

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО АКТИВНОГО ФИЛЬТРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аболазм М.А., аспирант Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА);

Мельчаков В.Н., старший преподаватель МГТУ МИРЭА;

Решетняк С.А., д.ф.-м.н., профессор МГТУ МИРЭА, e-mail: reshets@bk.ru;

Третьяков Г.Н., к.т.н., доцент МГТУ МИРЭА, e-mail: gennady.tretyakov@rambler.ru.

Ключевые слова: отношение сигнал/шум, нелинейные фильтры низких и высоких частот.

Введение

В последнее время повышенный интерес вызывают процессы прохождения слабых сигналов и шума через нелинейные системы. Он вызван аномальным поведением выходного отношения сигнал/шум (S/N) и, в частности, открытием явления стохастического резонанса [1-3] и стохастической фильтрации сигналов [4, 5]. С практической точки зрения наиболее интересен эффект стохастической фильтрации сигналов, позволяющий достичь в радиотехнических системах выходные отношения S/N , превышающие входные значения [6, 7].

В основе исследований указанных процессов лежат стохастические дифференциальные уравнения, называемые ланжевеновскими. С целью получения аналитического решения используют подход, в котором анализируются эквивалентные им уравнения Фоккера-Планка для плотности вероятности [8, 9]. Однако уравнения в частных производных не всегда поддаются решению, поэтому данный подход имеет весьма ограниченную область применения. В спектральном методе [10] осуществляется переход от ланжевеновских уравнений к нелинейной системе алгебраических уравнений для спектральных компонент выходного сигнала, решение которой удаётся получить только в первом порядке метода итераций.

В общем случае прохождение сигнала и шума через нелинейные системы можно проанализировать на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений. По существу дела, численный анализ можно объединить с проведением прямых экспериментов в радиотехнических устройствах. В отличие от существующих в литературе работ по данной проблеме здесь численный анализ применяется для исследования эффекта стохастической фильтрации в нелинейных активных фильтрах как низких, так и высоких частот. Полученные выходные отношения S/N сравниваются с аналогичными отношениями на входе фильтров и указывают на наличие эффекта стохастической фильтрации в определённой области параметров фильтра, сигнала и шума.

В работе исследовались нелинейные фильтры низких и высоких частот (ФНЧ и ФВЧ), схемы которых изображены на рис. 1.

При устранении нелинейного элемента они представляют собой обычные линейные радиотехнические фильтры указанных частот. Нелинейный элемент содержит два одинаковых туннельных диода с источниками напряжения смещения E , соединённые параллельно. Левые полюса этих фильтров –

Развит метод численного исследования отношения сигнал/шум в нелинейном активном фильтре первого порядка. Показано, что при действии гармонического сигнала и шума на входе фильтра выходное отношение сигнал/шум превосходит входное при определённых параметрах как в фильтре низкой, так и в фильтре высокой частоты. Результаты анализа удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

входные, а правые – выходные. На вход фильтров подавалась смесь гармонического сигнала и шума, а на их выходе анализировалось напряжение между полюсами.

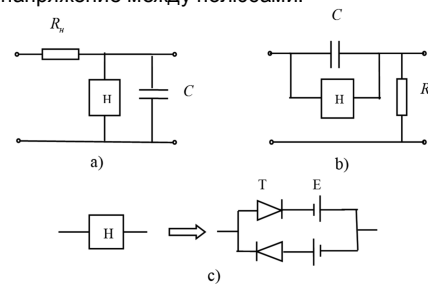


Рис. 1. Схемы ФНЧ и ФВЧ представлены соответственно на а) и б). Вид нелинейного активного элемента с двумя одинаковыми туннельными диодами (ТД) и постоянными источниками напряжения E смещения представлен на с)

Если через u обозначить напряжение на ёмкости, то для ФНЧ и ФВЧ справедливо уравнение

$$R_n C \frac{du}{dt} + R_n I(u) + u = a_c \cos(\omega_c t) + \xi(t), \quad (1)$$

где ω_c и a_c – угловая частота и амплитуда гармонического сигнала, $\xi(t)$ – стационарный гауссовый случайный процесс с конечным временем корреляции, $I(u)$ – ток через нелинейный элемент или его вольт-амперная характеристика.

Простой анализ показывает, что

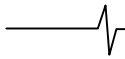
$$I(u) = i_o(E + u) - i_o(E - u),$$

где $i_o(u)$ – вольт-амперная характеристика отдельного туннельного диода. Поскольку $I(u)$ – нечётная функция переменной u , то её ряд по степеням u имеет вид

$$I(u) = Au + Bu^3 + \dots, \quad (2)$$

$$\text{где } A = \left. \frac{dI}{du} \right|_{u=0} = 2 \left. \frac{di_o}{du} \right|_{u=E}.$$

Выбираем смещение E таким, чтобы оказаться в области отрицательных сопротивлений туннельного диода. При этом коэффициент A также принимает отрицательные значения. Прямые



измерения $I(u)$ показывают [11], что в достаточно широкой области напряжений вольт-амперная характеристика нелинейного элемента описывается двумя первыми членами ряда (2).

От величины сопротивления R_n зависит вид уравнения (1). В данной работе рассматривался критический случай, когда $R_n = |A|^{-1}$, и после введения масштабов напряжения $u_M = (R_n B)^{-1/2}$ и времени $t_M = R_n C$ безразмерное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{du}{dt} + u^3 = h \cos(\omega_c t) + \zeta(t), \quad (3)$$

где u и t – нормированные на свои масштабы напряжение и время, $h = a_c / u_M$, $\zeta = \xi / u_M$, а под безразмерной частотой ω_c следует понимать величину $\omega_c t_M$.

В численном анализе уравнения (3) использовался метод Эйлера. Пусть t_n – точки отсчётов времени анализируемого процесса с шагом $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, а $u_n = u(t_n)$. Тогда из (3) следует, что

$$u_n = u_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(u, t') dt', \quad f(u, t) = -u^3 + e(t), \quad (4)$$

где $e(t) = h \cos(\omega_c t) + \zeta(t)$ – напряжение на входе фильтра.

Оценка интеграла в (4) по методу прямоугольников приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \Delta t \cdot f(u_{n-1}, t_{n-1}) = \\ &= u_{n-1} + \Delta t [-u_{n-1}^3 + e(t_{n-1})]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что в (5) выходной сигнал на n -ом шаге u_n определяется своими значениями на предыдущих шагах по времени, поэтому при заданном начальном условии $u_0 = u(0)$ все u_n легко находятся.

Оценка интеграла в (4) по методу трапеций приводит к более точной формуле:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} [f(u_n, t_n) + f(u_{n-1}, t_{n-1})] = S \\ &= u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} [-u_n^3 - u_{n-1}^3 + e(t_n) + e(t_{n-1})]. \end{aligned} \quad (6)$$

Нелинейное уравнение (6) удобно решать, используя итерационную схему. На первом шаге в правой части (6) значения u_n^3 вычисляются на основе (5). Полученное решение затем используется на втором шаге и т.д. Расчёты показали, что решение на первом шаге итераций отличается от решения на третьем шаге менее чем на 1%, т.е. для данного типа нелинейности уже в первом приближении достигается высокая степень точности.

В работе были выбраны параметры нелинейных фильтров, соответствующие эксперименту [11]. Приведём их значения: $A = -1.54 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}$, $B = 0.06 (B^2 \text{ Ом})^{-1}$ (для двух одинаковых туннельных диодов АИ301В), $R_n = |A|^{-1} = 65 \text{ Ом}$, $C = 15 \text{ нФ}$. Этим значениям соответствуют масштабы времени $t_M \cong 10^{-6} \text{ с}$ и напряжения $u_M = 0.5 \text{ В}$. На вход фильтров поступали гармонический сигнал и шум. Последний представлял собой стационарный случайный гауссовый процесс с нулевым средним значением, среднеквадратическим отклонением $\sigma = (\overline{\xi^2})^{1/2}$ от среднего значения и временем корреляции $\tau_\kappa = 10^{-7} \text{ с}$. Пара-

метр σ характеризует интенсивность шума.

Спектр анализируемых процессов находился с помощью быстрого преобразования Фурье выходного сигнала u в случае ФНЧ и $u_{R_n} = e(t) - u$ в случае ФВЧ. Шаг по времени выбирался равным τ_κ с числом точек отсчёта $N = 2^{14} = 16384$, что соответствует экспериментальной длительности анализируемых процессов $T \cong 1.6 \text{ мс}$ и разности $\Delta f = T^{-1}$ между дискретными частотами в спектре. В каждой точке отсчёта по времени включался датчик случайных чисел, распределённых по нормальному закону с параметром шума σ . Анализ амплитудного спектра входного процесса показал, что в нём содержится компонента сигнала $|a_s^{(ex)}|$ с номером S , определяемым частотой сигнала, а амплитуды шума практически равномерно распределены вплоть до граничной частоты τ_κ^{-1} .

Локальное в спектре отношение S/N на входе фильтра определялось, как и в работе [11]:

$$(S/N)_{ex} = |a_s^{(ex)}|^2 / |\xi_s^{(ex)}|^2,$$

$$|\xi_s^{(ex)}|^2 = \sum_{\Delta M=-20}^{20} |\xi_{s+\Delta M}^{(ex)}|^2 / 40,$$

где $\Delta n \neq 0$, а $|\xi_s^{(ex)}|^2$ – средняя мощность гармоник шума вблизи сигнальной частоты, которая с точностью до постоянного множителя $1/\Delta f$ совпадает со спектральной плотностью шума.

Аналогичным образом находилось отношение $(S/N)_{вых}$ на выходе фильтра. Как нетрудно показать, при данном определении S/N коэффициент передачи

$$q = (S/N)_{вых} / (S/N)_{ex}$$

в случае линейных фильтров всегда равен единице. Поэтому в работе основное внимание уделялось установлению областей параметров нелинейных фильтров, в которых $q > 1$.

Для разных реализаций входного шума результаты вычислений незначительно отличались друг от друга, поэтому найденные отношения S/N усреднялись по количеству K пусков шума. Для определения числа K проверялось свойство эргодичности шума или равенство его средних значений по времени и по ансамблю реализаций шума в отсутствии сигнала:

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\xi_n^{(i)})^2 \cong \langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\xi_n^{(i)})^2,$$

где $\xi_n^{(i)}$ – значение шума в произвольный момент времени t_n на его i -ой реализации. Как показала проверка, это равенство при $K = 200$ выполняется с относительной погрешностью (1-3)%. Отсюда полученные отношения S/N усреднялись по 200 реализациям входного случайного процесса.

Представленные выше формулы легли в основу численного анализа, результаты которого представлены на рис. 2-4.

На рис. 2 изображены зависимости коэффициента передачи q от амплитуды h сигнала при фиксированном и достаточно большом параметре шума σ . Все кривые указывают, что коэффициент передачи принимает значения $q > 1$ при амплитудах сигнала, превышающих определённые пороговые значения. Как было показано в работе [10], данный эффект возникает в результате подавления шума сигналом. Обозначенная точками кривая на рис. 2 отражает результаты эксперимента [11] для ФНЧ. Видно, что результаты этого численного анализа ФНЧ и [11] незначительно отличаются друг от друга, что обусловлено отличием реальной вольт-амперной характеристики от теоретической при больших амплитудах сигнала. Падение q с ростом h связано с насыщением выходного отношения S/N в области больших значений h . Для выбранных частоты сигнала и

параметра шума σ эффект стохастической фильтрации в случае ФВЧ проявляется более ярко по сравнению с ФНЧ.

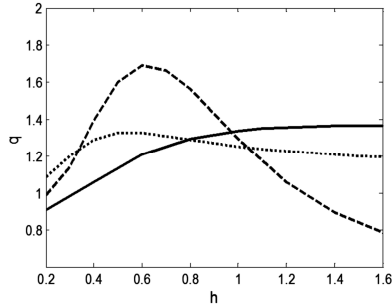


Рис. 2. Коэффициент q передачи по отношению сигнал/шум в зависимости от безразмерной амплитуды $\tilde{h} = a_c / u_m$ сигнала при $f=100$ кГц и $\sigma / u_m = 0.4$. В случае ФНЧ данные численного расчёта изображены сплошной кривой, кривая с точками соответствует экспериментальным данным [11]. В случае ФВЧ численные данные для q представлены пунктирной линией

На рис. 3 приведены результаты численного анализа коэффициентов передачи q как функции от частоты сигнала для фиксированных \tilde{h} и σ .

Кривые имеют локальные максимумы, соответствующие оптимальным для фильтрации частотам сигнала. В случае линейных фильтров (при отсутствии нелинейного элемента в схемах на рис. 1) граница между областями низких и высоких частот определяется характерной величиной $(R_n C)^{-1}$. Как следует из этих зависимостей, оптимальные частоты сигналов в нелинейных фильтрах существенно меньше $(R_n C)^{-1}$. В области высоких частот сигнала нелинейный член в уравнении (3) играет подчиненную роль и фильтр становится близким к линейному. В результате коэффициент передачи с ростом частоты сигнала асимптотически стремится к единице.

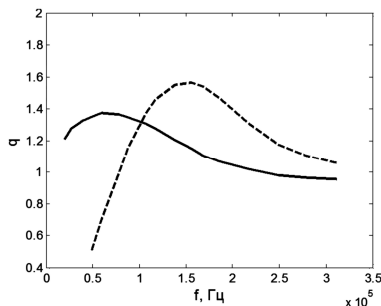


Рис. 3. Результаты численного анализа зависимости q от частоты f сигнала при $\tilde{h}=1$ и $\sigma / u_m = 0.4$. Сплошная кривая – результаты для ФНЧ, а пунктирная – для ФВЧ

На рис. 4 представлена зависимость q от безразмерного параметра шума σ для фиксированных значений частоты и амплитуды сигнала. Эти кривые также имеют локальные максимумы и указывают на то, что наилучшие условия фильтрации гармонических сигналов в исследованных фильтрах возникают при амплитудах сигнала \tilde{h} , превышающих параметр шума σ в (2-3) раза.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы. В работе развит эффективный метод численного анализа взаимодействия сигнала и шума в нелинейных фильтрах первого порядка. Результаты численного анализа по ФНЧ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Они также показывают, что эффект стохастической фильтрации реализуется не только в ФНЧ, но и в ФВЧ. При определенных параметрах ФВЧ, сигнала и шума коэффициент передачи по отношению S/N выше, чем коэффициент передачи у ФНЧ. Численный анализ занимает небольшое время счёта на обычных персональ-

ных компьютерах и при дальнейшей разработке его можно использовать в исследованиях фильтров высоких порядков.

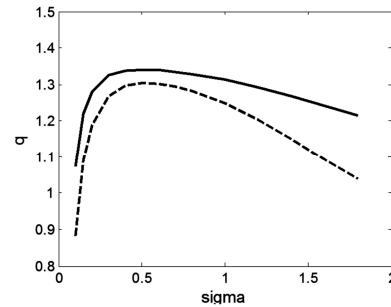


Рис. 4. Результаты численного анализа зависимости q от безразмерной интенсивности шума σ / u_m (σ) для частоты сигнала 100 кГц с амплитудой $\tilde{h}=1$. Сплошная и пунктирная кривые – соответственно результаты для ФНЧ и ФВЧ.

Литература

1. Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance. Rev. of Mod. Phys., 1998, v.70, №1, p. 223-287.
2. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. УФН, 1999, т.169, №1, с. 7-38.
3. Климонтович Ю.Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? УФН, 1999, т.169, №1, с. 39-47.
4. Hanggi P., Inchiosa M.E., Fogliatti D., Bulsara A.R. Nonlinear stochastic resonance: The saga of anomalous output-input gain. Phys. Rev. E., 2000. v.62, №5, p. 6155-6163.
5. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н., Щеглов В.А. Аномальный коэффициент передачи отношения сигнал-шум при стохастическом резонансе. Кр. сообщ. по физике. ФИАН, 2000, №5, с.12-17.
6. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Стохастический резонанс и фильтрация сигналов в нелинейной электрической системе второго порядка. Радиотехника, 2007, №9, с.19-25.
7. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. О стохастической фильтрации сигналов в нелинейных электрических системах. Радиотехника и электроника, 2009, т.54, №11, с.1369-1371.
8. Hu G., Haken H., Ning C.Z. A study of stochastic resonance without adiabatic approximation. Phys. Lett. A, 1992, v.172, №12, p.21-28.
9. Решетняк С.А., Щеглов В.А. О стохастическом резонансе с точки зрения фильтрующих свойств бистабильной системы. Квантовая электроника, 2003, т.33, №2, с.142-148.
10. Решетняк С.А., Третьяков Г.Н. Теоретическое исследование эффекта стохастической фильтрации. Радиотехника и электроника, 2013, т. 58, №4, с. 360-366.
11. Домбровский А.Н., Решетняк С.А. Экспериментальная проверка теорий стохастического резонанса и фильтрации сигналов в электрической цепи с двумя туннельными диодами. Научный вестник МИРЭА, 2007, №2(3), с.21-27.

NUMERICAL MODELING OF INTERACTION OF A SIGNAL AND NOISE IN THE NONLINEAR FILTER OF THE FIRST ORDER

Aboelazm M.A., Melchakov V.N., Reshetnyak S.A., Tretyakov G.N.

The method of numerical research of the signal-to-noise ratio in the nonlinear active filter of the first order is developed. It is shown that under the effect of a harmonic signal and noise at the entrance of filter the output signal-to-noise ratio exceeds the input ratio with the defined parameters both in the filter low and in the filter of high frequency. The results of analysis will satisfactory agree with experimental data.