

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЁРТКИ

Егоров В.В., к.т.н., в.н.с. ОАО «Российский институт мощного радиостроения»;

Маслаков М.Л., инженер ОАО «Российский институт мощного радиостроения», e-mail:maslakovml@gmail.com

Ключевые слова: интегральные уравнения, свёртка, некорректная задача, импульсная характеристика, канал связи, коррекция, преобразование Фурье, преобразование Хартли.

Введение

Уравнения типа свёртки используются при формализации теоретических и прикладных задач. Это разнообразнейшие задачи математической физики и всевозможные задачи современной техники, такие как задачи определения интересующих количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений. В ряде технических и физических приложений часто рассматривают задачу передачи некоторого сигнала $S(t)$ через систему, задаваемую импульсной характеристикой (ИХ) $h(t)$, на выходе которой получают сигнал $U(t)$, определяемый выражением

$$S(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-\tau) h(\tau) d\tau = U(t), t \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

На практике сигналы являются конечными, при этом известны передаваемый и принимаемый сигналы $S(t)$ и $U(t)$ соответственно, а ИХ некоторой системы (канала связи) неизвестна. Целью задачи является определение ИХ канала связи, то есть решение уравнения вида

$$\int_{T_1}^{T_2} S(t-\tau) h(\tau) d\tau = U(t), T_3 < t < T_4. \quad (2)$$

Приведённое уравнение (2) относится к линейному интегральному уравнению типа свертки первого рода [1] или уравнению Фредгольма первого рода [2], в котором одна из подынтегральных функций, в данном случае $h(t)$, является неизвестной. Промежуток интегрирования $[T_1; T_2]$ на практике является конечным, поскольку тестовый или зондирующий сигнал всегда имеет конечную длительность. Отрезок $[T_3; T_4]$ – конечный, поскольку вычисленная ИХ сохраняет свою ценность в течении конечного времени. Функция $S(t)$, называемая ядром уравнения [1-3], является непрерывной и гладкой в замкнутой области $\{T_1 \leq \tau \leq T_2; T_3 \leq t \leq T_4\}$.

Известны различные методы решения уравнения (2), как во временной, так и в частотной области. Одними из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений типа свёртки являются методы, основанные на переходе в частотную область [2, 3], для чего предполагается применение дискретного преоб-

Рассматривается использование дискретного преобразования Хартли (ДПХ) для решения интегральных уравнений типа свёртки. Показано преимущество ДПХ по сравнению с ДПФ. Предлагается применение ДПХ в задачах адаптивной коррекции сигналов для расчёта импульсной характеристики канала связи. Приведены результаты моделирования и оценки вычислительной эффективности алгоритмов.

звания Фурье (ДПФ), так как существуют разнообразные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако при использовании преобразования Фурье приходится иметь дело с комплексными числами, что несколько усложняет проводимые вычисления. В свою очередь известно преобразование Хартли [4], которое является аналогом преобразования Фурье с тем отличием, что позволяет обойтись без комплексного представления. Несмотря на данное обстоятельство, преобразование Хартли редко используется на практике.

Решение интегрального уравнения

Рассмотрим методы численного решения интегрального уравнения (2) в частотной области. Запишем приведённое уравнение в дискретном виде

$$\sum_{l=0}^n s(n-l) \cdot h(l) = u(n), n = 0 \dots N-1. \quad (3)$$

при этом функции, входящие в это уравнение, имеют вид:

$$s(n) = \begin{cases} s_d(n), n = 0 \dots N_s - 1, \\ 0, n = N_s \dots N - 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), n = 0 \dots N_h - 1, \\ 0, n = N_h \dots N - 1, \end{cases}$$

$$u(n) = \begin{cases} u_d(n), n = 0 \dots N_u - 1, \\ 0, n = N_u \dots N - 1. \end{cases}$$

причем $N_s, N_h \leq N/2, N_u = N_s + N_h - 1$. Вектора s_d, h_d, u_d есть дискретные отсчеты соответствующих сигналов $S(t), h(t), U(t)$, входящих в уравнение (2). Дополнение нулями до $(N-1)$ -го элемента делает линейную свертку эквивалентной циклической, что в дальнейшем позволяет осуществить переход в частотную область.

Для точной правой части $u = u_T$ уравнение (3) имеет единственное решение h_T . Однако на практике вместо u_T доступным для измерения является $u_\xi = u_T + \xi$, где добавка ξ представляет собой шум. Тогда, вместо

уравнения (3) требуется решить следующее уравнение

$$\sum_{l=0}^n s(n-l) \cdot h(l) = u_{\xi}(n), \quad n = 0 \dots N-1. \quad (5)$$

В этом случае ищут приближённое решение уравнения (5). Однако в силу случайности отсчетов шумового вектора ξ уклонение решения в метрике C может быть сколь угодно большим. Это означает, что в качестве решения уравнения (5) нельзя брать точное решение этого уравнения, так как оно становится неустойчивым к малым уклонениям правой части. Такая задача называется некорректно поставленной [3]. Одним из известных методов решения некорректных задач является *метод регуляризации* [1-3], позволяющий определять импульсную характеристику канала с малыми вычислительными затратами и компенсировать влияние помех. К таковым относятся метод регуляризации Тихонова [2, 3] и метод регуляризации Лаврентьева [2]. В результате в качестве приближённого решения уравнения (5) берут регуляризованное решение.

Для примера кратко рассмотрим метод Тихонова построения приближённых решений для линейных интегральных уравнений первого рода. Для начала приведем выражения для прямого и обратного ДПФ вектора отсчетов S , записав их с помощью принятых обозначений:

$$FS = \Phi[s], \quad (6)$$

$$s = \Phi^{-1}[FS],$$

где Φ , Φ^{-1} – матрицы прямого и обратного преобразования Фурье, причём:

$$\Phi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \exp\left(-i \frac{nk}{N}\right),$$

$$\Phi^{-1}_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \exp\left(i \frac{nk}{N}\right), \quad (7)$$

$$n, k = 0 \dots N-1.$$

Применив преобразование Фурье к уравнению (5), получим:

$$diag(FS) \cdot FH = FU_{\xi}, \quad (8)$$

где FS , FH , FU_{ξ} – соответствующие спектры, $diag(FS)$ – диагональная матрица с элементами FS .

Решением уравнения (5) в частотной области является обратное преобразование Фурье от вектора отсчетов:

$$FH = (diag(FS))^{-1} \cdot FU_{\xi} =$$

$$= (diag(FS))^{-1} \cdot (FU_T + FV), \quad (9)$$

где FV – спектр шумовой составляющей ξ .

Однако решение во временной области (5) может не существовать, так как вектор $(diag(FS))^{-1}$ может не иметь обратного преобразования Фурье за счёт влияния высоких частот случайной составляющей вектора отсчетов FV , либо уклонение вектора $\Phi^{-1}[(diag(FS))^{-1} \cdot FV]$ от нуля в метрике C или в L_2 может быть сколь угодно большим. Таким образом, решение уравнения (5) в виде (9) с последующим обратным преобразованием Фурье не обладает свойством устойчивости к малым отклонениям правой части.

Для того чтобы обеспечить свойство устойчивости, вектор отсчетов (9) поэлементно умножают на диагональную матрицу G_{α} , состоящую из элементов $g(k, \alpha)$, $k = 0 \dots N-1$, удовлетворяющих условиям, описанным в [3]. Функцию $g(k, \alpha)$ называют стабилизирующей функцией или стабилизатором. В результате получаем регуляризованное решение уравнения (5) в спектральной области

$$FH_{\alpha} = (diag(FS))^{-1} \cdot (G_{\alpha} \cdot FU_{\xi}). \quad (10)$$

Тогда вектор решения во временной области задается выражением

$$h_{\alpha, \Phi} = \Phi^{-1}[FH_{\alpha}]. \quad (11)$$

Численное решение с использованием преобразования Хартли

Как было сказано выше, преобразование Хартли является аналогом преобразования Фурье, а значит, его так же можно применять при решении интегральных уравнений методом регуляризации. Возможность использования преобразования Хартли для решения системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводится интегральное уравнение типа свертки, показано в [5], но там не рассматривались особенности применения методов регуляризации решения, что не позволяет напрямую использовать полученные результаты. Для начала рассмотрим особенности применения преобразования Хартли, для чего запишем выражения для дискретного преобразования Хартли:

$$HS = \mathcal{H}[s], \quad (12)$$

$$s = \mathcal{H}[HS],$$

где \mathcal{H} – матричный оператор преобразования Хартли, задаваемый коэффициентами

$$\mathcal{H}_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left(\cos\left(\frac{nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{nk}{N}\right) \right), \quad (13)$$

$$n, k = 0 \dots N-1$$

Заметим, что обратное преобразование Хартли требует точно такой же процедуры вычисления, как и прямое преобразование, в отличие от преобразования Фурье (6).

Взаимосвязь спектров Фурье и Хартли базируется на свойстве симметрии [4]. Приведем формулы связи преобразований Фурье и Хартли без вывода:

$$Re(FS) = (HS + HS(-)) / 2,$$

$$Im(FS) = -(HS - HS(-)) / 2, \quad (14)$$

$$HS = Re(FS) - Im(FS),$$

где $HS(-)$ – зеркальное отображение вектора HS , то есть $HS(-k) = HS(N-k)$.

Подобно тому, как операция свертки определена в базисе Фурье, её можно записать и в базисе Хартли [4]. Запишем уравнение (5) с использованием преобразования Хартли

$$\frac{1}{2} A \cdot HS = HU_{\xi},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 2A_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & A_{1,N-1} \\ 0 & 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_{N-2,2} & \dots & A_{N-2,N-2} & 0 \\ 0 & A_{N-1,1} & 0 & \dots & 0 & A_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$A_{k,k} = HH + HH(-),$$

$$A_{N-k,k} = HH - HH(-).$$

В вычислительном плане выражение (15) для операции свёртки в базисе Хартли не является более сложным по сравнению с (8), так как умножение спектров Фурье предполагает умножение комплексных чисел.

Искомой функцией уравнения (15) является спектр Хартли вектора отсчетов ИХ канала HH . Запишем выражение для нахождения этого вектора

$$HH = (\text{diag}(C))^{-1} \cdot (B \cdot HS),$$

где

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1} & 0 & \dots & 0 & B_{1,N-1} \\ 0 & 0 & B_{2,2} & \dots & B_{2,N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & B_{N-2,2} & \dots & B_{N-2,N-2} & 0 \\ 0 & B_{N-1,1} & 0 & \dots & 0 & B_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$B_{k,k} = HU_{\xi} - HU_{\xi}(-),$$

$$B_{N-k,k} = HU_{\xi} + HU_{\xi}(-).$$

$$C = \text{diag}(HS) \cdot HS + \text{diag}(HS(-)) \cdot HS(-).$$

Очевидно, что при вычислении обратного преобразования Хартли вектора полученного из выражения (16) возникнут те же проблемы с отсутствием свойства устойчивости получаемого решения к малым отклонениям, как и в случае использования преобразования Фурье, так как в функции HU_{ξ} присутствует случайная составляющая. Для достижения устойчивости, как описывалось ранее, введём стабилизирующий функционал G_{α} . В результате получим регуляризованное решение исходного уравнения (5) в базисе Хартли в виде

$$HH_{\alpha} = (\text{diag}(C))^{-1} \cdot (\text{diag}(G_{\alpha}) \cdot B \cdot HS), \quad (17)$$

и окончательно искомый вектор отсчетов во временной области определяется выражением

$$h_{\alpha, \mathcal{H}} = \mathcal{H}[HH_{\alpha}]. \quad (18)$$

Анализ получаемых решений

Ввиду определённых различий между ДПФ и ДПХ, могут возникнуть существенные отличия в получаемых решениях при наличии шумовой составляющей, обозначенной ранее как ξ . Проведём вычислительный эксперимент и рассмотрим задачу расчёта ИХ многолучевого канала в зависимости от мощности шума принимаемого сигнала. В качестве теста выберем фазоманипулированный сигнал на основе ПСП длины 15; в качестве функции стабилизации – функцию, предложенную в [3], и запишем её в базисе Фурье

$$G_{\alpha} = \left(\text{diag}(\text{diag}(FS) \cdot FS^* + \alpha M) \right)^{-1} \times \left(\text{diag}(FS) \cdot FS^* \right) \quad (19)$$

и базисе Хартли

$$G_{\alpha} = (\text{diag}(C + \alpha M))^{-1} \cdot C. \quad (20)$$

Функция M – чётная, неотрицательная и непрерывная на любом конечном отрезке. В качестве такой функции можно взять, например:

$$M(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ k^p, & k = 1 \dots \frac{N}{2} \\ (N-k)^p, & k = \frac{N}{2} + 1 \dots N-1, \quad p = 0, 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (21)$$

при чём, при $p = 0$, $M(k) = \text{const}$, $k = 0 \dots N-1$. При этом степень влияния этой функции регулируется параметром регуляризации α .

Уклонение получаемого численного решения будем оценивать в метрике C [3]:

$$\rho C(h_{\alpha}, \bar{h}) = \max_{n \in [0, N-1]} |h_{\alpha}(n) - \bar{h}(n)|, \quad (22)$$

где h_{α} – регуляризованное решение или вектор рассчитанной ИХ канала связи в базисе Фурье или Хартли (соответственно $h_{\alpha, \mathcal{F}}$ или $h_{\alpha, \mathcal{H}}$), \bar{h} – вектор заданной ИХ канала.

Ниже приведены графики зависимости усредненного по 1000 экспериментов уклонения решения в метрике C от дисперсии шума $\sigma_{\text{ш}}$ при $p = 0$ – рис. 1 и при $p = 1$ – рис. 2.

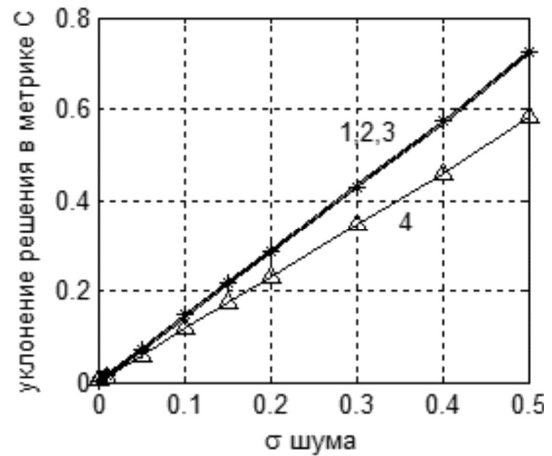


Рис. 1. Зависимость уклонения решения от $\sigma_{\text{ш}}$ ($p = 0$):

1 – решение в базисе Хартли ($\alpha = 0$);

2 – решение в базисе Фурье ($\alpha = 0$);

3 – решение в базисе Фурье ($\alpha = 10^{-3}$);

4 – решение в базисе Хартли ($\alpha = 10^{-3}$)

При отсутствии стабилизирующей функции, то есть для случая $\alpha = 0$, решения, полученные с использованием ДПФ и ДПХ, совпали. При значении $\alpha = 10^{-3}$ отклонение решения, полученное с использованием ДПХ, меньше. Очевидно, что в обоих случаях можно найти некоторое $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$, причём это значение будет зависеть и

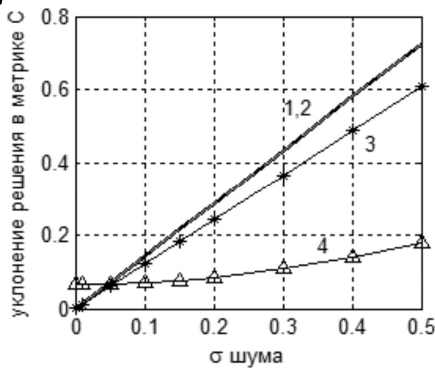


Рис. 2. Зависимость уклонения решения от σ_{III} ($p = 1$):

- 1 – решение в базисе Хартли ($\alpha = 0$);
- 2 – решение в базисе Фурье ($\alpha = 0$);
- 3 – решение в базисе Фурье ($\alpha = 10^{-3}$);
- 4 – решение в базисе Хартли ($\alpha = 10^{-3}$)

от величины уклонения правой части функции $U_{\xi}(n)$. Иначе говоря, уклонения решения h_{α} зависит от мощности шума или от дисперсии шума σ_{III} . На рис. 3 показана зависимость усредненного по 1000 экспериментов уклонения решения в метрике C от параметра α при $p = 1$ и $\sigma_{III} = 0,2$.

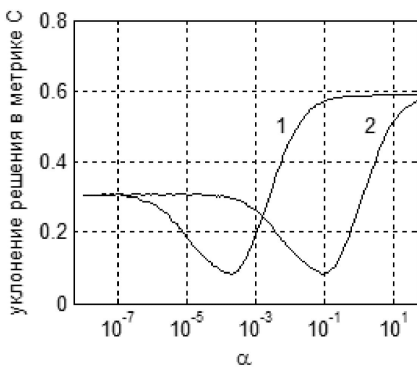


Рис. 3. Зависимость уклонения решения от α

- 1 – решение в базисе Хартли;
- 2 – решение в базисе Фурье

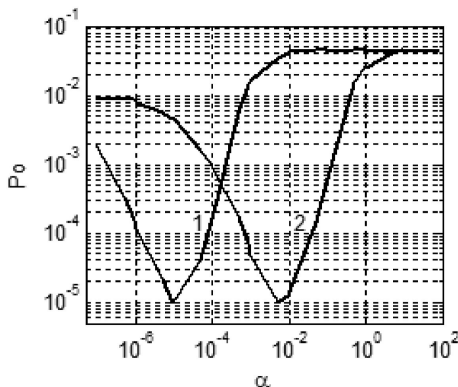


Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки на бит от α при $\sigma_{III} = 0,2$:

- 1 – коррекция в базисе Хартли;
- 2 – коррекция в базисе Фурье

Однако на практике наиболее важным показателем качества результата коррекции является вероятность ошибки. Рассмотрим систему передачи данных с адап-

тивной коррекцией сигналов, описанную в [6]. Процедура коррекции, так же как и расчёт ИХ канала, осуществляется в частотной области. В [6] для этого использовано преобразование Фурье. На рис. 4, 5 показаны зависимости вероятности ошибки на бит P_0 в двухлучевом канале связи от параметра регуляризации α , при $\sigma_{III} = 0,2$, что соответствует отношению сигнал/шум (ОСШ) 17 дБ, и $\sigma_{III} = 0,5$ – ОСШ 9,5 дБ. Частота следования символов – 1600 симв/с.

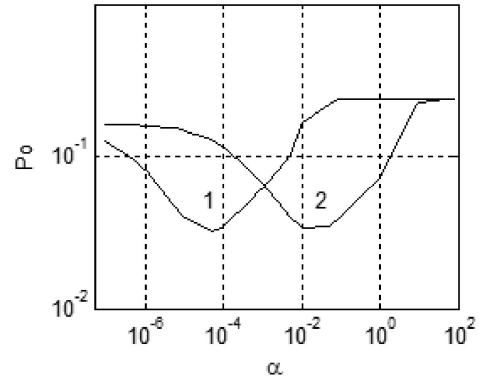


Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки на бит от α при $\sigma_{III} = 0,5$:

- 1 – коррекция в базисе Хартли;
- 2 – коррекция в базисе Фурье

Приведенное моделирование свидетельствует о полной эквивалентности результатов полученных с помощью ДПХ и ДПФ, что неудивительно в виду четкой связи между этими преобразованиями. Между тем число операций умножения и сложения, необходимых для решения интегрального уравнения в частотной области с использованием ДПФ и ДПХ, различно.

Оценка вычислительных затрат

Для начала приведём сравнительные оценки эффективности алгоритмов БПФ и БПХ. Известно, что для вычисления ДПФ последовательности из N элементов, требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Однако число операций для алгоритма БПФ часто [4] оценивается как $N \log_2 N$ операций с комплексными числами. Аналогично, для вычисления ДПХ требуется выполнить N^2 операций с вещественными числами или $N \log_2 N$ операций для алгоритма БПХ [4]. Однако это является лишь приблизительной оценкой, так как существует множество разнообразных алгоритмов БПФ и БПХ. В данной статье ограничимся оценками числа операций для алгоритмов с $N = 2^p$, являющихся наиболее часто используемыми на практике.

Так, в хорошо известном алгоритме БПФ с прореживанием по времени [7] вычисление N -точечного ДПФ приводит к $p = \log_2 N$ шагам, на каждом из которых требуется N сложений и $N/2$ умножений. Так как комплексное умножение реализуется четырьмя вещественными умножениями и двумя сложениями, а комплексное сложение – двумя вещественными, то общее число вещественных умножений M и сложений A составляет:

$$\begin{cases} M = 2N \log_2 N, \\ A = 4N \log_2 N. \end{cases} \quad (23)$$

Однако если учесть, что умножения на $\pm 1 \pm j$ тривиальны, получаем [8]:

$$\begin{cases} M = \left(\frac{3N}{2}\right)(\log_2 N - 3) + 6, \\ A = \left(\frac{N}{2}\right)(7 \log_2 N - 9) + 6. \end{cases} \quad (24)$$

Для ДПХ существуют подобные алгоритмы с прореживанием по времени или по частоте, вычислительная эффективность которых одинакова и определяется следующими выражениями [8]:

$$\begin{cases} M = N(\log_2 N - 3) + 4, \\ A = \left(\frac{N}{2}\right)(\log_2 N - 1) + 2. \end{cases} \quad (25)$$

Вычислительные затраты, необходимые для решения уравнения (3) в базе Фурье, согласно формуле (10), составляют:

$$M = 8N, \quad A = 4N. \quad (26)$$

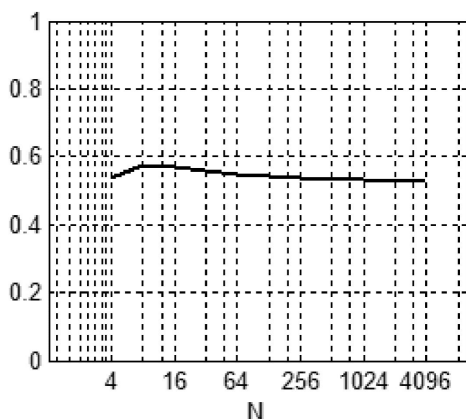


Рис. 6. Общее число операций в базе Хартли относительно числа операций в базе Фурье

В свою очередь число операций в базе Хартли, согласно формуле (17), составит

$$M = 7N, \quad A = 5N. \quad (27)$$

Однако, если учесть особенности спектров Фурье и Хартли для отсчетов с индексами «0» и « $N/2$ », а также упростить выражение (17), число операций в базе Фурье составит

$$\begin{cases} M = 8(N - 2) + 6 = 8N - 10, \\ A = 4(N - 2) + 2 = 4N - 6; \end{cases} \quad (28)$$

в базе Хартли

$$\begin{cases} M = 5(N - 2) + 6 = 5N - 4, \\ A = 5(N - 2) + 2 = 5N - 8. \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом, общее число вычислений в базе Фурье складывается из двух операций БПФ, одного обратного БПФ и решения уравнения, определяемое формулами (24) и (28). Аналогично, число операций в базе Хартли – три БПХ и решение уравнения, определяется формулами (25) и (29). На рис. 6 показан выигрыш общего числа операций в базе Хартли относительно суммарного числа операций в базе Фурье в зависимости от размерности последовательностей N .

Заключение

Описанный метод удобно применять в задачах коррекции при нахождении неизвестной ИХ канала связи, так как переход в частотную область позволяет значительно уменьшить вычислительные затраты. Численное решение интегральных уравнений с использованием ДПХ является более привлекательным, чем использование ДПФ, так как существуют алгоритмы БПХ, которые легко реализуются и требуют меньших вычислительных затрат (почти в 2 раза), чем БПФ, а все проводимые операции вещественны, то есть нет необходимости отдельно хранить реальную и мнимую части. При этом получаемые результаты ничуть не хуже результатов, полученных при решении с использованием преобразования Фурье.

Отметим также, что существует важная задача дополнительного исследования для построения класса стабилизирующих функций, как в базе Фурье, так и в базе Хартли. В данной статье эта задача не рассматривалась.

Литература

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач / Учебное пособие для вузов. – Изд. 3-е испр. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
4. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
5. Егоров В.В., Коломиец И.В. Решение систем линейных алгебраических уравнений с циркулянтной матрицей методом дискретного преобразования Хартли. Электронное моделирование, 1991, т.3, №6. С. 99-100.
6. Егоров В.В., Маслаков М.Л., Мингалёв А.Н. Высокоскоростные последовательные КВ радиомодемы. 13-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA 2011». – Москва, 2011. С. 183-186.
7. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
8. Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. – М.: Наука, 1990. – 180 с.

THE USE OF HARTLEY TRANSFORM TO SOLVE THE INTEGRAL EQUATION OF CONVOLUTION TYPE

Egorov V.V., Maslakov M.L.

The use of the discrete Hartley transform (DHT) for the solution of integral equations of convolution type is considered in this article. The advantage of DHT compared to the DFT is proved and illustrated. The calculation of the impulse response of the communication channel for adaptive signal correction is provided using DHT. The results of simulation and the computational efficiency evaluation of the algorithms are presented.