

УДК 519.6:517+519.711.3

## МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ В СИГНАЛАХ ПУТЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ

Минин Л.А., Воронежский государственный университет, e-mail: mininla@mail.ru;

Насер Нихад Махмуд, Университет Диала, г. Баакуба, e-mail: nihadalnasir1@yahoo.com;

Киселев Е.А., Воронежский государственный университет, e-mail: evg-kisel2006@yandex.ru;

Кургалин С.Д., Воронежский государственный университет, e-mail: kurgalin@bk.ru.

**Ключевые слова:** сигнал, спектр, интерполяция, алгоритм, целочисленный сдвиг, лоренцевский контур.

### Введение

Проблема выделения простых составляющих (пиков) в сложных спектрах сигналов возникает в самых разных областях исследований: физико-химических, медицинских, радиотехнических и др. Ключевой здесь является задача о разделении двух пиков, близких по форме к гауссовым. Согласно классическому правилу Рэлея для пиков одинаковой амплитуды разделение возможно, если в анализируемой кривой между двумя максимумами возникает четко выраженный минимум, причем разность между максимумом и минимумом должна составлять не менее 20% от максимума. Рис. 1 иллюстрирует применение критерия Рэлея к распределению интенсивности  $I$  в интерферометре в зависимости от разности фаз  $\delta$  двух лучей [1].

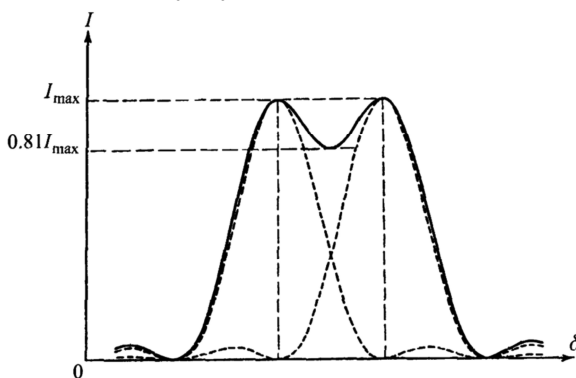


Рис. 1. Критерий Рэлея разделения двух пиков одинаковой амплитуды.  $I$  – интенсивность сигнала,  $\delta$  – разность фаз двух лучей

Критерий Рэлея носит эмпирический характер и может в равной степени применяться и в задачах спектрального анализа. Математическое ограничение разрешающей способности обусловлено тем, что задача о разделении близких пиков, начиная с некоторого момента, становится некорректной. При наличии дополнительных предположений о характере спектра сигнала задача о разделении пиков снова может иметь устойчивое решение. За счет этого можно улучшить разрешающую способность алгоритмов анализа сигналов и их спектров. Решающую роль играет информация о форме спектральных линий. В зависимости от конкретной задачи здесь могут использоваться различные модели. Рас-

Разработан метод выделения отдельных компонент в сложных спектрах с помощью интерполяции по целочисленным сдвигам функции Лоренца, которая часто используется при моделировании различных процессов и явлений. Проведена оценка точности метода и границ его применимости.

смотрим модели формы спектральных линий в случае, когда изучаются атомные спектры. Спектральные линии даже у дискретных спектров испускания или поглощения не являются строго монохроматическими. Действие различных механизмов уширения линий спектра приводит к образованию некоторого спектрального распределения интенсивности вблизи частоты  $\omega_0$  квантового перехода в атоме или молекуле. Контур спектральной линии определяется механизмом уширения. При ударном или радиационном уширениях, в случаях, когда эффект Доплера мал, форма линий спектров описывается лоренцевским контуром [2, 3] с распределением интенсивности

$$g_L(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (1)$$

здесь  $\Gamma$  – параметр ширины спектральной линии,  $\Delta$  – сопровождающий уширение сдвиг линии.

При доплеровском уширении возникает гауссов контур:

$$g_G(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_D \sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D}\right)^2\right), \quad (2)$$

где  $\Delta\omega_D = \omega_0 \frac{v_0}{c}$  – полуширина спектральной линии,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$$

– наиболее вероятная скорость атомов,  $c$  – скорость света,  $M$  – масса атома,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура излучающего вещества.

Сложные спектры состоят из множества линий, которые могут накладываться друг на друга, затрудняя тем самым анализ. В общем случае задача формулируется как выделение отдельных компонент заданной формы в исследуемом сигнале. При анализе спектра ключевой является информация о расположении спектральных линий и величине их амплитуды. Кроме того, реальный спектр представляет собой оцифрованный сигнал и, как правило, задается на равномерной сетке точек. Следовательно, математически задача может быть сформулирована как разложение сигнала по системе сдвигов некоторой функции, вид которой определяется формой отдельной спектральной линии.



В настоящее время разработано множество методов аппроксимации сигналов при помощи сдвигов функции Гаусса (см., например, [4]). В то же время, вопрос о разложении сигнала по функциям Лоренца (1) в литературе практически не рассматривался. Поэтому целью данной работы является разработка соответствующего математического аппарата на основе интерполяции системами целочисленных сдвигов функции Лоренца, который будет иметь важное применение при анализе спектров.

### Математическая постановка задачи

Требуется представить исследуемый спектр (спектральную плотность)  $F(\omega)$  в виде линейной комбинации равномерных сдвигов  $g(\omega - k\Delta\omega)$ ,  $k \in Z$ , порожденных заданной функцией  $g(\omega)$ . При расчетах удобно работать с системой целочисленных сдвигов, т.е. перейти от сетки с шагом  $\Delta\omega$  к сетке с единичным шагом.

Сделаем замену переменной  $x = \omega / \Delta\omega$  и введем новые функции  $\phi(x) = g(\omega)$ ,  $f(x) = F(\omega)$ . Тогда

$$g(\omega - k\Delta\omega) = g(\Delta\omega(x - k)) = \phi(x - k). \quad (3)$$

Система функций  $\phi(x - k)$  не является ортогональной. Поскольку исходная функция  $F(\omega)$  в реальных задачах задана дискретно, то естественно использовать интерполяцию по узлам сетки отсчетов.

Задача интерполяции формулируется следующим образом. Требуется построить функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j \cdot \phi(x - j), \quad (4)$$

совпадающую с  $f(x)$  в узлах сетки, т.е.  $\tilde{f}(m) = f(m)$ ,  $m \in Z$ . Обычно данная задача решается с помощью узловой функции, которая определяется следующим образом: функция

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot \phi(x - k), \quad (5)$$

называется узловой, если для нее выполнена система равенств  $\tilde{\phi}(m) = \delta_{0m}$ ,  $m \in Z$ , где  $\delta_{0m}$  – символ Кронекера. Тогда

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \tilde{\phi}(x - n). \quad (6)$$

Нахождение функции  $\tilde{\phi}(x)$  равносильно решению линейной системы бесконечного числа уравнений с бесконечным же числом неизвестных  $d_k$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot \phi(m - k) = \delta_{0m}, \quad m \in Z. \quad (7)$$

Набор соотношений (7) представляет собой систему типа свертки. Для ее решения используются вспомогательные ряды Фурье [5]

$$D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot e^{-ikt}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k) \cdot e^{-ikt}, \quad (8)$$

с помощью которых система уравнений (7) записывается в эквивалентной форме в виде функционального равенства:

$$D(t) \cdot \Phi(t) = 1. \quad (9)$$

Следовательно, для нахождения коэффициентов  $d_k$  нужно разложить в ряд Фурье функцию  $1 / \Phi(t)$ .

В качестве функции  $\phi(x)$ , порождающей систему целочисленных сдвигов, выбираем лоренцевский контур (1). Выпишем саму функцию, используя более удобную по сравнению с (1) нормировку, и отвечающий ей ряд Фурье  $\Phi(t)$ :

$$\phi(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + x^2}, \quad \Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} \cdot e^{-ikt}. \quad (10)$$

Этот ряд с помощью формулы суммирования Пуассона вычисляется аналитически, а для коэффициентов  $d_k$  получается следующее выражение:

$$d_k = \frac{(-1)^k \cdot \text{sh}(\sigma\pi)}{\sigma\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{\text{ch}(\sigma t)} dt. \quad (11)$$

Более подробно получение формулы (11) с полным обоснованием всех математических преобразований представлено в статье [6], а в данной работе мы остановимся на вычислительных особенностях интерполяции.

### Результаты

В табл. 1 приведены значения нескольких рассчитанных нами коэффициентов  $d_k$  при различных параметрах  $\sigma$  (мы указываем три значащие цифры для удобства восприятия). Нахождение интеграла в выражении (11) осуществлялось численно с помощью квадратурных формул. Случай  $k < 0$  отдельно не рассматривался, поскольку из формулы (11) очевидно, что  $d_{-k} = d_k$ .

Таблица 1. Значения коэффициентов узловой функции при разных параметрах  $\sigma$

Параметр $\sigma$	$d_0$	$d_1$	$d_{10}$
0,5	1,08	-0,200	$-8,52 \cdot 10^{-4}$
1,0	1,74	-0,783	$-9,96 \cdot 10^{-4}$
1,5	3,89	-2,49	$-7,68 \cdot 10^{-4}$
2,0	10,6	-8,06	$7,30 \cdot 10^{-3}$
2,5	32,8	-27,3	0,122
3,0	110	-96,1	1,17
5,0	$2,11 \cdot 10^4$	$-2,01 \cdot 10^4$	$1,82 \cdot 10^3$
7,0	$5,77 \cdot 10^6$	$-5,63 \cdot 10^6$	$1,21 \cdot 10^6$

Как видно из табл. 1, с ростом  $\sigma$  возрастают и коэффициенты узловой функции. Значения  $d_k$  становятся большими по абсолютной величине и медленнее убывают при увеличении порядкового номера  $k$  по сравнению со случаем, когда  $\sigma = 1$ . По этой причине ряды для  $\tilde{\phi}(x)$  и  $\tilde{f}(x)$  сходятся медленно и для устойчивых вычислений параметров  $p_j$  формулы (4) требуется больше коэффициентов  $d_k$ , чем при  $\sigma = 1$ . Как результат, происходит потеря точности интерполяционной формулы (4), количественную оценку которой мы дадим ниже.

Из результатов статьи [6] и табл. 1 следует, что максимально допустимым значением параметра  $\sigma$  с точки зрения устойчивости интерполяции является  $\sigma = 7$ . Поясним, что это значит на практике. Дело в том, что построить с хорошей точностью интерполяционную фор-

му (4) означает, что мы будем способны разделить две лоренцевские спектральные линии с точностью до одного шага сетки отсчетов. С ростом ширины линий, мерой которой является параметр  $\sigma$ , они становятся практически неотличимыми друг от друга, а их общий контур выглядит как одна спектральная линия. Поэтому значение  $\sigma$ , равное 6-7, является естественной границей разрешающей способности, присущей самой задаче разделения спектральных линий.

На рис. 2 и 3 изображены две лоренцевские спектральные линии одинаковой амплитуды  $A$ , находящиеся на расстоянии одного шага сетки друг от друга при значении  $\sigma = 1$  (рис. 2) и при  $\sigma = 7$  (рис. 3).

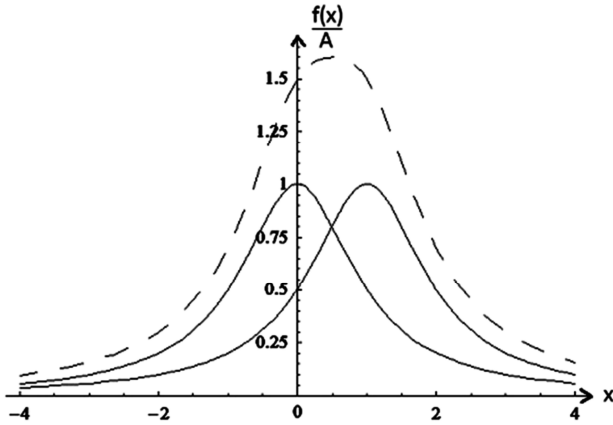


Рис. 2. Контурсы спектральных линий, находящихся на расстоянии одного шага сетки друг от друга, и их огибающая (пунктирная линия) при  $\sigma = 1$ .

$A$  – амплитуда пиков,

$x = \omega / \Delta\omega$  – безразмерная переменная,

$f(x)/A$  – относительная спектральная плотность сигнала

При указанном значении  $\sigma = 7$  для обеспечения приемлемой точности интерполяции необходимо учесть в формуле (5) порядка 200 коэффициентов  $d_k$ , поэтому требуется наличие 7-8 значащих цифр в экспериментальных данных. Как правило, эксперименты обеспечивают точность не более 3-4 значащих цифр, вследствие чего практической границей разрешающей способности является значение  $\sigma$  порядка 3-4.

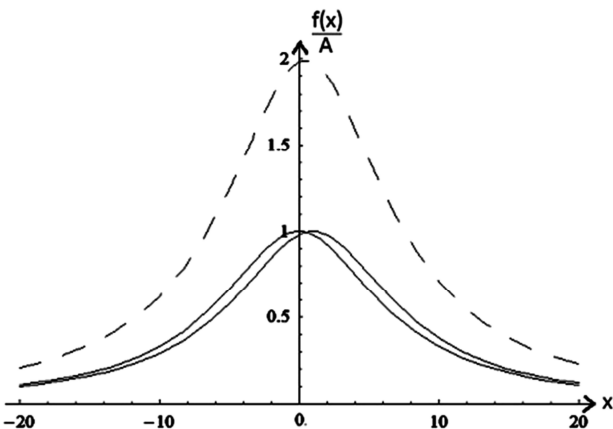


Рис. 3. Контурсы спектральных линий, находящихся на расстоянии одного шага сетки, и их огибающая (пунктирная линия) при  $\sigma = 7$ .  $A$  – амплитуда пиков,

$x = \omega / \Delta\omega$  – безразмерная переменная,

$f(x)/A$  – относительная спектральная плотность сигнала

Оценим, насколько эффективна процедура интерполяции при разделении спектральных линий в области математической устойчивости ( $\sigma \leq 7$ ). Тестовый сигнал  $f(x)$  задается в виде суперпозиции  $N$  спектральных линий с положениями  $m_k$ , амплитудами  $A_k$ , а также случайного шума  $\varepsilon(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (x - m_k)^2} + \varepsilon(x). \quad (12)$$

С помощью формул (4), (5) и (11) строится интерполирующая функция  $\tilde{f}(x)$ . Критериями эффективности работы алгоритма являются, во-первых, качество восстановления сигнала  $f(x)$  с помощью  $\tilde{f}(x)$ , показателями которого являются визуальные отличия исходного и восстановленного сигнала на графике и соотношение максимальной по модулю величины погрешности и амплитуды полезного сигнала. Во-вторых, критерием качества восстановления сигнала будет являться величина соответствия коэффициентов интерполяции  $p_j$  амплитудам  $A_k$ .

Проведенные нами расчеты показали следующие результаты. При  $\sigma \leq 7$  алгоритм дает хорошее качество восстановления сигнала: погрешность составляет величину порядка 0,1% от амплитуды сигнала. На рис. 4 показан пример восстановления тестового сигнала при  $\sigma = 7$ . Графики исходного и восстановленного сигнала изображены вместе (наложены друг на друга). Поскольку эти графики визуально практически не различаются, то в нижней части рисунка для наглядности изображена погрешность восстановления сигнала, увеличенная в 1000 раз.

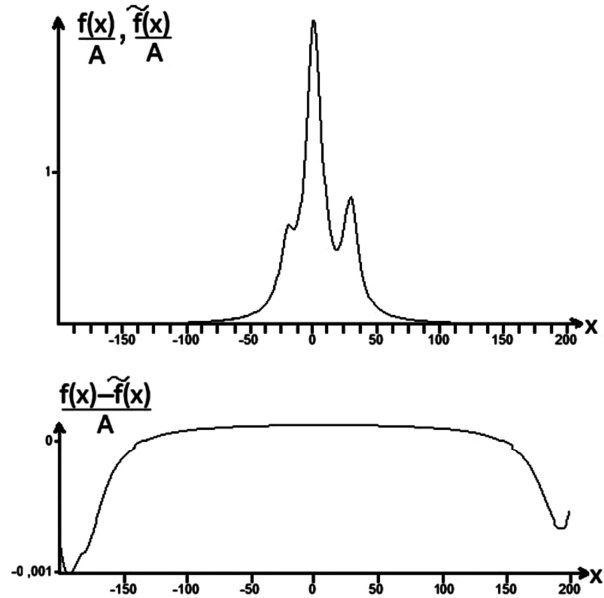


Рис. 4. Исходный сигнал  $f(x)$ ,

интерполирующая функция  $\tilde{f}(x)$  и их разность при  $\sigma = 7$ .

$A$  – максимальная амплитуда отдельного пика в составе сигнала

Таким образом, при отсутствии шума метод достаточно надежно восстанавливает исходный сигнал и позволяет находить амплитуды его компонент с точностью 0,1% вплоть до значений  $\sigma = 7$ .

Иначе дело обстоит с зашумленными сигналами. Поскольку при больших значениях  $\sigma$  коэффициенты  $d_k$  убывают медленно, алгоритм выделения пиков в сигнале становится чувствительным к шуму как будет показано далее.

В табл. 2 приведены значения исходных и найденных с помощью интерполяции амплитуд  $A_k$  для двух случаев: а) при  $\sigma = 7$  в отсутствие шума; б) при  $\sigma = 2$  и наличии 5%-го относительно амплитуды полезного сигнала случайного шума. Наличие во втором случае шума приводит к понижению границы разрешающей способности до значений  $\sigma \sim 2$ . Интересно отметить, что сам сигнал восстанавливается с хорошей точностью при  $\sigma \sim 5-6$  и в этом случае, хотя найденные амплитуды не соответствуют исходным (отличаются на несколько порядков). Отсюда следует, что интерполяция плохо подходит для анализа зашумленных сигналов, поскольку она опирается исключительно на значения функции в узлах, которые обычно на практике искажены шумом. Поэтому интерполяция воспроизводит и полезный сигнал, и шум, не позволяя тем самым получить информацию о компонентах полезного сигнала.

Таблица 2. Значения исходных амплитуд  $A_k$  и вычисленных с помощью интерполяции: а) при  $\sigma = 7$  в отсутствие шума; б) при  $\sigma = 2$  и наличии 5%-го случайного шума

Положение спектральной линии, $m_k$	Исходная амплитуда, $A_k$	Расчетная амплитуда в отсутствие шума ( $\sigma=7$ )	Расчетная амплитуда при наличии шума ( $\sigma=2$ )
-21	0	$-4,27 \cdot 10^{-4}$	0,121
-20	3	3,00	2,97
-19	0	$-4,48 \cdot 10^{-4}$	-0,221
-1	0	$-8,41 \cdot 10^{-4}$	$-3,01 \cdot 10^{-2}$
0	7	7,00	6,89
1	5	5,00	5,19
2	0	$-1,19 \cdot 10^{-3}$	-0,244
3	0	$-8,54 \cdot 10^{-4}$	0,310
4	0	$-1,18 \cdot 10^{-3}$	-0,324
5	2	2,00	2,21
6	0	$-1,18 \cdot 10^{-3}$	$-9,32 \cdot 10^{-2}$
29	0	$-4,99 \cdot 10^{-4}$	-0,183
30	5	5,00	5,09
31	0	$-5,33 \cdot 10^{-4}$	$-6,21 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, перед применением интерполяционного алгоритма необходимы дополнительные меры для обеспечения устойчивости вычислений. Например, может применяться очистка сигнала от шума, или проведение специальной регуляризации задачи о выделении пиков. Одним из способов предварительной обработки сигнала может быть, например, его сглаживание с помощью всплесков с компактным носителем, описанное в работе [7]. В статье [7] было показано, что использование всплесков Добеши для целей сглаживания обеспечивает достаточно высокую степень очистки сигнала от шума, а пики в сигнале полностью сохраняют свое положение и амплитуду.

## Заключение

В настоящей работе предложен метод выделения пиков лоренцевской формы в исследуемом сигнале путем его интерполяции целочисленными сдвигами. Рассчитаны коэффициенты узловой функции, и с их помощью проведены вычисления амплитуд составляющих компонент для тестовых сигналов. Показано, что интерполяционный метод в отсутствие шума дает хорошее качество восстановления исходного сигнала (погрешность порядка 0,1%) при значениях параметра  $\sigma < 7$ . При наличии 5%-го случайного шума, характерного для прикладных задач, границей применимости метода становятся значения  $\sigma < 2$ . Отсюда следует, что при работе с зашумленными сигналами необходимы дополнительные меры по обеспечению устойчивости вычислений. Одним из перспективных направлений исследований, по нашему мнению, является совместное применение интерполяционного метода и алгоритма очистки сигнала от шума с помощью всплесков Добеши [7].

## Литература

1. Борн М. Принципы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
2. Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме. – М.: Мир, 1978. – 492 с.
3. Дробышев А.И. Основы атомного спектрального анализа. – СПб: Санкт-Петербургский университет, 1997. – 200 с.
4. Maz'ya V. Approximate approximations / V. Maz'ya, G. Schmidt // AMS Mathematical Surveys and Monographs. – 2007. – V. 141. – 350 p.
5. Новиков И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М. А. Скопина. – М. : Физматлит, 2006. – 616 с.
6. Kiselev E. A., Minin L. A., Novikov I. Ya., Sitnik S. M. On Evaluation of Riesz Constants for Systems of Shifted Gaussians, arXiv:1308.2649, 2013.
7. Сравнительный анализ эффективности сжатия сигнала ЭКГ с помощью всплесков Добеши и дискретного косинусного преобразования / С.Д. Кургалин, Л.А. Минин, Е.А. Киселев, Нихад Насер // Системы управления и информационные технологии. – 2011. – № 3.1(45). – С. 177-180.

## METHOD OF EXTRACTION OF SPECTRAL COMPONENTS IN SIGNALS BY INTERPOLATION VIA SYSTEMS OF INTEGER SHIFTS

*Minin L.A., Nihad Nasir, Kiselev E.A., Kurgalin S.D.*

The algorithm of extraction of individual components in a complex spectrums using interpolation by integer shifts of Lorentz line shape that is often used in modeling of different processes and phenomena is developed. Estimation of the method's precision and its limits of application are carried out.