

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОСКОРОСТНОГО АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА С РАВНОМЕРНЫМ РАЗБИЕНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АЛГОРИТМА НАИМЕНЬШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Линович А.Ю., к.т.н., доцент, старший научный сотрудник Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: rsrtu@yandex.ru

Ключевые слова: многоскоростной адаптивный фильтр, оптимизация структуры, алгоритм наименьшего среднеквадратического отклонения, подсистема анализа-синтеза.

Введение

Многоскоростной адаптивный фильтр (МАФ) представляет собой многоканальную структуру, внутри которой в каждом из каналов выполняется адаптивная обработка отдельной узкой полосы, выделенной из спектра входного сигнала. Упрощённая схема МАФ приведена на рис. 1.

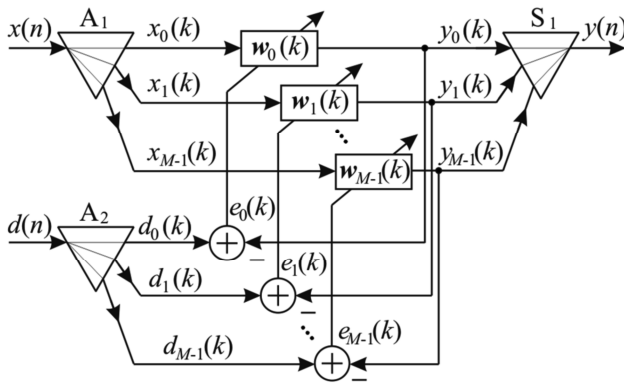


Рис. 1. Структурная схема МАФ

Здесь A_1 и A_2 – подсистемы анализа, расщепляющие входной сигнал $x(n)$ и обучающий сигнал $d(n)$ на M спектральных полос, которым соответствуют сигналы $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{M-1}(k)$ и $d_0(k), d_1(k), \dots, d_{M-1}(k)$. Равномерное разбиение по частоте предполагает равенство всех спектральных полос по ширине и равномерное распределение их центральных частот с шагом $f_{\text{кв}} / M$ по частоте, где $f_{\text{кв}}$ – частота дискретизации входного сигнала. S_1 – подсистема синтеза, выполняющая объединение выходных сигналов $y_0(k), y_1(k), \dots, y_{M-1}(k)$ отдельных адаптивных ядер $w_0(k), w_1(k), \dots, w_{M-1}(k)$ в результирующий выходной сигнал $y(n)$. Поскольку ширина каждой из образованных спектральных полос меньше ширины спектра входного и обучающего сигнала, в подсистемах анализа выполняется переход на более низкую частоту дискретизации, а в дальнейшем первоначальное значение частоты дискретизации восстанавливается в подсистеме синтеза. Для удобства различения дискретных сигналов, определённых на высокой и на пониженной частотах дискретизации, на рис. 1 при нумерации отсчётов используются разные индексы времени: n и k .

Для успешного функционирования МАФ подсистемы

Статья посвящена решению задачи оптимального проектирования многоканального адаптивного фильтра с равномерным разбиением по частоте, в котором для настройки адаптивных ядер используется алгоритм наименьшего среднеквадратического отклонения. Выводятся аналитические зависимости, позволяющие оценить наилучшие параметры настройки структуры: число каналов, коэффициент децимации и порядки цифровых не-рекурсивных фильтров. Приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие корректность полученных результатов.

A_1 и A_2 по своим свойствам должны быть строго одинаковыми, а подсистема S_1 должна быть надлежащим образом оптимизирована, чтобы соответствовать подсистемам A_1 и A_2 . Можно говорить, что подсистемы A_1, A_2 и S_1 образуют единую подсистему анализа-синтеза (ПАС). Более подробно принципы построения ПАС рассмотрены в [1]. Алгоритм расчёта подсистем анализа-синтеза с передискретизацией описан в [2, 3].

Следует заметить, что в настоящее время известно много вариантов организации МАФ [4, 5]. На рис. 1 рассмотрен лишь один из них, получивший наибольшую известность [6]. Характерными чертами рассматриваемой нами структуры МАФ являются: во-первых, независимость настройки адаптивных ядер в каждом из каналов, во-вторых, равномерность разбиения входного сигнала по частоте и, в-третьих, использование только не-рекурсивных цифровых фильтров.

Независимая настройка адаптивных ядер позволяет достичь наибольшей экономии по вычислительным затратам, что имеет решающее значение при реализации МАФ в реальном времени. Настройка каждого из адаптивных ядер выполняется на основе алгоритма наименьшего среднеквадратического отклонения (НСК¹) [7]. Этот алгоритм получил в настоящее время широкую известность, благодаря простоте математического описания и программной реализации, а также благодаря относительно невысоким требованиям к вычислительным затратам. Во многих научных работах алгоритм НСК служит ориентиром для сравнения при анализе эффективности других алгоритмов.

¹ В англоязычной литературе этот алгоритм получил наибольшую известность среди алгоритмов адаптивной фильтрации и носит название «Least-mean square (LMS) algorithm» [6, 8].

Равномерное разбиение по частоте, как уже упоминалось выше, подразумевает разделение входного сигнала подсистемой анализа на ряд спектральных полос равной ширины, размещённых с постоянным шагом по частоте (рис. 2). Равномерные ПАС строятся на основе набора комплексных цифровых фильтров, полученных умножением импульсной характеристики низкочастотного фильтра-прототипа на комплексные экспоненты соответствующих частот: $\exp(2\pi j(m+1/2)n/M)$, где j – мнимая единица, а m – порядковый номер канала МАФ. Низкочастотный фильтр-прототип имеет вещественные весовые коэффициенты, при этом амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) данного фильтра $|H_{НЧ}(e^{j\omega})|$ симметрична относительно оси ординат.

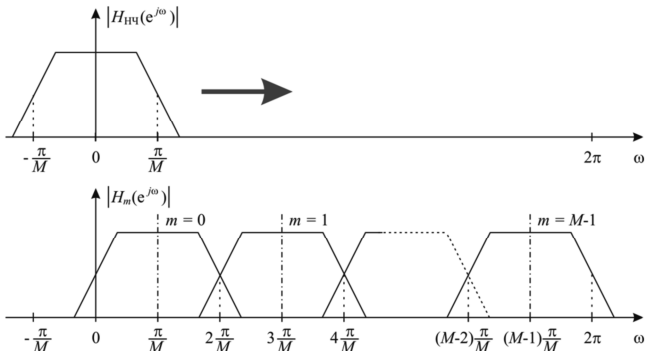


Рис. 2. АЧХ фильтров анализа при равномерном разбиении по частоте: все M фильтров анализа получены от одного и того же низкочастотного фильтра-прототипа

Нерекурсивные цифровые фильтры, называемые также фильтрами с конечной памятью или фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ), математически могут быть описаны операцией дискретной свёртки вектора весовых коэффициентов фильтра и вектора, элементами которого являются отсчёты дискретного входного сигнала. Применение линейной свёртки позволяет получить фильтр со строго линейной фазочастотной характеристикой. Другим преимуществом КИХ-фильтров перед рекурсивными фильтрами является их гарантированная устойчивость, обусловленная отсутствием обратных связей.

Обработка сигналов в адаптивных ядрах тоже осуществляется методом линейной свёртки. Однако присутствие обратной связи в самом адаптивном алгоритме, выполняющем настройку весовых коэффициентов, может выводить адаптивные ядра за границу устойчивости. Вопросы устойчивости адаптивных алгоритмов рассмотрены в [6, 8, 9], выполнение ряда условий позволяет без особых трудностей обеспечить устойчивую работу алгоритма НСК.

Постановка задачи оптимального проектирования, применительно к МАФ на основе алгоритма НСК

В [10] обсуждался вопрос эквивалентности различных структур МАФ по точности настройки в установленном режиме. Понижение частоты дискретизации входного сигнала в ν раз позволяет проредить импульсную характеристику адаптивного фильтра (АФ) также в ν раз. Если период дискретизации понижается в ν раз, то есть когда $f_{KB2} = f_{KB1} / \nu$ ($T_2 = T_1 \nu$), то при сохранении

прежней протяжённости импульсной характеристики фильтра число весовых коэффициентов (порядок фильтра) понижается в ν раз: $N_2 = N_1 / \nu$. Поэтому эквивалентным порядком $N_{ЭКВ}$ КИХ-фильтра, работающего на пониженной частоте дискретизации, будем называть порядок КИХ-фильтра, который, работая без понижения частоты дискретизации, воспроизводит импульсную характеристику такой же длины. То есть, при понижении частоты дискретизации в ν раз, эквивалентный порядок КИХ-фильтра $N_{ЭКВ}$ в ν раз выше действительного порядка этого фильтра N_2 .

Согласно [11], для того чтобы при переходе от обычного АФ, работающего без понижения частоты дискретизации, к МАФ точность настройки в установленном режиме осталась прежней, необходимо, чтобы эквивалентный порядок МАФ $N_{ЭКВ}^*$ был больше эквивалентного порядка обычного АФ $N_{ЭКВ}$ на величину $\Delta N_{ЭКВ} = N_{АС}$, где $N_{АС}$ – порядок фильтров подсистемы анализа-синтеза:

$$N_{ЭКВ}^* = N_{ЭКВ} + N_{АС} \tag{1}$$

При этом следует учесть, что точность настройки ограничена ошибкой воспроизведения ПАС, вызванной неидеальностью фильтров анализа и синтеза. Строгих математических соотношений, позволяющих выразить минимальный порядок фильтров анализа и синтеза через ошибку воспроизведения и другие параметры ПАС, на данный момент не известно. Определим приближённую оценку, основываясь на методике, описанной в [1].

Как уже говорилось выше, все фильтры равномерной ПАС получаются на основе одного общего для них низкочастотного фильтра-прототипа. Порядок любого из фильтров ПАС $N_{АС}$ равен порядку фильтра-прототипа. В [1] показано, что для оценки порядка низкочастотного фильтра (рис. 3) можно воспользоваться следующим выражением:

$$N_{АС} = \alpha \beta L(\epsilon_1, \epsilon_2) \tag{2}$$

где $\alpha = \omega_{c1} / (\omega_{c2} - \omega_{c1})$ – показатель прямоугольности АЧХ, $\beta = 2\pi / \omega_{c1}$ – показатель узкополосности фильтра, $L(\epsilon_1, \epsilon_2)$ – показатель частотной избирательности, ω_{c1} и ω_{c2} – частоты среза полосы пропускания и зоны непрозрачности, соответственно.

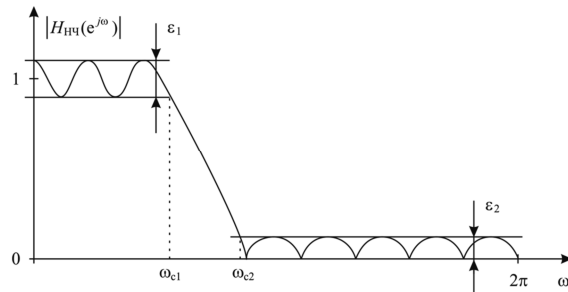


Рис. 3. АЧХ низкочастотного фильтра

На основе экспериментальных данных, полученных по большому числу оптимальных фильтров, было выведено эмпирическое соотношение, связывающее неравномерность АЧХ в полосе пропускания ϵ_1 и уровень подавления в зоне непрозрачности ϵ_2 проектируемого фильтра с показателем его частотной избирательности [12]:

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [c_1 (\lg \varepsilon_1)^2 + c_2 \lg \varepsilon_1 + c_3] \lg \varepsilon_2 + [c_4 (\lg \varepsilon_1)^2 + c_5 \lg \varepsilon_1 + c_6], \quad (3)$$

где

$$c_1 = 5,309 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 7,114 \cdot 10^{-2}, \\ c_3 = -4,761 \cdot 10^{-1}, \quad c_4 = -0,266 \cdot 10^{-3}, \\ c_5 = -5,941 \cdot 10^{-1}, \quad c_6 = -4,278 \cdot 10^{-1}.$$

Показатель частотной избирательности $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при изменении параметров ε_1 и ε_2 в диапазоне $10^{-4} \dots 10^{-1}$, что отвечает фактически большинству используемых на практике вариантов, принимает значения от 1 до 5 и может быть аппроксимирован выражением [13]

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \approx -\frac{2}{3} \lg 10 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (4)$$

На рис. 4 сплошной линией представлены функциональные зависимости $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для некоторой совокупности параметров ε_2 , а штриховой линией – их аппроксимация в форме (4), предложенная Белланже [13].

Выражение (3) показывает, что при заданных ε_1 и ε_2 затраты на реализацию узкополосного фильтра с конечной памятью, пропорциональные его порядку, определяются главным образом двумя параметрами: показателем узкополосности β и показателем прямоугольности АЧХ α .

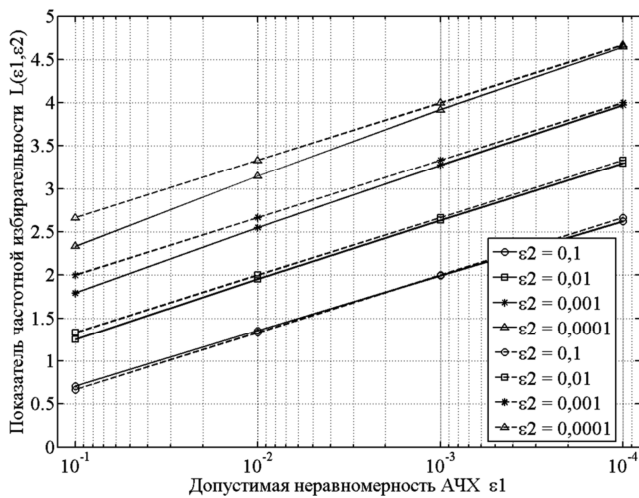


Рис. 4. Аппроксимация показателя частотной избирательности

Описанную выше методику оценки минимальной величины порядка низкочастотного фильтра можно перенести на ПАС с равномерным разбиением по частоте, если в качестве параметра ε_1 использовать допустимую ошибку воспроизведения ПАС.

Анализируя схемы, представленные на рис. 2 и рис. 3, можно выразить частоты ω_{c1} и ω_{c2} (для МАФ с передискретизацией):

$$\omega_{c2} = \frac{\pi}{v}; \quad \omega_{c1} = \frac{2\pi}{M} - \omega_{c2} = \frac{2v - M}{vM} \pi. \quad (5)$$

Порядок фильтров ПАС N_{as} выражается формулой

$$N_{as} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_{c2} - \omega_{c1}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{c1}} L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{2\pi}{\omega_{c2} - \omega_{c1}} L(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (6)$$

Выражение для ω_{c1} в форме (5) получено в предпо-

ложении, что $v > M/2$. Если выбрать $v < M/2$, то при расчёте получим отрицательное значение для ω_{c1} . С одной стороны, как будет показано ниже, оптимальное решение находится при условии $v > M/2$, а с другой стороны, замена отрицательной величины ω_{c1} нулём приводит к увеличению порядка фильтров N_{as} , что очевидно из (6), а, следовательно, общий объём вычислительных затрат при этом не уменьшается, а даже увеличивается по сравнению с оценкой, получаемой на основании (6).

Подставляя (5) в (6), находим

$$N_{as} = \frac{Mv}{M - v} \cdot L(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (7)$$

Результаты экспериментального поиска минимального порядка, полученные для разных сочетаний числа каналов ПАС M и коэффициента децимации v , представлены в табл. 1. В проведённых экспериментах использовался алгоритм, описанный в [2], а параметры ε_1 и ε_2 были заданы равными друг другу: $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$.

На рис. 5 сравниваются экспериментально полученные данные, представленные в табл. 1, и теоретические оценки, полученные с помощью (7). Результаты экспериментов показаны символами разной формы, соединёнными между собой отрезками штриховых линий. Приближённые теоретические оценки изображены соответствующими им сплошными линиями.

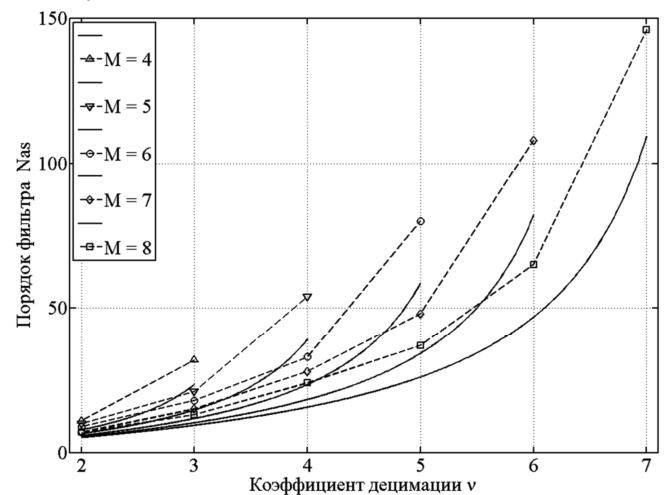


Рис. 5. Сравнение теоретических оценок порядка фильтров ПАС, найденных с помощью (2), с результатами экспериментов ($\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,01$)

Если выбрать в качестве целевой функции объём вычислительных затрат на реализацию МАФ в реальном времени, а точность воспроизведения желаемых характеристик отнести к ограничивающим факторам, то, учитывая (1) и (7), задачу оптимального проектирования с учётом указанных выше положений можно сформулировать следующим образом.

Для заданного эквивалентного порядка МАФ $N_{эkv}$ и заданного показателя частотной избирательности ПАС $L_{ПАС}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ требуется найти такое число каналов M и такую величину коэффициента децимации v , при которых объём вычислительных затрат $V(M, v)$ на реализацию МАФ в реальном времени оказывается минимальным:

Таблица 1. Результаты экспериментальной оценки минимального порядка фильтров анализа и синтеза

Число каналов ПАС М	Коэффициент прореживания ν					
	2	3	4	5	6	7
4	$N_{as} = 11$	$N_{as} = 32$	—	—	—	—
5	—	$N_{as} = 21$	$N_{as} = 54$	—	—	—
6	—	—	$N_{as} = 33$	$N_{as} = 80$	—	—
7	—	—	$N_{as} = 28$	$N_{as} = 48$	$N_{as} = 108$	—
8	—	—	—	$N_{as} = 37$	$N_{as} = 65$	$N_{as} = 146$

$$\begin{cases} V(M, \nu) \rightarrow \min_{M, \nu}, \\ N_{\text{экв}} = \text{const}, \\ L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{const}. \end{cases} \quad (8)$$

Вычислительные затраты будем оценивать числом операций комплексного умножения, приходящихся на один отсчёт входного сигнала при адаптивной настройке МАФ в реальном времени. Общий объём вычислительных затрат $V(M, \nu)$ складывается (рис. 1) из вычислительных затрат на реализацию двух подсистем анализа A_1 и A_2 , одной подсистемы синтеза S_1 и M адаптивных ядер $w_0(k), w_1(k), \dots, w_{M-1}(k)$, в которых настройка выполняется по алгоритму НСК:

$$V(M, \nu) = \frac{M}{\nu} \left(2N_{as} + N_{as} + \frac{2N_{\text{экв}}^*}{\nu} \right). \quad (9)$$

В (9) учитывается, что МАФ имеет M каналов, каждый из которых функционирует на пониженной в ν раз частоте дискретизации. Задачу оптимального проектирования (8) можно конкретизировать в виде

$$\begin{cases} \frac{M}{\nu} \left(2N_{as} + N_{as} + \frac{2N_{\text{экв}}^*}{\nu} \right) \rightarrow \min_{M, \nu}, \\ N_{\text{экв}}^*(M, \nu) = N_{\text{экв}} + N_{as}(M, \nu), \\ N_{as}(M, \nu) = \frac{M\nu}{M-\nu} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ N_{\text{экв}} = \text{const}, L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{const}. \end{cases} \quad (10)$$

Решение задачи оптимального проектирования, применительно к МАФ на основе алгоритма НСК

Найдём минимум функции двух переменных

$$\begin{aligned} V(M, \nu) &= \frac{M}{\nu} \left(3 \frac{M\nu}{M-\nu} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\nu} (N_{\text{экв}} + \frac{M\nu}{M-\nu} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \right) \rightarrow \min_{M, \nu}, \end{aligned} \quad (11)$$

выражающей общий объём вычислительных затрат на реализацию в реальном времени МАФ с равномерным разбиением по частоте при использовании алгоритма НСК:

$$\begin{aligned} V(M, \nu) &= 3 \frac{M^2}{M-\nu} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \\ &+ \frac{2M}{\nu^2} \left(N_{\text{экв}} + \frac{M\nu}{M-\nu} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right) = \\ &= \frac{3M^2 L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{M-\nu} + \frac{2MN_{\text{экв}}}{\nu^2} + \frac{2M^2 L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\nu(M-\nu)}. \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших преобразований введём параметр

$$\xi = \frac{2N_{\text{экв}}}{3L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \quad (12)$$

и функцию

$$V_0(M, \nu) = \frac{V(M, \nu)}{3L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}, \quad (13)$$

которая отличается от $V(M, \nu)$ постоянным коэффициентом и, следовательно, имеет минимум в той же точке $(M_{\text{опт}}, \nu_{\text{опт}})$.

В точке минимума дробно-рациональной функции двух переменных обе частные производные обращаются в нуль. Найдём частные производные (13):

$$\begin{cases} \frac{\partial V_0}{\partial \nu} = \frac{M^2}{(\nu-M)^2} - \frac{2\xi M}{\nu^3} + \\ + 2M^2 \left(-\frac{1}{3\nu^2(M-\nu)} + \frac{1}{3\nu(M-\nu)^2} \right), \\ \frac{\partial V_0}{\partial M} = \frac{\xi}{\nu^2} + \frac{2M(M-\nu) - M^2}{(\nu-M)^2} + \\ + \frac{3 \cdot 4M\nu(M-\nu) - 3 \cdot 2M^2\nu}{9\nu^2(M-\nu)^2}. \end{cases}$$

Приравняв обе частные производные к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{M^2}{(M-\nu)^2} - \frac{2\xi M}{\nu^3} - \\ - \frac{2M^2}{3\nu^2(M-\nu)} + \frac{2M^2}{3\nu(M-\nu)^2} = 0, \\ \frac{\xi}{\nu^2} + \frac{2M(M-\nu) - M^2}{(M-\nu)^2} + \\ + \frac{4M\nu(M-\nu) - 2M^2\nu}{3\nu^2(M-\nu)^2} = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $1 < \nu < M$ (из соображений технической реализуемости МАФ с передискретизацией) и вводя подобные члены, преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} M\nu^3 - 2\xi(M-\nu)^2 - \frac{2}{3}M\nu(M-2\nu) = 0, \\ \xi(M-\nu)^2 + M\nu^2(M-2\nu) + \\ + \frac{2}{3}M\nu(M-2\nu) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Складывая первое уравнение системы (14) со вторым, получим

$$M\nu^3 - \xi(M-\nu)^2 + M\nu^2(M-2\nu) = 0.$$

Тогда

$$Mv^2 = \xi(M - v) \quad (15)$$

или

$$M = \frac{v}{1 - \frac{v^2}{\xi}}. \quad (16)$$

Преобразуем второе уравнение системы (14):

$$\begin{aligned} & \xi(M - v)^2 + Mv^2(M - v) - \\ & - Mv^3 + \frac{2}{3}Mv(M - v) - \frac{2}{3}Mv^2 = 0, \end{aligned}$$

а затем, принимая во внимание (15), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi}(Mv^2)^2 + \frac{1}{\xi}Mv^2Mv^2 - \\ & - Mv^2v + \frac{2}{3\xi}Mv^2Mv - \frac{2}{3}Mv^2 = 0, \\ & 2Mv^2v - \xi v^2 + \frac{2}{3}Mv^2 - \frac{2}{3}\xi v = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) следует, что

$$Mv^2 = \frac{\xi v^3}{\xi - v^2}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), находим

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\xi v^3}{\xi - v^2} v - \xi v^2 + \frac{2}{3} \frac{\xi v^3}{\xi - v^2} - \frac{2}{3} \xi v = 0, \\ & v^3 + \frac{4}{9}v^2 - \frac{\xi}{3}v - \frac{2\xi}{9} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Введём новую переменную

$$y = v + \frac{4}{27}. \quad (20)$$

Теперь (19) примет вид

$$y^3 + py + q = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\xi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 = -\frac{1}{3} \left(\xi + \frac{16}{81}\right), \\ q &= \frac{2}{27} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{\xi}{3}\right) + \\ & + \left(-\frac{2\xi}{9}\right) = \frac{2}{27} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 - \frac{7\xi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Уравнение (21) является линейным уравнением третьей степени, представленным в каноническом виде, и решается с использованием формулы Кардано [14].

Определим параметр Q алгоритма Кардано:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3^6} \left(\xi + \frac{16}{81}\right)^3 + \frac{1}{3^6} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^3 - \frac{7\xi}{3}\right]^2 = \\ &= -\frac{1}{3^6} \left(\xi^3 - \frac{131}{3^3}\xi^2 + \frac{2^7}{3^5}\xi\right) \end{aligned}$$

Известно, что если $Q \leq 0$, то уравнение (21) имеет два и более вещественных корней. В нашем случае

$Q \leq 0$ при $0 \leq \xi \leq 1/9$ или $\xi \geq 128/27$. Несмотря на то, что для уравнения (21) возможно существование нескольких положительных корней, тем не менее, с учётом перехода (20), уравнение (19) имеет только один положительный корень, о чём свидетельствуют результаты предварительного анализа (19).

Находим одно из трёх решений (21) по формуле Кардано:

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \\ &= -\frac{1}{3^6} \left(\xi^3 - \frac{131}{3^3}\xi^2 + \frac{2^7}{3^5}\xi\right), \\ y_0 &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7\xi}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^3} + \sqrt{\frac{131}{3^3}\xi^2 - \xi^3 - \frac{2^7}{3^5}\xi} + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7\xi}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^3} - \sqrt{\frac{131}{3^3}\xi^2 - \xi^3 - \frac{2^7}{3^5}\xi} \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20) и (22) находим решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} v_{\text{опт}} &= -\frac{4}{27} + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7\xi}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^3} + \sqrt{\frac{131}{3^3}\xi^2 - \xi^3 - \frac{2^7}{3^5}\xi} + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{7\xi}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^3} - \sqrt{\frac{131}{3^3}\xi^2 - \xi^3 - \frac{2^7}{3^5}\xi}, \end{aligned} \quad (23, a)$$

$$M_{\text{опт}} = \frac{v_{\text{опт}}}{1 - \frac{v_{\text{опт}}^2}{\xi}}. \quad (23, б)$$

Равенство нулю обеих частных производных является лишь необходимым условием экстремума функции двух переменных (13). Строго говоря, полученное нами решение позволяет утверждать только, что точка $(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})$ является критической точкой.

Достаточным условием минимума функции двух переменных является выполнение в критической точке следующих трёх условий [15]:

1) частные производные до третьего порядка включительно должны быть непрерывными в точке в некоторой области, содержащей точку $(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})$,

2) должно выполняться условие

$$\frac{\partial^2 V_0(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})}{\partial v^2} > 0, \quad (24)$$

3) должно выполняться условие

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_0(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})}{\partial M^2} \cdot \frac{\partial^2 V_0(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})}{\partial v^2} - \\ & - \left(\frac{\partial^2 V_0(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})}{\partial M \partial v}\right)^2 > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Непрерывность частных производных очевидна, поскольку функция $V_0(M, v)$ является дробно-рациональной, и справедливы условия $v > 0$ и $v < M$.

Условие (24) тоже доказывается несложно:

$$\frac{\partial V_0}{\partial v} = \frac{M^2}{(M-v)^2} - \frac{2\xi M}{v^3} + \frac{2M^2}{3} \cdot \frac{2v-M}{v^2(M-v)^2},$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial v^2} = \frac{2M}{v^4(M-v)^3} [Mv^4 + 3\xi(M-v)^3 + \frac{2}{3}Mv(M^2 - Mv - v^2)].$$

Группируем слагаемые, стоящие в квадратных скобках:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial v^2} = \frac{2M}{v^4(M-v)^3} [Mv^4 + 3\xi(M-v)^3 + \frac{2}{3}M^2v(M-v) - \frac{2}{3}Mv^3] =$$

$$= \frac{2M}{v^4(M-v)^3} [Mv^3(v - \frac{2}{3}) + 3\xi(M-v)^3 + \frac{2}{3}M^2v(M-v)].$$

Если принять во внимание, что кроме условий $v > 0$ и $v < M$ выполняется условие $v \geq 1$, так как частота дискретизации понижается, а не повышается, то становится ясно, что вторая производная принимает только положительные значения.

Условие (25) доказать несколько труднее. Алгебраические преобразования получаются слишком громоздкими, и затруднительно привести их в данной статье. В то же время, нетрудно обосновать, что найденная выше точка $(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})$ является точкой минимума функции двух переменных.

Условиям $v > 0$ и $v < M$ соответствует область, ограниченная пересекающимися прямыми $v = 0$ и $v = M$. Анализ выражений (11) и (13) позволяет утверждать, что $V_0(M, v)$ является дробно-рациональной функцией, причём для всех точек, лежащих на прямых $v = 0$ и $v = M$, числитель данной функции отличен от нуля, а знаменатель стремится к 0.

Для $V_0(M, v)$ выполняются следующие четыре условия:

- 1) $V_0(M, v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow 0_+$,
- 2) $V_0(M, v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow M_+$,
- 3) $V_0(M, v) \rightarrow +\infty$ при $M \rightarrow 0_+ \forall v \in (0, M)$,
- 4) $(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})$ является единственной критической точкой при $v > 0$, о чём было сказано при анализе уравнения (19).

Поскольку на границах рассматриваемой нами области $V_0(M, v)$ стремится к бесконечности, а найденная точка $(M_{\text{опт}}, v_{\text{опт}})$, принадлежащая данной области, является единственной критической точкой, и только в этой точке может существовать экстремум [15], то очевидно, что найденная нами точка является точкой минимума.

Один из возможных графиков функции двух переменных $V_0(M, v)$, полученный при выборе некоторых типовых значений её параметров, показан на рис. 6. Для удобства восприятия внизу показаны линии уровня, очерчивающие область, в которой находится точка минимума.

Полученное выше решение в форме (23) является точным решением поставленной задачи оптимизации, но пользоваться им на практике несколько затруднительно. Ниже предлагается приближённое решение.

Из (19) следует, что

$$\xi = \frac{v^3 + \frac{4}{9}v^2}{\frac{1}{3}v + \frac{2}{9}} = 3v^2 \frac{3v + \frac{4}{3}}{3v + 2} = 3v^2 \left(1 - \frac{2/3}{3v + 2} \right).$$

При $v = 1$ второе выражение в скобках отличается от единицы на $2/15$, при $v = 2$ – на $1/12$, при $v = 3$ – на $2/33$ и далее продолжает убывать с ростом v . Рассматривая данную составляющую как относительную погрешность определения ξ , получаем приближённое равенство

$$v_{\text{опт}} \approx \sqrt{\frac{\xi}{3}}. \tag{26, а}$$

Тогда из (23, б)

$$M_{\text{опт}} \approx \frac{\sqrt{3\xi}}{2}. \tag{26, б}$$

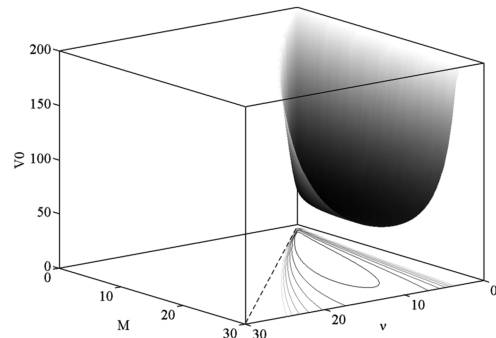


Рис. 6. Вид функции $V_0(M, v)$ при $v > 0$ и $v < M$.

Для удобства восприятия внизу показаны линии уровня

Выражениями (26) пользоваться намного проще, чем точными формулами (23).

С учётом (12) находим

$$v_{\text{опт}} \approx \sqrt{\frac{2N_{\text{экв}}}{9L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}}, \quad M_{\text{опт}} \approx \sqrt{\frac{N_{\text{экв}}}{2L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}}. \tag{27}$$

Приведём далее выражение, позволяющее оценить приращение эквивалентного порядка $\Delta N_{\text{экв}} = N_{\text{ас}}$, которое требуется для сохранения точности настройки в установленном режиме при переходе от обычного АФ, работающего без понижения частоты дискретизации, к МАФ. Воспользуемся (1), (10), (11) и (27):

$$\Delta N_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{опт}} v_{\text{опт}}}{M_{\text{опт}} - v_{\text{опт}}} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \approx$$

$$\frac{\sqrt{\frac{N_{\text{экв}}}{2L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}} \sqrt{\frac{2N_{\text{экв}}}{9L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}}}{\sqrt{\frac{N_{\text{экв}}}{2L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}} - \sqrt{\frac{2N_{\text{экв}}}{9L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}}} \cdot L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

$$\Delta N_{\text{экв}} \approx \sqrt{2N_{\text{экв}} L_{\text{ПАС}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}. \tag{28}$$

Пример выбора оптимальной структуры для МАФ с равномерным разбиением по частоте при использовании алгоритма НСК

Предположим, что для обеспечения необходимой точности настройки в установленном режиме адаптивный фильтр должен иметь эквивалентный порядок $N_{\text{экв}} = 150$. Для ПАС зададим показатель частотной избирательности $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2$ (то есть, $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 = 0,01$).

Выберем оптимальную структуру по критерию минимума операций комплексного умножения. Воспользуемся для этого выражениями (27) и (28). Находим $M_{\text{опт}} \approx 6,68$, $\nu_{\text{опт}} \approx 4,45$, $\Delta N_{\text{экв}} \approx 24$. Эквивалентный порядок МАФ должен быть равен $150 + 24 = 174$.

Теоретические оценки общего объема вычислительных затрат для разных значений M и ν при заданных выше параметрах представлены в форме семейства кривых на рис. 7. Действительно, минимум вычислительных затрат достигается при $M_{\text{опт}} \approx 6,68$ и $\nu_{\text{опт}} \approx 4,45$.

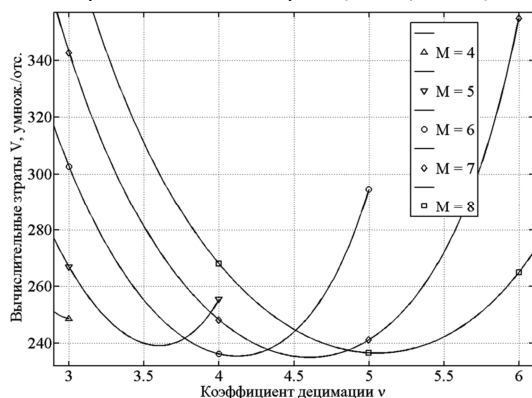


Рис. 7. Теоретические оценки общего объема вычислительных затрат для разных значений M и ν при $N_{\text{экв}} = 150$ и $L(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$ ($\epsilon_1 \approx \epsilon_2 = 0,01$)

Но количество каналов МАФ и коэффициент децимации – это целые числа. Ближайшими целыми значениями к 4,45 являются числа 4 и 5.

Из (26) следует, что

$$M_{\text{опт}} \approx \frac{\sqrt{3\xi}}{2} \approx \frac{3}{2} \nu_{\text{опт}} \quad (29)$$

Если $\nu_{\text{опт}} = 4$, то $M_{\text{опт}} = 6$, а если $\nu_{\text{опт}} = 5$, то $M_{\text{опт}} = 7,5$. Предпочтение следует отдать первой паре, так как во втором случае значение $M_{\text{опт}}$ далеко от ближайших к нему целых чисел 7 и 8.

И в самом деле, на рис. 7 точка, соответствующая выбору $\nu_{\text{опт}} = 5$ и $M_{\text{опт}} = 7$, расположена даже выше точки, соответствующей выбору $\nu_{\text{опт}} = 5$ и $M_{\text{опт}} = 8$.

Если для расчёта весовых коэффициентов фильтров ПАС использовать алгоритм, описанный в [2], то сможем получить ПАС, затраты на реализацию которых сведены в табл. 1. С учётом этих реально достигаемых характеристик получаем оценки, представленные на рис. 8.

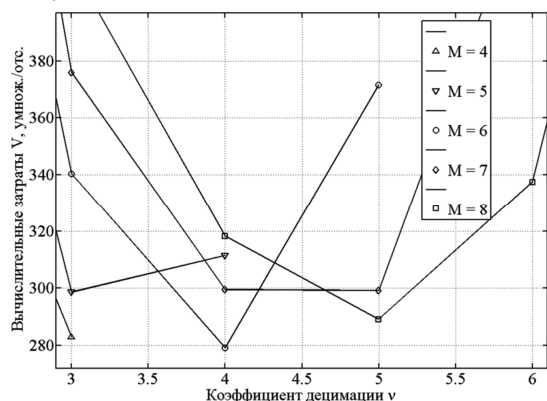


Рис. 8. Реально достигнутые вычислительные затраты для разных значений M и ν при $N_{\text{экв}} = 150$ и $L(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$ ($\epsilon_1 \approx \epsilon_2 = 0,01$)

Минимум вычислительных затрат снова достигается при $M_{\text{опт}} = 6$ и $\nu_{\text{опт}} = 4$. Хотя на реализацию реально полученных ПАС требуется несколько больший объем вычислительных затрат, чем тот минимальный уровень, который даёт (7) при оценках показателя частотной избирательности по (3) или (4).

Заключение

В статье получены аналитические зависимости, позволяющие выбрать оптимальную структуру МАФ с равномерным разбиением по частоте при использовании алгоритма НСК. Для практического использования выведены простые приближённые формулы: (27), (28) и (29). Приводится пример использования предлагаемых расчётных соотношений.

Анализ теоретических и экспериментальных результатов, представленных на рис. 6-8, приводит к следующим выводам. Во-первых, при соблюдении оптимального соотношения между числом каналов и коэффициентом децимации (28) объём вычислительных затрат медленно меняется с ростом числа каналов МАФ. То есть, условие (29) является решающим в задаче оптимизации МАФ. При его выполнении M и ν можно менять в широких пределах, практически не увеличивая вычислительные затраты. Во-вторых, при малом числе каналов (менее 10) следует учитывать дискретность параметров M и ν , которые могут принимать только целочисленные значения. В окрестностях теоретически найденного решения задачи оптимизации следует выбирать такую пару целых чисел $M_{\text{опт}}$ и $\nu_{\text{опт}}$, для которой условие (29) соблюдается с наименьшей погрешностью.

Литература

1. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. – М.: Радио и связь, 1993. – 240 с.
2. Davidson T.N. Enriching the art of FIR filter design via convex optimization // IEEE signal processing magazine. 2010. – № 3. – pp. 89-101.
3. Wilbur M.R., Davidson T.N., Reilly J.P. Efficient design of oversampled NPR GDFT filter banks // IEEE transactions on signal processing. 2004. – № 7. – pp. 1947-1963.
4. Линович А.Ю. Адаптивные фильтры с цифровой частотной селекцией сигналов без дополнительной задержки и наложений спектра // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения / Материалы Международной научно – технической конференции «INTERMATIC–2012», 3–7 декабря 2012 г., Москва. / Под ред. академика РАН А.С. Сигова. – М.: МГТУ МИРЭА – ИРЭ РАН, 2012, часть 5. – 190 с. С. 69-71.
5. Линович А.Ю. Адаптивные фильтры с цифровой частотной селекцией сигналов в системах широкополосной связи // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения / Материалы Международной научно – технической конференции «INTERMATIC–2012», 3-7 декабря 2012 г., Москва. / Под ред. академика РАН А.С. Сигова. – М.: МГТУ МИРЭА – ИРЭ РАН, 2012, часть 5. – 190 с. С. 144 – 147.
6. Haykin S. Adaptive Filter Theory. – London: Pearson, 5th ed., 2013. – 912 pp.

7. Уидроу Б. и др. Комплексная форма алгоритма НСКО // ТИИЭР. 1975. – № 3. – С. 49 – 51.

8. Diniz P. Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation. – Lexington (KY, USA): Springer, 3rd ed., 2011. – 912 pp.

9. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

10. Линович А.Ю. Применение методов частотно-временной декомпозиции при решении задачи обратного моделирования // Цифровая обработка сигналов. 2005. – № 3. – С. 28-37.

11. Weiss S., Stewart R.W. On Adaptive Filtering in Oversampled Subbands. – Aachen (Germany): Shaker Verlag, 1998.

12. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

13. Bellanger M.G. Traitement Numerique Du Signal. – Paris: Masson, 1980. – 375 pp.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 832 с.

15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Физматгиз, 1963. – 856 с.

OPTIMIZATION OF THE MULTIRATE ADAPTIVE FILTER WITH LEAST-MEAN-SQUARE ALGORITHM IN EQUAL-WIDTH SUBBANDS

Linovich A. Yu.

The main subject is solving of the optimization problem for the multirate adaptive filter with least-mean-square algorithm in equal-width subbands. Analytical estimations for the best values of the main parameters of the multirate adaptive filter are derived. The results of the computer simulation which confirm the theoretical study are supplied.

The analysis of the theory and experiments results in the next decisions. First, while the optimal ratio between the decimation ratio and quantity of channels holds true, large changes of the quantity of channels tends to insignificant increase in the computational complexity. So this ratio may be considered as the main condition of optimality. Second, for the little quantity of channels the discreteness of the quantity of channels and decimation ratio should be taken into account. That is, in the neighborhood of the theoretical minimum point it is necessary to choose those couples of numbers which are closer to the optimal ratio.

Уважаемые коллеги!

Приглашаем Вас принять участие в формировании тематических выпусков журнала «Цифровая обработка сигналов» и размещению рекламы продукции (услуг) Вашей организации на его страницах. В случае положительного решения просим представить в редакцию журнала Ваши предложения по плановому размещению информационных материалов и макет рекламы продукции (услуг) с указанием желаемого её месторасположения: обложка (2-я, 3-я или 4-я стр.), цветная внутренняя полоса (объем полосы).

Журнал «Цифровая обработка сигналов» издается с 1999 года. Выходит ежеквартально, тиражом – 700 экз. Распространяется по подписке через агентство «Роспечать» в России (индекс 82185), СНГ и странах Балтии (индекс 20630), а также на Конференции: «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA'» и Выставках: «ЕхроElectronica», «СвязьЭкспокомм», «ЭЛЕКТРОНИКА: компоненты, оборудование, технологии» (г. Москва) и др.

Научно-технический журнал «Цифровая обработка сигналов» включен в Список изданий, рекомендуемый ВАК РФ для публикации результатов научных исследований соискателями ученой степени доктора и кандидата технических наук в области радиотехники, связи, вычислительной техники, электроники, информационно-измерительных и управляющих систем.

Планируемые сроки издания отдельных номеров журнала:

№ 1 – март 2014 г. Тематический выпуск: «ЦОС в информационно-измерительных системах».

№ 2 – июнь 2014 г. Тематический выпуск: «Теория и методы цифровой обработки сигналов» (по материалам международной научно-технической конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA' 2014»).

№ 3 – сентябрь 2014 г. Тематический выпуск: «Цифровая обработка изображений».

№ 4 – декабрь 2014 г. Тематический выпуск: «ЦОС в радиотехнике и системах телекоммуникаций».

Ориентировочная стоимость рекламных услуг:

4-я (внешняя) страница цветной обложки – 25 тысяч рублей.

2-я и 3-я (внутренние) страницы цветной обложки – 15 тысяч рублей.

1\2 цветной внутренней полосы – 8 тысяч рублей.

Ждем Ваших предложений

С наилучшими пожеланиями, зам. главного редактора д.т.н., профессор Витязев Владимир Викторович, телефон 8-903-834-81-81.

Предложения прошу направлять по адресу: E-mail: vityazev.v.v@rsreu.ru или info@dspa.ru