нелинейных искажений сигналов в АЦП конвейерного типа;
- синтез цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования;
- конструирование цифровых фильтров на основе генетических алгоритмов;
- пространственная фильтрация речевого сигнала на фоне интенсивных помех;
- исследование алгоритмов разреженного преобразования Фурье.