

УДК 621.391

## НЕИНВАРИАНТНОСТЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ФУРЬЕ-СПЕКТРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ТОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

*Пономарева О.В., к.т.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail: ponva@mail.ru*

**Ключевые слова:** дискретный сигнал, конечный интервал, скользящие спектральные измерения, базис, параметрические дискретные экспоненциальные функции, неинвариантность, текущий энергетический фурье-спектр, тональные компоненты.

### Введение

Во многих областях научных исследований, например, в таких, как радиолокация, виброакустическая диагностика, распознавание и синтез речи, пассивная гидролокация, биомедицина, часто сталкиваются с необходимостью решения задачи выявления скрытых периодичностей [1-5] (задачи обнаружения и измерения параметров тональных компонент). Одним из методов эффективного выявления скрытых периодичностей в сигналах такого рода является измерение на конечных интервалах их скользящих фурье-спектров в базисе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) или в базисе параметрических ДЭФ (ДЭФ-П), являющихся обобщением ДЭФ [1, 4, 5]. Суть данного подхода заключается в определении фурье-спектра сигнала во временном окне в  $N$  отсчетов, которое перед повторным спектральным измерением смещается на один отсчет [3, 4]. При этом в работах по цифровому спектральному анализу полагается, по *умолчанию*, что скользящий энергетический фурье-спектр тонального сигнала в базисе ДЭФ инвариантен к временному сдвигу тонального сигнала. Например, алгоритм локализации спектральных пиков, описанный в [3], основывается на этом предположении априори. Экспериментальные исследования на модельных сигналах, проведенные автором настоящей работы, показали, что предположение об инвариантности скользящего энергетического фурье-спектра тонального сигнала к его временному сдвигу, как в базисе ДЭФ, так и в базисе ДЭФ-П, в общем случае несправедливо.

Целью настоящей работы является исследование вопроса инвариантности скользящих энергетических фурье-спектров действительных тональных сигналов, заданных на конечных интервалах, в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций.

### Измерение энергетического фурье-спектра сигнала, заданного на конечном интервале, в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций

Пусть на конечном интервале в  $N$  отсчетов задан сигнал:

*Исследованы методы и алгоритмы скользящих спектральных измерений на конечных интервалах. Рассмотрены теоретические основы измерения скользящих энергетических фурье-спектров дискретных сигналов в базисах дискретных экспоненциальных функций и параметрических дискретных экспоненциальных функций. Приведены теоретические и практические результаты оценивания неинвариантности скользящих энергетических фурье-спектров тональных компонент на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций.*

$$x(n); n = \overline{0, N-1}. \quad (1)$$

Для разложения такого рода сигналов в работах [6-9] введены и исследованы базисные системы ДЭФ-П:

$$\begin{aligned} \text{def}_p(p, l, \theta) = W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right], \\ 0 \leq \theta < 1; p, l = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что при каждом значении параметра  $\theta$  мы получаем свою, определяемую  $\theta$ , систему базисных функций, разложение по которой определено как параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П) при значении параметра  $\theta$ . В частном случае, при  $\theta = 0$  мы получим базисную систему ДЭФ:

$$\text{def}(k, n) = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}kn\right], k, n = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$

разложение по которой известно как дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Пара ДПФ-П в матричной форме задается следующими соотношениями:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (4)$$

$$X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (5)$$

где  $*$  – знак комплексного сопряжения,  $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – представление дискретного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , в виде вектора  $N$  – мерного линейного пространства;  $T$  – знак транспонирования;  $S_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s((N-1), \theta)]^T$  – вектор коэффициентов разложения  $X_N$  по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П), задаваемой матрицей  $F_{N,\theta}$ :



гребешковым эффектом. Появление данного эффекта связано с тем, что, так как амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) каждого бина [3] ДПФ имеет вид  $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$ , то в общей АЧХ ДПФ появляются провалы, достигающие почти 4дБ при измерении энергетического фурье-спектра.

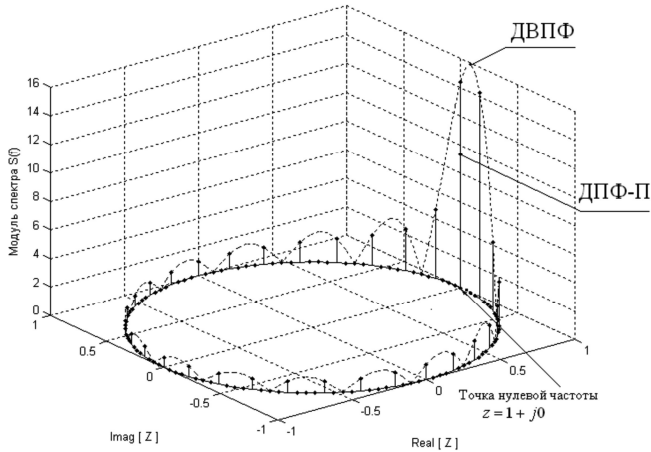


Рис. 1. Сигнал  $x(n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot (k + \theta) \cdot n)$ ,

$$n = \overline{0, N-1}, N = 16, k = 0, \theta = 1/2.$$

ДВПФ сигнала (пунктирная линия), ДПФ-П сигнала (вертикальные линии)

Для борьбы с указанными нежелательными эффектами в цифровом спектральном анализе (как одномерных так и многомерных последовательностей), широкое применение получила, так называемая, операция дополнения нулями (ОДН) [5]. Отметим, что очень часто (например [2, 4]), данной операции ошибочно приписывается свойство, которым она не обладает – улучшение разрешающей способности по частоте. На самом деле, данная операция позволяет за счет уменьшения интервала дискретизации по частоте только более детально находить ДВПФ сигнала, улучшая, таким образом, различение тональных компонент в частотной области. Однако, необходимо отметить, что при несомненных достоинствах данной операции, благодаря которым она и получила столь широкое применение в ЦОС, ей присущи два существенных недостатка. Практическое применение операции дополнения нулями требует значительно дополнительного объема памяти и значительных непроизводительных вычислительных затрат, из-за необходимости проведения большого числа операций с нулевыми отсчетами [6].

Предложенное в работах автора ДПФ-П [6-9, 11-13], позволяет при вычислении фурье-спектров, подвергнутых ОДН, не только не увеличивать требуемый объем памяти, сократить непроизводительные вычислительные затраты, свести влияние эффектов частотола и паразитной модуляции фурье-спектра к минимуму, но и находить ДВПФ сигнала на любых частотах, варьируя параметром  $\theta$ . При этом появляется возможность существенно повысить (по сравнению с операцией дополнения нулями) различение гармоник в частотной области. Кратко поясним сказанное. Дело в том, что использова-

ние алгоритмов быстрого вычисления ДПФ (алгоритмов БПФ) накладывает жесткие требования к длительности сигнала. Например, для алгоритмов БПФ с основанием 2 длительность сигнала должна быть степенью 2. Так как это же требование распространяется и на длительность сигнала, дополненного нулями, то набор частот дополнительных фильтров оказывается фиксированным. В случае применения для анализа сигнала на конечном интервале ДПФ-П частоты бинов (фильтров) варьируются параметром  $\theta$  и могут быть в принципе любыми. Что же касается сокращения непроизводительных вычислительных затрат в случае применения ДПФ-П, то эффект достигается за счет исключения операций с нулевыми значениями сигнала, путем вычисления не ДПФ сигнала, подвергнутого ОДН, а вычисления ДПФ-П исходного сигнала. Более подробно эффективность ДПФ-П при решении и иного круга задач рассмотрена в работах [10-22].

В силу того, что теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в любом дискретном, полном и ортогональном базисе определяет сдвиг сигнала как некоторую операцию перестановки его отсчетов, то этот сдвиг, в свою очередь, определяет и некоторую операцию периодического продолжения исходного сигнала. Другими словами любая базисная система ДЭФ-П при определенном  $\theta$  задает продолжение исходного сигнала в виде параметрической  $N$  – периодической последовательности:

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]} \quad (11)$$

где  $\text{ent}[\cdot]$  – символ взятия целой части.

В частном случае при  $\theta = 1/2$  мы приходим к понятию  $N$  – антипериодической решетчатой функции:

$$x_{1/2}(n + N) = -x_{1/2}(n).$$

Отметим, что продолжение действительного сигнала  $x(n), n = \overline{0, N-1}$ , «навязываемое» сигналу ДПФ-П (продолжение задается матрицей  $C_\theta$ ), при значении параметра  $\theta \neq 0, 1/2$  является комплекснозначной функцией (рис. 2, 3).

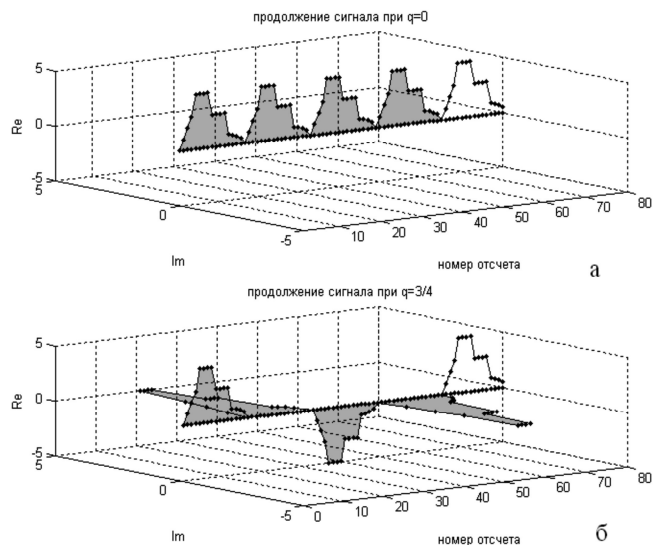


Рис. 2. Параметрическая  $N$ -периодическая последовательность  $x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}$ ,  $N = 16$ ,  
а –  $\theta = 0$ ; б –  $\theta = 1/4$

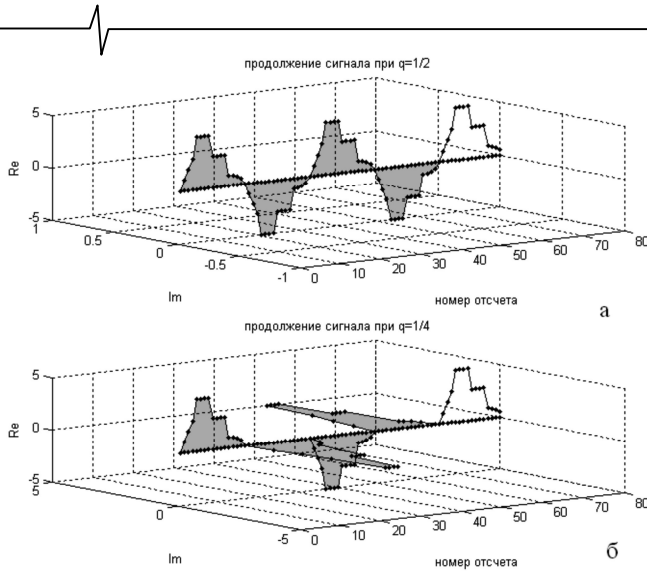


Рис. 3. Параметрическая  $N$ -периодическая последовательность  $x_\theta(n) = x(n \bmod N)W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}$ ,  $N = 16$ ,  
а –  $\theta = 1/2$ ; б –  $\theta = 3/4$

Рис. 2 и 3 позволяют проиллюстрировать еще один аспект взаимосвязи ДПФ-П сигнала, заданного на конечном интервале, с ДПФ сигнала, подвергнутого ОДН. Сигнал  $x(n)$ , заданный на конечном интервале  $0, N-1$ , и сигнал  $x_{\text{Донол}}(n)$ , дополненный нулевыми отсчетами, число которых равно  $N \cdot (r-1)$ , может быть на интервале  $0, (N \cdot r-1)$  представлен в виде суммы:

$$x_{\text{Донол}}(n) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} x_i(n) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} x_\theta(n) \Big|_{\theta=i \cdot \frac{1}{r}},$$

где  $x_\theta(n)$  – задается формулой (11),  $n = 0, (N \cdot r-1)$ .

### Измерение скользящего фурье-спектра сигнала, заданного на конечном интервале, в базе параметрических дискретных экспоненциальных функций

Одним из методов осуществления скользящих измерений энергетического параметрического фурье-спектра на  $(k+\theta)$  частоте является предварительное вычисление  $k$ -го бина ДПФ-П (6) при значении параметра равным  $\theta$  в окне длительностью в  $N$  отсчетов при сдвиге окна на  $r$  отсчетов вправо по исходному сигналу  $x(m)$ :

$$S_N^{(r)}(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r) W_N^{(k+\theta)n};$$

где  $k = 0, N-1$ ,  $r=0,1,2,\dots$  (12)

Из выражения (12) непосредственно следует, что проведение скользящего измерения методом ДПФ-П в реальном времени требует проведения  $N$  комплексных умножений и сложений за время одного такта дискретизации. Очевидно, что при высоких частотах дискретизации это сложно осуществить на практике.

В работе [10] для борьбы с указанным недостатком предложен алгоритм скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П). Там же показано, что разностное уравнение, описывающее СДПФ-П:

$$S_N^{(p)}(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} \left[ S_N^{(p-1)}(k, \theta) + x(p) - x(p-N) \exp(-j2\pi\theta) \right], \quad (13)$$

где  $p = N, N+1, N+2, \dots$  может быть реализовано в виде обобщенного КИХ-фильтра, структура которого приведена на рис. 4:

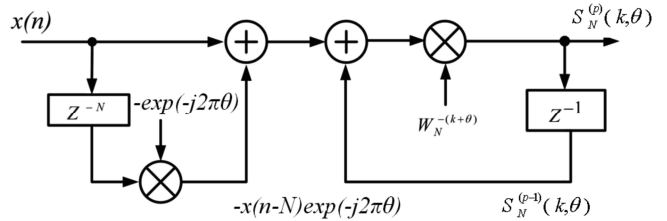


Рис. 4. Структура фильтра однобинового скользящего СДПФ-П

Алгоритм СДПФ-П, позволяет, во-первых, рекуррентно вычислять значение  $k$ -го бина  $N$ -точечного ДПФ-П из скользящего окна в  $N$  отсчетов; во-вторых, в отличие от стандартного ДПФ (когда значение параметра  $\theta = 0$ ), дает возможность проводить оценку текущего спектра в окне в  $N$  отсчетов не на фиксированных частотах, а из набора частот, значения которых варьируются параметром  $\theta$ :

$$\left\{ 2\pi(k+\theta)/N \right\},$$

где  $k = 0, N-1$ ,  $0 \leq \theta < 1$ . (14)

Рассмотрим вопрос инвариантности скользящего энергетического фурье-спектра сигнала для двух видов продолжения входного дискретного сигнала: естественного («реального») продолжения сигнала и «искусственного» продолжения сигнала, «навязанного» параметрическим дискретным преобразованием Фурье.

### Инвариантность скользящего параметрического энергетического фурье-спектра дискретного сигнала, заданного на конечном интервале

Введем символическое обозначение для ДПФ-П и ОДПФ-П параметрической  $N$ -периодической последовательности  $x_\theta(n)$ ,  $n = 0, N-1$ :

$$x_\theta(n) \xleftarrow{F-P} S_N(k, \theta). \quad (15)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ-П можно записать в следующем виде [6, 8, 11]:

$$\text{если } x_\theta(n) \xleftarrow{F-P} S_N(k, \theta), \text{ то}$$

$$x_\theta(n+m) \xleftarrow{F-P} W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta). \quad (16)$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность параметрического энергетического фурье-спектра (9) параметрической  $N$ -периодической последовательности  $x_\theta(n)$  (11). Полученный результат не является неожиданным, так как «искусственное» продолжение сигнала согласовано с используемым преобразованием.

Рассмотрим скользящее измерение на  $(k+\theta)$ -й частоте параметрического фурье-спектра дискретного действительного сигнала  $n = 0, Nr-1$  при естественном его продолжении.

В этом случае разностное уравнение (13) скользящего измерения на  $(k + \theta)$  -й частоте параметрического фурье-спектра дискретного сигнала  $x(n)$  при сдвиге на  $m$  отсчетов временного окна длительностью  $N$  отсчетов, можно представить в следующем виде:

$$S_m(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} S_{(m-1)}^*(k, \theta), \quad (17)$$

где  $W_N^{-(k+\theta)} = \exp[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ ;  $m = \overline{1, 2, 3, \dots}$  – сдвиг временного окна;

$$S_{(m-1)}^*(k, \theta) = [S_{(m-1)}(k, \theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]$$

где  $N$  – число отсчетов во временном окне (длительность окна).

Положим, что итерационный процесс выхода алгоритма СДПФ-П на режим скользящего измерения происходит на нулевом шаге, т.е. тогда, когда выходное значение СДПФ-П равно значению коэффициента ДПФ-П:

$$S_0(k, \theta) = S_{(m-1)}(k, \theta) \Big|_{(m-1)=0}. \quad (18)$$

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, запишем  $S_{(m-1)}(k, \theta)$  и  $S_{(m-1)}^*(k, \theta)$  в следующем виде:

$$S_{(m-1)}(k, \theta) = |S_{(m-1)}(k, \theta)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}) + j \sin(\phi_{(m-1)})]; \quad (19)$$

$$S_{(m-1)}^*(k, \theta) = |S_{(m-1)}^*(k, \theta)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^*) + j \sin(\phi_{(m-1)}^*)];$$

$$\text{где } \cos(\phi_{(m-1)}) = \frac{\text{Re}[S_{(m-1)}(k, \theta)]}{|S_{(m-1)}(k, \theta)|};$$

$$\sin(\phi_{(m-1)}) = \frac{\text{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)]}{|S_{(m-1)}(k, \theta)|};$$

$$\begin{aligned} \cos(\phi_{(m-1)}^*) &= \\ &= \frac{\text{Re}\{[S_{(m-1)}(k) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]\}}{|S_{(m-1)}^*(k, \theta)|} \\ &= \frac{\{\text{Re}[S_{(m-1)}(k)] - \text{Re}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1)] + x(m-1+N)\}}{|S_{(m-1)}^*(k, \theta)|}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\phi_{(m-1)}^*) &= \\ \text{Im}\{[S_{(m-1)}(k) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]\} &= \\ |S_{(m-1)}^*(k, \theta)| & \\ &= \frac{\{\text{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)] + \text{Im}[\exp(2\pi\theta)x(m-1)]\}}{|S_{(m-1)}^*(k)|}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{(m-1)}^*(k, \theta)| &= \\ &= \sqrt{\{\text{Re}[S_{(m-1)}(k, \theta)] - \text{Re}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1)] + \\ &+ x(m-1+N)\}^2 + \{\text{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)] + \\ &+ \text{Im}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1)]\}^2} \end{aligned}$$

Учитывая, что:

$$\begin{aligned} |W_N^{-(k+\theta)}| &= \cos^2[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)] + \sin^2[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)] = 1; \\ W_N^{-k} &= 1 \cdot [\cos(\beta_k) + j \sin(\beta_k)]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2\pi}{N}(k + \theta); \quad |(a + jb) \cdot (c + jd)| = \\ &= |(a + jb)| \cdot |(c + jd)|; \\ S_m(k, \theta) &= |S_m(k, \theta)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k)]; \\ |S_{(m-1)}^*(k, \theta)| &= |S_m(k, \theta)|, \end{aligned}$$

представим разностное уравнение (17) в следующей форме:

$$\begin{aligned} S_m(k, \theta) &= W_N^{-(k+\theta)} S_{(m-1)}^*(k, \theta) = \\ &= |S_{(m-1)}^*(k, \theta)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k)] = \\ &= |S_m(k, \theta)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k)]; \end{aligned} \quad (21)$$

Из соотношения (21) непосредственно следует, что значение скользящего параметрического энергетического фурье-спектра на  $(k + \theta)$  -й частоте на  $m$  шаге равно:

$$G_m(k, \theta) = N \cdot |S_{(m-1)}^*(k, \theta)|^2 = N \cdot |S_m(k, \theta)|^2 \quad (22)$$

Как следует из понятия инвариантности, скользящий параметрический энергетический фурье-спектр сигнала  $x(n)$  на  $(k + \theta)$  -й частоте будет инвариантен к временному сдвигу сигнала тогда, когда при любом целом  $m \geq 1$ :

$$G_m(k, \theta) = G_0(k, \theta) = N \cdot |S_0(k, \theta)|^2. \quad (23)$$

Учитывая соотношение (17), представим выражение (22) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} G_m(k, \theta) &= N \cdot |S_m(k, \theta)|^2 = N \cdot | [S_{(m-1)}(k, \theta) - \\ &- \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)] |^2, \end{aligned} \quad (25)$$

и введем переменную:

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= [ -\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N) ], \\ m &= \overline{1, 2, 3, \dots} \end{aligned} \quad (26)$$

Представляется очевидным, что инвариантность текущего энергетического параметрического фурье-спектра сигнала  $x(n)$  на  $(k + \theta)$  -й частоте будет иметь место при выполнении равенства:

$$\begin{aligned} |S_m(k, \theta)| &= \\ | [S_{(m-1)}(k, \theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)] | & \end{aligned}$$

Несложно установить, что это возможно в двух частных случаях:

1. Для периодической входной последовательности  $x(n)$  при  $\theta = 0$ :  $x(n \pm N) = x(n)$ ;  $n = \overline{0, N-1}$ .

2. Для параметрической  $N$  -периодической последовательности  $x_\theta(n)$  при  $0 < \theta < 1$ :

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}.$$

В общем же случае скользящий параметрический энергетический фурье-спектр сигнала  $x(n)$  не инвари-

антен к временному сдвигу сигнала. Данный эффект цифровой спектральной обработки автор назвал «эффектом неинвариантности».

На рис. 5 приведена графическая интерпретация полученных результатов.

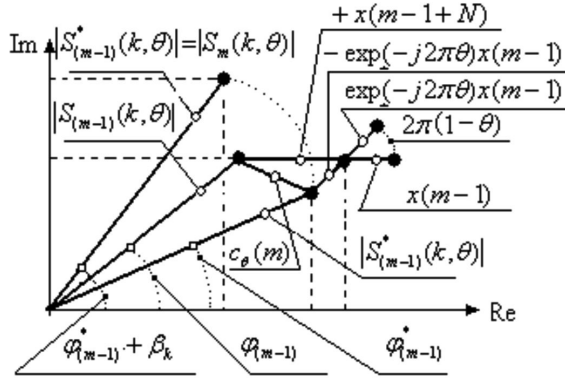


Рис. 5. Рекуррентное измерение  $m$ -го значения текущего энергетического параметрического фурье-спектра действительного сигнала на  $(k + \theta)$ -й частоте

Оценим количественные показатели, характеризующие неинвариантность скользящего параметрического энергетического фурье-спектра к сдвигу действительного дискретного тонального сигнала.

### Инвариантность скользящего параметрического энергетического фурье-спектра дискретного тонального сигнала

Рассмотрим измерение скользящего параметрического энергетического фурье-спектра во временном окне в  $N$  отсчетов для действительного тонального компоненты вида:

$$x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)n \right],$$

где  $0 \leq \delta < 1$ . (27)

Функция  $c_\theta(m)$  (26) в этом случае описывается следующим соотношением:

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= [ -\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N) ] = \\ &= -\cos(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \right\} + \\ &+ j \sin(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \right\} \\ &+ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1+N) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

В силу периодичности функции  $\cos \alpha$  третий член суммы (29) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1+N) \right] &= \\ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) + 2\pi\delta \right] &= \\ = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \cos(2\pi\delta) + \\ \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \sin(2\pi\delta). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив (30) в (29) окончательно получим:

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \cdot [ -\cos(2\pi\theta) + \cos 2\pi\delta ] + \\ &\sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \sin(2\pi\delta) + \\ &+ j \sin(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)(m-1) \right] \right\} \end{aligned}$$

Если параметр  $\theta$  ДПФ-П равен параметру  $\delta$  сигнала (27), то получим :

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= \left\{ \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \theta)(m-1) \right] + \right. \\ &\left. j \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \theta)(m-1) \right] \right\} \cdot \sin(2\pi\theta) \end{aligned} \quad (31)$$

На рис.6 а, б показано изменение реальной и мнимой частей функции  $c_\theta(m)$  в координатах сдвиг  $m$  и параметр  $\theta$  (на рис.6 параметр  $\theta$  обозначен через  $q$ ) при определенных значениях частоты  $k$  и длительности сигнала  $N$ .

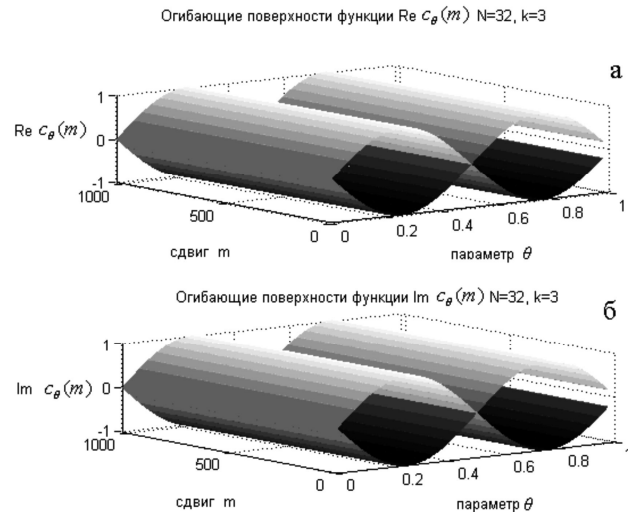


Рис. 6. Изменение реальной : (а) и мнимой: (б) частей функции  $c_\theta(m)$  в координатах сдвиг  $m$  и параметр  $\theta$  при значении частоты  $k = 3$  и длительности сигнала  $N = 16$ .

Как мы видим, максимумы амплитуд функций  $\text{Re}[c_\theta(m)]$  и  $\text{Im}[c_\theta(m)]$  равны единице и соответствуют значениям  $\theta = 1/4$  и  $\theta = 3/4$ . Можно показать, что они (максимумы) не зависят от  $N$  и  $k$ , а средние значения функций  $\text{Re}[c_\theta(m)]$  и  $\text{Im}[c_\theta(m)]$  при фиксированном  $\theta$  равны нулю.

На рис. 7 приведено изменение дисперсий функций  $\text{Re}[c_\theta(m)]$  : а) и  $\text{Im}[c_\theta(m)]$  : б) в зависимости от  $\theta$ .

Измерения текущего энергетического фурье-спектра проведем для модельных действительных  $y_1(n)$  сигналов вида:

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)n \right]; \quad y_1(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k_1 + \delta_1)n \right]; \\ y_2(n) &= \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k_2 + \delta_2)n \right]. \end{aligned}$$

где  $k = 4$ ,  $k_1 = 7$ ;  $k_2 = 13$ ;  $\theta = \delta = 0$ ,  $\theta_1 = \delta_1 = 1/2$ ,  $\theta_2 = \delta_2 = 3/4$ .

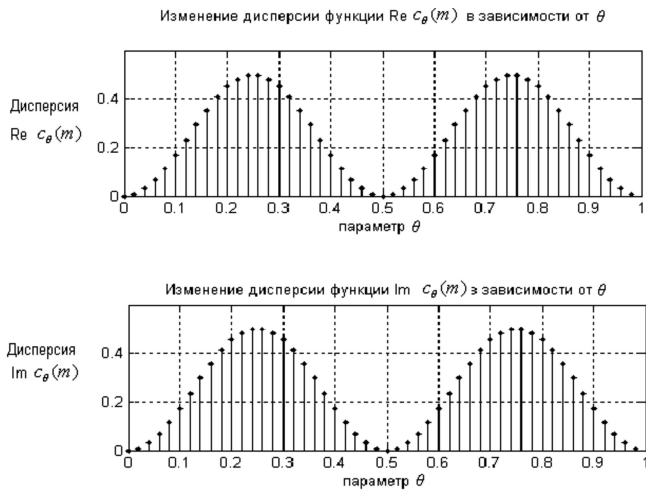


Рис. 7. Изменение дисперсий функций  $\text{Re}[c_\theta(m)]$  и  $\text{Im}[c_\theta(m)]$  в зависимости от параметра  $\theta$

На рис. 8 приведены результаты измерения текущих энергетических фурье-спектров действительных сигналов  $y(n) \Rightarrow a$ ;  $y_1(n) \Rightarrow b$ ;  $y_2(n) \Rightarrow v$ .

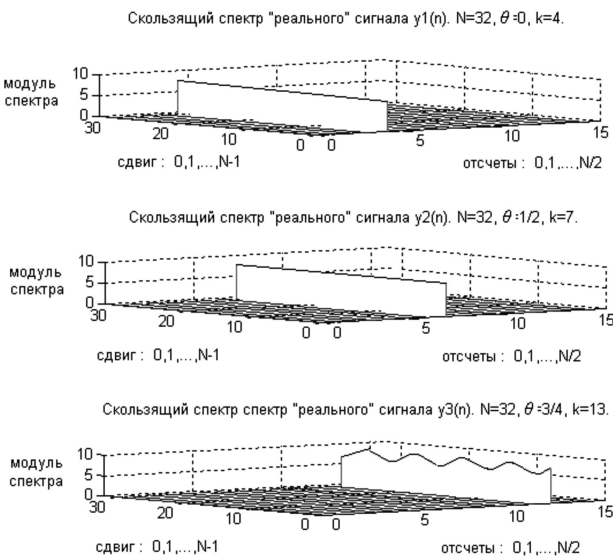


Рис. 8. Модули спектров гармонических

$$\text{компонент } x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + \delta)n \right];$$

$$a \Rightarrow k = 4, \theta = \delta = 0; b \Rightarrow k = 7; \theta = \delta = 1/2;$$

$$v \Rightarrow k = 13; \theta = \delta = 3/4$$

Как известно, стандартный текущий энергетический фурье-спектр сигнала (27) при  $\delta = 0$  инвариантен к его временному сдвигу, что и иллюстрирует рис. 8 а. При этом так называемый «эффект размывания спектральных составляющих» (часто называемый «эффектом утечки») в этом случае не проявляется. Напомним причину появления данного эффекта. При выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку спектра исследуемой функции с функцией вида  $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$ , которая не локализована, а размыта по частоте (отсюда и название эффек-

та). Отсутствие проявления «эффекта утечки» объясняется тем, что коэффициенты ДПФ «падают» в нули функции  $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$ .

Рис. 8 б иллюстрирует появление при  $\theta = \delta = 1/2$  нового явления, которое не наблюдается в системе ДЭФ, а именно, проявление эффекта инвариантности параметрического текущего энергетического фурье-спектра сигнала. При этом, если  $0 \leq (\theta = \delta) < 1$ , то «эффект размывания спектральных составляющих» не наблюдается. Отсутствие проявления данного эффекта объясняется тем, что коэффициенты ДПФ-П «падают» в нули z-преобразования гармонической компоненты (27). «Эффект неинвариантности» (предлагаемый английский термин «non-invariance»), напротив, проявляется тогда, когда  $(\theta = \delta) \neq 0, 1/2$ .

**Заключение**

В настоящее время, благодаря целому ряду преимуществ ЦОС (гарантированная точность, идеальная воспроизводимость результатов, высокая производительность и экономичность), цифровой спектральный фурье-анализ получил самое широкое распространение в различных областях науки и техники. Исходя из приложений спектрального фурье-анализа, проводятся интенсивные научные исследования по поиску и применению новых базисных систем, обеспечивающих наиболее эффективное решение конкретного круга практических задач. Так в работах [6-25] на основе обобщения базисной системе ДЭФ введено и исследовано ДПФ-П, которое наиболее адекватно спектральному представлению сигналов со скрытыми периодичностями.

Результаты проведенных в данной работе исследований взаимосвязи ДПФ-П и ДВПФ сигнала, заданного на конечном интервале с ДПФ сигнала, подвергнутого операции дополнения нулями, эффекта неинвариантности скользящего параметрического энергетического фурье-спектра действительного сигнала, выявленного автором работы, позволяют:

- повысить эффективность применения цифрового спектрального анализа при решении задач по обнаружению и выявлению скрытых периодичностей (тональных компонент) в таких предметных областях как радиолокация, виброакустическая диагностика, пассивная гидролокация, биомедицина и т.д.
- разработать в дальнейшем методологию определения погрешностей спектральных измерений тональных сигналов на конечных интервалах, учитывающую данный эффект.

**Литература**

1. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. – М.:Наука, 1965, – 244 с.
2. Опленгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. Пер.с англ. М.: Мир, 1980. 552 с.
3. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007.-656 с.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.



5. Petrovsky, Alexey. Hybrid signal decomposition based on instantaneous harmonic parameters and perceptually motivated wavelet packets for scalable audio coding / Alexey Petrovsky, Elias Azarov, Alexander Petrovsky // *Elsiver, Signal Processing, Special issue «Fourier Related Transform for Non-Stationary Signals»*- Vol. 91/Issue 6/June 2011.- P/ 1489-1504.

6. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // *Цифровая обработка сигналов*. 2010. № 2. С. 7-12.

7. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2010. №2 (16). С. 36-41.

8. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // *Цифровая обработка сигналов*.-2011. № 1. С. 2-6.

9. Пономарева О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей// *Цифровая обработка сигналов*. 2012. № 2. С. 2-5.

10. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // *Цифровая обработка сигналов*. 2012. № 4. С.2-7.

11. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // *Радиотехника и электроника*. АН СССР. 1984. Т.29, №8. С. 1561-1570.

12. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. Generalization of discrete Fourier transform for interpolation in time domain. // *Electronic and Electrical Engineering*. 1984 no 3, pp/ 27-30.

13. Пономарев В.А., Пономарева О.В.Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области// *Известия Вузов СССР, Радиотехника*. 1983.Том XXVI, № 9.-С. 67-68.

14. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей// *Цифровая обработка сигналов*. 2013. № 2. С. 10-15.

15. Алексеев В.А., Пономарев В.А., Пономарева О.В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2010. №2 (16). С. 91-99.

16. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев В.А. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // *Вестник ИжГТУ*. 2013. №2.С. 130-133.

17. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми

периодичностями // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2012. №2 (16). С. 122-129.

18. Пономарева О.В., Пономарев В.А., Пономарев В.А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2013. №1. С. 41-46.

19. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // *Станки и инструмент*. 1983. №9. С. 18-21.

20. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // *Приборы и методы измерений*. – 2013.-№2 (7). – С.114-119.

21. Пономарева О.В., Пономарев В.А. Измерение текущего энергетического фурье – спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах// *Интеллектуальные системы в производстве*. 2013.- №2 (22).– С. 149-157.

22. Пономарева О.В., Пономарев В.А., Пономарев В.А. Иерархическая морфологическая – информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов// *Датчики и системы*. 2014. №1(176). – С. 2-8.

23. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев В.А., Пономарева Н.В. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // *Цифровая обработка сигналов*. 2014. – № 1. – С. 3-11.

24. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Пономарев В.А. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье// *Автоматика*. 2014. Т.50.-№2.-С.31-38.

25. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах// *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. 2014.-№1. С.15-22.

## **THE INVARIANCE OF CURRENT PARAMETRIC ENERGY FOURIER SPECTRUMS OF DISCRETE REAL SIGNALS ON FINITE INTERVALS**

*Ponomareva O.V.*

Methods and algorithms of sliding spectral measurements on finite intervals were investigated. The theoretical principles of measurement of sliding energy Fourier spectra of discrete signals in the bases of discrete exponential functions and parametric discrete exponential functions were suggested. The theoretical and practical results of the evaluation of non-invariance of sliding energy Fourier spectra of tonal components on finite intervals in the basis of parametric discrete exponential functions were shown.