

УДК 681.391

## ПОТЕРИ В ОТНОШЕНИИ СИГНАЛ/ШУМ В СИСТЕМЕ СВЯЗИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ДВОИЧНУЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ФАЗОВУЮ МОДУЛЯЦИЮ И ОРТОГОНАЛЬНОЕ КОДИРОВАНИЕ

Зайцев Г.В., д.т.н., ОАО ГСКБ «Алмаз-Антей», e-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru

**Ключевые слова:** дифференциальная двоичная фазовая модуляция, ортогональный код, мягкая метрика, вероятность ошибки на бит, потери в отношении сигнал/шум.

### Введение

Дифференциальная двоичная фазовая модуляция широко используется в системах связи в тех случаях, когда невозможно с необходимой точностью восстановить опорный сигнал по фазе и/или по частоте. Такое положение имеет место, в частности, при обмене короткими сообщениями между подвижными объектами при неизвестной доплеровской частоте.

Пусть  $\{c_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , – передаваемая битовая последовательность. Символами последовательности будем считать числа  $\pm 1$ . Тогда при использовании двоичной дифференциальной фазовой модуляции эта последовательность преобразуется перед передачей в последовательность  $\{b_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , по следующему правилу [1]:

$$b_k = b_{k-1} \cdot c_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

при произвольно задаваемой заранее известной величине  $b_{-1}$ . Исходная последовательность может быть восстановлена по формуле

$$c_k = b_k \cdot b_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

При  $b_k = 1$  фаза передаваемой несущей на отрезке, соответствующем  $k$ -тому биту, равна нулю, а при  $b_k = -1$  равна  $\pi$ .

В данной работе качество передачи будем характеризовать с помощью традиционной характеристики – вероятности  $P_b$  ошибки на бит передаваемой полезной информации. Дифференциальная модуляция вызывает некоторое увеличение вероятности  $P_b$ . Для сохранения вероятности ошибки требуется несколько увеличить затраты энергии  $E_b$  на передачу одного бита. Это увеличение будем рассматривать как компенсацию потерь в отношении сигнал/шум, вызванных использованием дифференциальной модуляции.

В системах связи без использования кодирования эти потери сравнительно невелики, могут быть рассчитаны по известным формулам и составляют величину порядка 1 дБ при вероятности  $P_b = 10^{-5} \dots 10^{-6}$  [1]. При использовании блочных турбокодов потери оцениваются величиной около 3 дБ [2].

*Анализируется система связи, использующая дифференциальную двоичную фазовую модуляцию и кодирование ортогональным кодом. Выводится аналитическое выражение для оценки потерь в отношении сигнал/шум, вызванных использованием дифференциальной модуляции. Показано, что эти потери могут достигать значительных величин, порядка 10 децибел. Анализируются несколько простых методов мягкой дифференциальной демодуляции, близких к оптимальным по критерию максимума отношения правдоподобия. Приводятся результаты моделирования рассматриваемого канала связи.*

В данной работе рассматривается система связи, использующая ортогональный код на основе матрицы Адамара [1] в сочетании с дифференциальной модуляцией. Такого рода системы продолжают довольно широко использоваться в некоторых приложениях. Для этого случая автору не удалось найти в литературе оценок потерь, вызванных использованием дифференциальной модуляции, и основная цель данной работы состоит в получении такой оценки. На примере рассматриваемой системы показывается, что при использовании дифференциальной модуляции в сочетании с кодом с большой степенью избыточности потери могут достигать значительных величин, порядка десятка децибел.

Упрощенная блок-схема рассматриваемой системы связи приведена на рис. 1. Короткие сообщения, генерируемые источником информации, кодируются ортогональным кодом на основе матрицы Адамара и затем модулируются с использованием дифференциальной двоичной фазовой модуляции. В канале связи действует аддитивный белый гауссовский шум. На приемном конце производится демодуляция сигнала и декодирование данных.

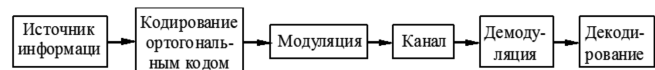


Рис. 1. Блок-схема системы связи

При кодировании используются матрицы Адамара  $\mathbf{H}_n$  порядка  $n = 2^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Они могут быть построены по рекуррентной формуле [1]  $\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{n/2} & \mathbf{H}_{n/2} \\ \mathbf{H}_{n/2} & -\mathbf{H}_{n/2} \end{bmatrix}$  из

$$\text{матрицы } \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В процессе кодирования каждые  $k$  бит информации (из символов 0,1), рассматриваемые как  $k$ -разрядное число  $\nu$ , преобразуются в  $\nu$ -тую строку матрицы  $\mathbf{H}_n$ . Ко-

дирование с помощью матриц Адамара дает возможность использовать прием в целом, при котором декодирование, реализуемое путем перемножения принятого вектора на матрицу Адамара, может быть осуществлено с помощью эффективного алгоритма быстрого преобразования Уолша-Адамара [3]. Далее будем считать, что используется именно такой способ декодирования.

Так как целью работы является исследование влияния дифференциальной модуляции, то другие факторы, ухудшающие прием, будем считать отсутствующими. Положим, в частности, что ошибки, обусловленные неточностью синхронизации и погрешностью определения несущей частоты, несущественны.

В случае использования дифференциальной модуляции необходимо, прежде всего, провести демодуляцию принятого сигнала с выработкой мягкого решения для использования преимуществ приема в целом.

### Мягкая демодуляция

Рассмотрим вход демодулятора, считая, что до этой стадии выполнен оптимальный прием каждого переданного бита. Хотя конкретный способ такого приема не играет роли, будем считать для определенности, что обработка выполняется в цифровом виде и включает этапы формирования квадратурных каналов с переносом на видеочастоту и интегрирования сигнала на временных интервалах, соответствующих принятым битам.

Пусть на входе демодулятора для  $k$ -го бита имеется комплексное число  $z_k = x_k + jy_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . В отсутствие шума в канале модули этих чисел равны единице, а фаза может быть произвольной, но одинаковой для всех чисел при полной компенсации несущей. В случае нулевой фазы принятый символ равен переданному:  $z_k = b_k$  (1). Полную последовательность принятых чисел обозначим символом  $\mathbf{Z} = \{z_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Наиболее широко используемый метод мягкой демодуляции состоит в вычислении достоверности принятых символов в виде логарифма отношения правдоподобия [4, 5]:

$$\lambda_k = \ln\left(\frac{\Pr\{c_k = 1 / \mathbf{Z}\}}{\Pr\{c_k = -1 / \mathbf{Z}\}}\right), \quad (2)$$

где  $c_k$  – передаваемый символ ( $\pm 1$ ), а  $\Pr(x)$  означает вероятность  $x$ . Основанием для использования именно такой формулы для мягкого решения является также то, что при использовании обычной двоичной фазовой модуляции получаемое число  $z_k$  является именно логарифмом отношения правдоподобия [4]. Преобразуем выражение (2) к виду, пригодному для реализации, для рассматриваемого способа модуляции.

Положим, что прием производится путем оптимальной некогерентной демодуляции [1, 6], при которой передаваемые сигналы рассматриваются как ортогональные, занимающие два смежных символа. Тогда при приеме  $k$ -го сигнала достаточно вычислить модули суммы и разности чисел, полученные в тактах  $k$  и  $k-1$ :

$$\begin{cases} s_k = |z_k + z_{k-1}|, \\ d_k = |z_k - z_{k-1}|. \end{cases} \quad (3)$$

Если  $s_k > d_k$ , то более вероятен символ  $c_k = 1$ , Если  $s_k < d_k$ , то более вероятен символ  $c_k = -1$ . Пару модулей (3) обозначим символом  $\mathbf{R}_k = \{s_k, d_k\}$ .

Тогда для  $k$ -го символа отношение (2) можно переписать в виде

$$\lambda_k = \ln\left(\frac{\Pr\{c_k = 1 / \mathbf{R}_k\}}{\Pr\{c_k = -1 / \mathbf{R}_k\}}\right). \quad (4)$$

Используя формулу Байеса, числитель (4) можно преобразовать к виду

$$\Pr\{c_k = 1 / \mathbf{R}_k\} = \frac{P\{\mathbf{R}_k / c_k = 1\} \Pr\{c_k = 1\}}{P\{\mathbf{R}_k\}},$$

где  $P(x)$  – плотность вероятности  $x$ . Выразив аналогичным образом знаменатель дроби в (4) и подставив полученные выражения в (4), получаем при равновероятных передаваемых символах:

$$\lambda_k = \ln\left(\frac{P\{\mathbf{R}_k / c_k = 1\}}{P\{\mathbf{R}_k / c_k = -1\}}\right). \quad (5)$$

Нетрудно показать, что случайные числа  $s_k, d_k$ , а также их модули, независимы. Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{R}_k / c_k = +1\} &= P\{s_k / c_k = +1\} P\{d_k / c_k = +1\}, \\ P\{\mathbf{R}_k / c_k = -1\} &= P\{s_k / c_k = -1\} P\{d_k / c_k = -1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим амплитуду полезного сигнала в последовательности  $\mathbf{Z}$  символом  $a$ , а среднеквадратичное значение (скз) шума в его действительной и мнимой частях –  $\sigma_0$ . (Напомним, что рассматривается система связи с короткими сообщениями, в течение которых сигнал не флюктуирует и его амплитуда не изменяется.) Каждое из чисел  $s_k$  и  $d_k$  является модулем случайного вектора, действительная и мнимая части которого являются независимыми нормальными компонентами с дисперсией  $\sigma^2 = 2\sigma_0^2$ . Распределение модуля такого числа описывается обобщенной функцией Релея [7]

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2 + x^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right), \quad (7)$$

где  $A$  – неслучайная амплитуда полезного сигнала в рассматриваемом числе, а  $I_0$  – функция Бесселя нулевого порядка. Для числа  $s_k$   $A = 2a$  при  $c_k = 1$ ; и  $A = 0$  при  $c_k = -1$ . Для числа  $d_k$   $A = 0$  при  $c_k = 1$ ; и  $A = 2a$  при  $c_k = -1$ . При  $A = 0$  функция  $I_0(0) = 1$ , и (7) преобразуется в обычное распределение Релея со средним квадратом чисел  $\overline{x^2} = 2\sigma^2$ .

Подставляя формулы (6) и (7) с указанными значениями параметра  $A$  в (5), получаем

$$\lambda_k = \ln\left(\frac{I_0\left(\frac{as_k}{\sigma_0^2}\right)}{I_0\left(\frac{ad_k}{\sigma_0^2}\right)}\right) = \ln I_0\left(\frac{as_k}{\sigma_0^2}\right) - \ln I_0\left(\frac{ad_k}{\sigma_0^2}\right). \quad (8)$$

При малом аргументе функция Бесселя может быть приближена первым членом разложения в ряд Фурье

$$I_0(x) \approx 1 + 0,25x^2.$$

Тогда, в случае малого отношения  $a/\sigma_0$  (т.е. при малом отношении сигнал/шум), формула (8) преобразуется к виду

$$\lambda_k \approx \frac{a^2}{4\sigma_0^4}(s_k^2 - d_k^2). \quad (9)$$

При большом аргументе функция Бесселя разлагается в ряд

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1}{8x} + \dots\right).$$

Тогда, ограничиваясь первым членом этого разложения, в случае большого отношения  $a/\sigma_0$  (т.е. при большом отношении сигнал шум), из (8) получаем

$$\lambda_k \approx \frac{a}{\sigma_0^2}(s_k - d_k) - 0,5 \ln \frac{s_k}{d_k}.$$

Второй член этого выражения имеет порядок  $\ln(a/\sigma_0)$  и поэтому существенно меньше первого при большом  $a/\sigma_0$ . Опуская малую составляющую, имеем

$$\lambda_k \approx \frac{a}{\sigma_0^2}(s_k - d_k). \quad (10)$$

Для вычисления достоверности символов по формулам (8), (9), (10) необходимо иметь оценку параметров  $a$  и  $\sigma_0$ . Метод такой оценки зависит от решаемой прикладной задачи. Заметим, однако, что множители перед скобками в (9), (10) являются постоянным для данного сеанса приема и поэтому могут быть опущены, если реализация вычислений допускает подобное масштабирование. В прикладной задаче, решаемой автором, для демодуляции используется устройство с плавающей запятой в 32-разрядном формате. В подобных случаях такое масштабирование не вызывает затруднений:

$$\lambda_k \approx s_k^2 - d_k^2 \quad \text{при } a/\sigma_0 \ll 1, \quad (11)$$

$$\lambda_k \approx s_k - d_k \quad \text{при } a/\sigma_0 \gg 1. \quad (12)$$

Эти формулы не требуют предварительной оценки параметров сигнала и шума.

Нетрудно проверить, что формулу (11) можно представить с точностью до константы в виде

$$\lambda_k = x_k x_{k-1} + y_k y_{k-1}, \quad (11a)$$

что совпадает с величиной, вычисляемой при оптимальной жесткой демодуляции [1, 6]. При жестком решении в качестве символа  $c_k$  используется знак числа (11a).

Сравнение вероятности ошибки на бит при использовании различных формул мягкой демодуляции (8), (11), (12) производилось с использованием математического моделирования.

### Метод моделирования

Статистическое математическое моделирование рассматриваемой системы связи проводилось на языке C++ в среде Microsoft Visual C++. Приведенные ниже результаты соответствуют диапазону вероятностей  $P_b > 10^{-8}$  в соответствии с требованиями прикладной

задачи, вызвавшей настоящее исследование.

Приведем особенности программы моделирования, оказывающие влияние на точность полученных результатов. Во-первых, значительное влияние оказывает качество генерируемого шума. В программе для генерации шума использовалась библиотека аттестованных генераторов случайных последовательностей на языке C++, имеющаяся в открытом доступе [8]. При этом для генерации шума с равномерным распределением использовался класс CRandomMersenne, реализующий алгоритм Mersenne Twister [9]. Для получения шума с нормальным распределением из шума с равномерным распределением использовался метод StochasticLib1::Normal, реализующий алгоритм, описанный в [10].

Вторым параметром, влияющим на точность получаемых оценок, является количество испытаний, или объем переданной информации. В модели работа программы завершалась, когда количество ошибочно переданных бит достигало заданного числа  $M$ . Это число при вероятности ошибки на бит  $P_b > 10^{-4}$  задавалось равным 1000, при  $10^{-4} > P_b > 10^{-6}$  – равным 300, а при меньших  $P_b$  – равным 100. Указанное сокращение заданного числа ошибок при уменьшении вероятности  $P_b$  вызвано стремлением минимизировать время выполнения программы.

Вероятность ошибки на бит оценивалась по формуле

$$\tilde{P}_b = \frac{k}{n}. \quad (13)$$

где  $k$  – число ошибок, возникших при передаче  $n$  бит.

Определим точность оценки (13), используя методику для вычисления доверительного интервала, изложенную в [11]. Величину (13) можно рассматривать как оценку  $\tilde{m}_x$  математического ожидания случайной величины  $X_i$ , принимающей значение 0, если при передаче бита не было ошибки, и значение 1, если была ошибка

$$\tilde{P}_b = \tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}. \quad (14)$$

Дисперсия величины  $X$  оценивается по формуле

$$\tilde{d}_x = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m}_x)^2}{n-1}.$$

После несложных преобразований из этой формулы, отбрасывая члены малого порядка по величине  $P_b \ll 1$ , получаем

$$\tilde{d}_x \approx \frac{k}{n}. \quad (15)$$

Так как величина  $\tilde{m}_x$  (14) является суммой большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин, то закон ее распределения по центральной предельной теореме близок к нормальному. Поэтому математическое ожидание  $M$  и дисперсия  $D$  этого закона определяются выражениями [11]:

$$M = m_x, D = \sigma_m^2 = \frac{d_x}{n}.$$

Подставляя во вторую из этих формул оценку  $d_x$  из (15), имеем

$$\sigma_m \approx \frac{\sqrt{k}}{n}.$$

Расчет доверительного интервала  $[\tilde{m}_x - \varepsilon_\beta, \tilde{m}_x + \varepsilon_\beta]$  для доверительной вероятности  $\beta = P(|\tilde{m}_x - m_x| < \beta)$  производится по формуле [11]

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_m}\right) - 1, \quad (16)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0.5t^2} dt.$

Из (16) нетрудно выразить  $\varepsilon_\beta$  в виде

$$\varepsilon_\beta = \sigma_m \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{k}}{n} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right).$$

Определим относительную точность  $\delta(\beta, k)$  оценки (13) как отношение полуширины доверительного интервала  $\varepsilon_\beta$  к  $\tilde{P}_b = \tilde{m}_x$ . При этом относительный доверительный интервал определяется выражением  $[1 - \delta(\beta, k), 1 + \delta(\beta, k)]$ . Тогда, обозначив  $c(\beta) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ , имеем

$$\delta(\beta, k) = \frac{\varepsilon_\beta}{\tilde{P}_b} = \frac{c(\beta)}{\sqrt{k}}. \quad (17)$$

Табл. 1 содержит результаты расчетов по формуле (17) для рассматриваемой задачи. В таблице приведена полуширина относительного доверительного интервала  $\delta(\beta, k)$  при доверительной вероятности  $\beta$  и числе ошибок  $k$ . Например, при доверительной вероятности  $\beta = 0,95$  и числе полученных при моделировании ошибок  $k = 300$  относительный доверительный интервал составляет  $\pm 12\%$ .

Таблица 1. Относительная точность  $\delta(\beta, k)$

$\beta$	Параметр $\delta(\beta, k)$ при $k =$		
	100	300	1000
0,80	0,13	0,075-3	0,040
0,90	0,16	0,092-5	0,052
0,95	0,20	0,12-1	0,062
0,99	0,26	0,15	0,82

Таблица позволяет рассчитать точность приводимых ниже оценок качества системы связи, полученных методом математического моделирования.

### Сравнение алгоритмов мягкой демодуляции

Первой целью моделирования было сравнение вероятности ошибки на бит  $P_b$  при использовании различных формул (8), (11), (12) для мягкой демодуляции. На рис. 2 приведены результаты моделирования рассматриваемой системы связи для случая использования матрицы

Адамара порядка  $n = 2^8$ . График демонстрирует зависимость вероятности появления ошибочного бита  $P_b$  от отношения энергии бита к спектральной плотности шума  $E_b / N_0$  для трех видов мягкой демодуляции. Сплошная линия соответствует формуле (8), штриховая – формуле (11), штрихпунктирная – формуле (12). Доверительные интервалы оценок могут быть рассчитаны по табл. 1. На рис. 2 они не показаны, чтобы не загромождать график.

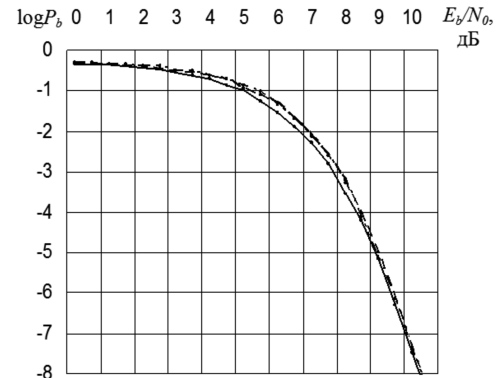


Рис. 2. Сравнение эффективности трех видов мягкой модуляции

Все три линии довольно близки друг к другу и сливаются на значительной части графика. Однако, формула (8) дает несколько лучшие результаты, особенно в средней части кривых. В диапазоне вероятностей  $P_b = 10^{-2} - 10^{-7}$  отличие энергии на бит, необходимой для достижения данной вероятности, для трех кривых не превосходит 0,3 дБ.

С практической точки зрения такое отличие несущественно, особенно если учесть ширину доверительных интервалов оценок. Моделирование показывает также аналогичное поведение подобных зависимостей и при других размерах матрицы Адамара в диапазоне 8...1024. Таким образом, эффективность трех рассмотренных формул мягкой демодуляции примерно одинакова. Для определенности далее в данной работе будет использоваться формула (11).

На рис. 3 приведена полученная при моделировании зависимость вероятности ошибки на бит от отношения  $E_b / N_0$  для длин кода  $n = 16, 64, 256, 1024$ . Пунктирной линией показана для справки аналогичная кривая для случая оптимальной дифференциальной демодуляции без использования кода, выражаемая формулой [1, 6]  $P_b = 0,5 \exp(-E_b / N_0)$ .

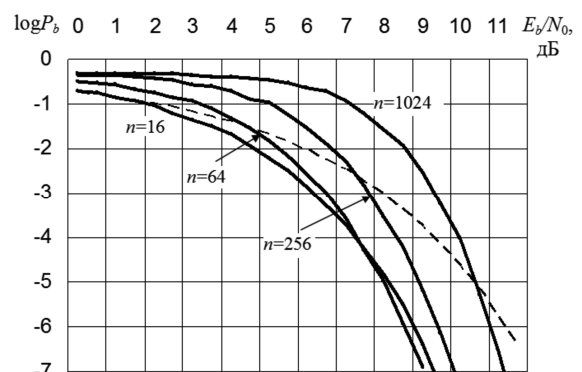


Рис. 3. Зависимость  $P_b$  от отношения  $E/N_0$

Чем более длинный код используется, тем больше диапазон отношений сигнал/шум, в котором кодирование увеличивает вероятность ошибки. Например, для  $n = 1024$  кодирование ухудшает ситуацию при  $P_b > 10^{-5}$ . И только при дальнейшем снижении целевой вероятности  $P_b$  появляется некоторый выигрыш.

### Потери в отношении сигнал/шум

Оценим изменение отношения сигнал/шум при использовании мягкой демодуляции по формуле (11) или (11а):

$$\lambda_k = x_k x_{k-1} + y_k y_{k-1}. \quad (11a)$$

Нетрудно видеть, что изменение отношения сигнал/шум не зависит от того, какие из символов  $\pm 1$  передавались в тактах  $k$  и  $k+1$ . Поэтому достаточно оценить его для случая одинаковых соседних символов. Представим составляющие в (11а) в следующем виде

$$\begin{aligned} x_k &= a \cos \varphi + \varepsilon_1, & y_k &= a \sin \varphi + \varepsilon_2 \\ x_{k-1} &= a \cos \varphi + \varepsilon_3, & y_{k-1} &= a \sin \varphi + \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (18)$$

где  $a$  и  $\varphi$  – амплитуда и фаза сигнала, которые после оптимального приема каждого переданного бита одинаковы для всех чисел, а  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , – шумовые составляющие компонент, которые для рассматриваемого канала связи являются независимыми и одинаково нормально распределенными величинами со среднеквадратичным значением  $\sigma_0$ . При этом отношение амплитуды сигнала  $a$  к скз шума  $\sigma_{in} = \sqrt{2}\sigma_0$  для сигнала перед демодуляцией составляет

$$\rho_{in} = \frac{a}{\sqrt{2} \sigma_0}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (11а), имеем

$$\begin{aligned} \lambda_k &= a^2 + a[(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \cos \varphi + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4) \sin \varphi] + \\ &+ \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_4. \end{aligned} \quad (20)$$

Первый член представляет собой полезную выходную составляющую, остальные являются случайными. Дисперсия второго слагаемого равна  $D_2 = 2a^2\sigma_0^2$ , а последних двух –  $D_3 = 2\sigma_0^4$  [7]. Поэтому скз случайных слагаемых равно

$$\sigma_{out} = \sqrt{2} \sigma_0 a \sqrt{1 + \frac{\sigma_0^2}{a^2}}. \quad (21)$$

Поделив амплитуду  $a^2$  полезной составляющей в (20) на скз (21), получаем выходное отношение сигнал/шум по амплитуде

$$\rho_{out} = \frac{a}{\sqrt{2} \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{\sigma_0^2}{a^2}}},$$

или, используя (19),

$$\rho_{out} = \rho_{in} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2\rho_{in}^2}}}. \quad (22)$$

Математическое моделирование подтверждает эту формулу. Расхождение между значениями  $\rho_{out}$ , расчи-

танными по формуле (22) и полученными на модели, не превосходит 0,06 дБ при  $\rho_{in}$  в диапазоне -20...+80 дБ.

Из формулы (22) следует, что потери в отношении сигнал/шум, вызванные дифференциальной модуляцией, равны в децибелах

$$L = -20 \log(\rho_{out} / \rho_{in}) = 10 \log\left(1 + \frac{1}{2\rho_{in}^2}\right). \quad (23)$$

Согласно (23) потери монотонно падают при увеличении отношения сигнал/шум. Например, при значениях  $\rho_{in}$ , соответствующих минус 6 дБ (соответственно, 0 дБ и 6 дБ) они составляют 3 дБ (1,76 дБ и 0,5 дБ).

Выразим потери (23) через второй общепринятый способ выражения отношения сигнал/шум, а именно через отношение энергии передаваемого полезного бита к спектральной плотности шума  $E_b / N_0$ . После оптимального приема каждого бита на входе демодулятора два варианта отношения сигнал/шум связаны между собой соотношением

$$\rho_{in}^2 = \frac{a^2}{\sigma_{in}^2} = 2r \frac{E_b}{N_0},$$

где  $r = k/n$  – скорость передачи кода. Подставляя это выражение в (23), получаем

$$L = 10 \log\left(1 + \frac{n}{4k(E_b / N_0)}\right). \quad (24)$$

Влияние мягкой дифференциальной демодуляции на вероятность ошибки не ограничивается увеличением дисперсии шума. Нелинейные операции при вычислении мягкой метрики приводят к тому, что закон ее распределения не является нормальным. Усложнение характера распределения ограничивает возможность аналитических оценок влияния демодуляции на вероятность ошибки при использовании разнообразных методов декодирования избыточных кодов. Однако при приеме в целом ситуация несколько упрощается. Вычисление корреляционных сумм между кодовыми векторами и вектором, полученным после мягкой демодуляции, приводит к суммированию случайных величин вида (11а). При этом в силу центральной предельной теоремы результат суммирования нормализуется, и тем лучше, чем длиннее код. Поэтому есть основания ожидать, что формулы (23), (24) дают неплохое приближение для потерь в отношении сигнал/шум в рассматриваемой системе связи рис. 1.

Проверка этого предположения проводилась путем математического моделирования в описанной выше программе. Методика проверки состояла в следующем. Моделировались две системы связи, одна из которых использовала обычную, а вторая – дифференциальную фазовую модуляцию. С помощью этих моделей производилось построение графиков зависимостей  $P_b(E_b / N_0)$ . Далее по построенным графикам определялась разница в отношениях  $E_b / N_0$ , необходимых для достижения одной и той же вероятности  $P_b$ . Эта разница принималась за потери, обусловленные использованием дифференциальной модуляции.

Результаты подобных расчетов приводят к следующему выводу. При  $n = 8...1024$  в диапазоне

$E_b / N_0 = 5-15$  дБ величина  $\Delta$  отличия полученных результатов от формулы (24) не превосходит 0,5 дБ. Оценка точности такого расчета показывает, что при доверительной вероятности 0,95 величина доверительного интервала вокруг полученной величины  $\Delta$  составляет  $\pm 0,3$  дБ.

Таким образом, совпадение результатов моделирования с теоретическими довольно хорошее, и формулу (24) можно использовать для оценки потерь, обусловленных дифференциальной модуляцией в рассматриваемой системе связи, с точностью до нескольких десятых децибела.

$L$ , дБ

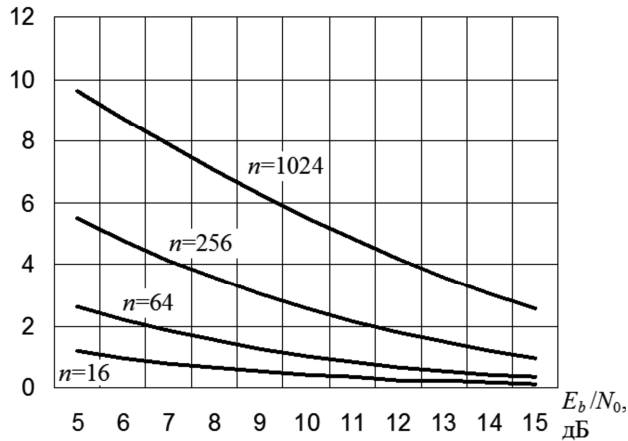


Рис. 4. Потери дифференциальной модуляции

$G$ , дБ

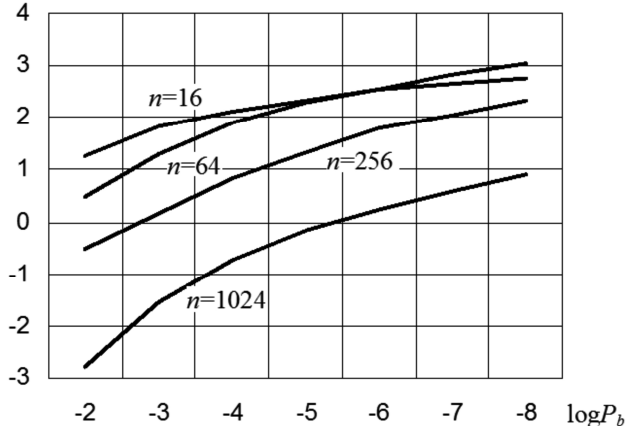


Рис. 5. Выигрыш за счет кодирования

График зависимости потерь (24) от отношения  $E_b / N_0$  для  $n = 16, 64, 256, 1024$  в рабочем диапазоне параметра  $E_b / N_0$  приведен на рис. 4. Потери быстро растут с ростом длины кода и для  $n = 1024$  достигают величины около 10 дБ при  $E_b / N_0 = 5$  дБ. Это объясняется тем, что величина потерь определяется отношением  $E_{b_{trans}} / N_0$  энергии передаваемого символа к спектральной плотности шума (см. (24)), а с ростом длины кода эта энергия падает в соответствии с соотношением  $E_{b_{trans}} = kE_b / n$ .

Довольно значительные потери, показанные на рис. 4, существенно снижают энергетический выигрыш,

получаемый за счет использования кодирования. На рис. 5 приведена зависимость получаемого энергетического выигрыша кодирования  $G$  в децибелах в зависимости от требуемой вероятности ошибки на бит для нескольких длин кодов. Под энергетическим выигрышем понимается величина снижения отношения  $E_b / N_0$ , требуемого для достижения заданной вероятности ошибки на бит, по сравнению с оптимальным приемом при использовании дифференциальной двоичной модуляции без использования кодирования. Как видно из рис. 5, чем больше длина кода, тем меньше этот выигрыш (в диапазоне  $P_b > 10^{-8}$ ). При дальнейшем снижении  $P_b$  выигрыш увеличивается, и кривые для кода с большей избыточностью пересекают кривые для кода с меньшей избыточностью. Однако в анализируемом диапазоне вероятностей наблюдается пересечение только кривых для  $n = 16$  и  $n = 64$ . Поэтому для рассматриваемого диапазона нецелесообразно увеличивать длину кода сверх 64. Более того, даже при выборе небольшой длины кода энергетический выигрыш невелик и не превосходит 2-3 дБ.

### Заключение

В работе получено аналитическое выражение для оценки потерь в отношении сигнал/шум, вызванных использованием дифференциальной модуляции при ортогональном кодировании. Показано, что эти потери могут быть значительными. Из приведенных формул (22)-(23) очевидно, что это положение относится также и к другим разновидностям кодов, имеющим большую избыточность, так как потери возникают на стадии демодуляции и не зависят от вида используемого кода. При использовании приема в целом дополнительные потери отсутствуют, и указанные формулы справедливы также и для выхода декодера. При других методах декодирования энергетический выигрыш может быть еще меньше, однако, расчет конкретного значения потерь аналитическими методами затруднителен, так как распределение шумовых составляющих после дифференциальной демодуляции, вообще говоря, не является нормальным.

### Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь. М.: Издательский дом «Вильямс». 2007. 1100 с.
2. Use and Performance of the ANA4501 Turbo Product Code Encoder/Decoder with Differential Phase Shift Keying (DPSK). // ANA Application Note ANTPC04\_0100. URL: <http://www.aha.com>.
3. Хармут Х. Теория секвентного анализа. М.: «Мир». 1980. 574 с.
4. Channel Coding in Communication Networks. / Ed. Alain Glavieux / London: ISTE Ltd. 2007. 418 с.
5. Гладких А.А. Основы теории мягкого декодирования избыточных кодов в стирающем канале связи. Ульяновск: УлГТУ. 2010. 380 с.
6. Fuqin Xiong. Digital Modulation Techniques. New York: Artech House. 2006. 1017 p.

7. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники, книга 1. М.: Сов. Радио. 1966. 728 с.

8. Anger Fog. Instructions for the random number generator libraries. 2010. URL: <http://www.agner.org>.

9. Matsumoto M., Nishimura T., Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. 1998. № 8. P. 3–30.

10. Devroye L. Non-uniform random variate generation. New York: Springer. 1986.

11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа. 1999. 576 с.

## LOSS IN SIGNAL-TO-NOISE RATIO FOR COMMUNICATION SYSTEM WITH BINARY DIFFERENTIAL SHIFT KEYING AND ORTHOGONAL CODING

Zaytsev G. V.

The paper analyzes digital communication system which uses binary differential phase shift keying and orthogonal coding. The analytical expression is derived for estimation of losses in signal-to-noise ratio induced by differential modulation. It is shown that this loss may be up as high as 10 dB. Several simple near-optimal methods of soft differential demodulation are considered. Results of computer simulation are given.

### НАУЧНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ:

#### Обработка и передача информации в системах телекоммуникаций

##### Секция 1: Теория сигналов и систем

Одним из основных объектов исследования теории сигналов традиционно являются методы анализа-синтеза, модуляции-демодуляции, кодирования-декодирования сигналов с целью обеспечения высокой помехоустойчивости и скорости передачи информации в условиях воздействия интенсивных помех и межсимвольной интерференции. Возможности современных цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно, прибегая к оптимальным методам синтеза, преобразования и кодирования сигналов.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:

- многопороговое декодирование;
- оценка пропускной способности канала связи;
- оценка функции автокорреляции;
- вейвлет-преобразование – ряды Хаара;
- синтез последовательностей на расширенных полях Галуа;
- построение комплементарных пар последовательностей;
- синтез многофазных последовательностей;
- поиск бинарных оптимальных последовательностей;
- передача и прием неортогональных многочастотных сигналов;
- повышение эффективности одночастотных сигналов;
- прием сигналов с решетчатой модуляцией;
- многопороговые алгоритмы параллельного каскадирования;
- алгоритм Витерби приема клипированных сигналов;
- низкоплотностное декодирование.

##### Секция 3: Обработка сигналов в системах телекоммуникаций

Работа секции проводилась по трем основным направлениям, сохраняющим актуальность с точки зрения дальнейшего внедрения современных информационных технологий реального времени в системах телекоммуникаций: обработка и передача речевых и звуковых сигналов, эхо-компенсация, эквалайзинг и борьба с замираниями, проблема межсимвольной интерференции (МСИ), реализация систем связи с применением ЦОС, том числе вопросы обработки сигналов при решении задач синхронизации и маршрутизации.

На секции обсуждались следующие актуальные научные проблемы:

- компрессия аудиосигналов на основе разреженной аппроксимации;
- распознавание речевых команд на фоне шума;
- декомпозиция речевых сигналов на эмпирические моды;
- низкоскоростное кодирование речи;
- неэталонная оценка разборчивости речевых сигналов;
- адаптивная коррекция сигналов с компенсацией шума;
- анализ влияния межсимвольной задержки в системах с расширенным спектром;
- сравнительный анализ помехоустойчивости кодов;
- обработка сигналов OFDM в канале с памятью;
- адаптивная Калмановская фильтрация в OFDM-системах;
- оценивание параметров радиоканала в OFDM приемнике;
- оценка канала связи на основе формирования мягких решений;
- частотное уплотнение на основе неортогональных сигналов;
- слепая синхронизация частоты и фазы КАМ-сигналов;
- тактовая синхронизация в системах с двухпозиционной фазовой модуляцией;
- определение вида модуляции.

