

УДК 621.391

ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ГЕРЦЕЛЯ И СКОЛЬЗЯЩЕГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Пономарев В.А., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, e-mail:ponva@mail.ru;

Пономарева О.В., к.т.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова;

Пономарев А.В., к.э.н., руководитель аппарата Центральной избирательной комиссии Удмуртской Республики;

Пономарева Н.В., руководитель отдела тестирования ПО НПО «Компьютер»

Ключевые слова: параметрическое дискретное преобразование Фурье, скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье, обнаружение, гармоническая компонента, алгоритм Герцеля, гребенчатый фильтр.

Введение

При решении задач диагностирования объектов в различных предметных областях научных исследований приходится сталкиваться с цифровой обработкой случайных сигналов, содержащих «скрытые» гармонические (тональные) компоненты (решение так называемой задачи выявления скрытых периодичностей [1-18]). Например, в пассивной гидролокации анализ таких сигналов осуществляется при решении задачи обнаружения и классификации как надводных, так и подводных судов [2]. В машиностроении при виброакустическом функциональном диагностировании объектов широкое распространение получил анализ виброакустических сигналов, структура которых характеризуется наличием гармонических рядов, порождаемых теми или иными дефектами, при функционировании различных узлов и механизмов [3]. В некоторых приложениях сигналы со скрытыми периодичностями создаются искусственно, например, в телефонии при реализации тонального набора

Отметим, что методы выявления скрытых периодичностей основаны, как правило, на цифровой фильтрации или спектральном анализе - двух направлениях развития цифровой обработки сигналов[3].

Для эффективного решения задачи выявления скрытых периодичностей, как методами цифровой фильтрации (обработка реализуется КИХ-фильтрами или БИХ- фильтрами), так и методами спектрального анализа (анализ осуществляется с применением дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или параметрического дискретного преобразования Фурье (ДПФ-П)) важно обеспечить:

- высокую разрешающую способность цифровой обработки;
- устойчивость выбранной дискретной системы фильтрации;
- полный контроль над резонансной частотой вы-

Рассмотрены основные методы обнаружения отдельных тональных компонент и алгоритмы их реализации. Введено понятие цифровой блочной обработки с накоплением (ЦБОН), которая позволяет реализовать ДПФ и ДПФ-П с нарастающей памятью (от блока к блоку). Предложено обобщение алгоритма однобинового скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье (СДПФ-П). Обобщенный алгоритм ОСДПФ-П, в отличие от алгоритма СДПФ-П, позволяет существенно сократить число операций, необходимых для выхода алгоритма на режим скользящего измерения. Предложено обобщение алгоритма Герцеля. В отличие от стандартного алгоритма Герцеля, обобщенный алгоритм позволяет путем ЦБОН повысить разрешающую способность спектрального анализа, сохраняя устойчивость фильтра и полный контроль над его резонансной частотой.

бранной дискретной системы фильтрации;

- минимум времени цифровой обработки и объема необходимой памяти для ее осуществления.

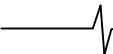
Отметим, что решение задачи выявления скрытых периодичностей часто осложняется тем, что исследуемые сигналы имеют спектр Фурье, изменяющийся во времени. Одним из методов эффективного выявления скрытых периодичностей в такого рода сигналах является измерение текущего скользящего фурье-спектра (иногда называемого текущим спектром) [1, 4, 5]. Суть подхода заключается в определении фурье-спектра сигнала во временном окне в N отсчетов. При этом перед повторным спектральным измерением окно смещается на один отсчет.

Общим недостатком существующих методов измерения скользящих спектров Фурье [4, 9] является необходимость выполнения большого числа операций при выходе на режим скользящего измерения. Сокращение числа этих операций при одновременном обеспечении высокой разрешающей способности спектрального анализа является важной практической задачей.

Целью настоящей работы является разработка методов и алгоритмов, обеспечивающих решение поставленных задач.

Методы и алгоритмы обнаружения отдельных гармонических компонент

Алгоритм Герцеля является эффективным методом вычисления однобинового дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Стандартная структура фильтра Герцеля



приведена на рис.1а. Алгоритм Герцеля широко применяется при декодировании DTMF сигналов (DTMF – Dual Tone Multi Frequency) – двухтональных многочастотных сигналов, используемых при тональном наборе телефонного номера.

Алгоритм Герцеля позволяет вычислить значение k -го бина N -точечного ДПФ [2,4]:

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn), \quad (1)$$

и является БИХ-фильтром второго порядка с двумя действительными коэффициентами в обратной цепи (слева от пунктирной линии) и одним комплексным коэффициентом в прямой цепи фильтра (справа от пунктирной линии) (рис.1 б). Отметим, что возможен вариант алгоритма Герцеля в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рис.1 а. Варианты отличаются друг от друга реализацией прямой цепи фильтра.

Фильтр Герцеля, как справедливо отмечено в [4], используется нестандартно: не как обычный фильтр, в котором запоминаются все выходные отсчеты. В алгоритме Герцеля обработка проводится блоками в N отсчетов, при этом вычисляется и запоминается только каждое N значение выходного отсчета (причина обработки блоками будет пояснена ниже). Отметим, что эти выходные отсчеты совпадают с соответствующими коэффициентами ДПФ. Для получения указанных значений k -го коэффициента ДПФ в алгоритме Герцеля (рис.1 а, б.), на каждые N входных отсчетов алгоритма проводится одна операция комплексного умножения в прямой цепи фильтра (операция отвечает за реализацию нуля фильтра) и N умножений действительных коэффициентов на входные отсчеты алгоритма при вычислении промежуточных результатов в обратной цепи фильтра (операции, отвечают за реализацию полюса фильтра).

Заметим, что именно отказ от получения всех промежуточных выходных отсчетов, а следовательно и отсчетов на входе прямой цепи фильтра, обеспечивает алгоритму Герцеля возможность экономии в числе вычислений по сравнению с определением k -го коэффициента ДПФ $S_N(k)$ «в лоб», согласно соотношению (1).

При комплекснозначном входном сигнале алгоритм Герцеля позволяет примерно вдвое сократить число операций по сравнению с алгоритмом ДПФ. Для действительного входного сигнала как алгоритм ДПФ, так и алгоритм Герцеля позволяют получить дополнительную экономию в вычислениях по сравнению с комплекснозначным входным сигналом.

Разностные уравнения фильтра Герцеля (рис.1 а, б) задаются следующими соотношениями [4, 5]:

– обратная цепь фильтра (рис.1 а, б)

$$v(n) = 2\cos(2\pi k / N) v(n-1) - v(n-2) + x(n), \quad (2)$$

– прямая цепь фильтра (рис.1 а)

$$y(n) = v(n) - W_N^k v(n-1),$$

– прямая цепь фильтра (рис.1 б)

$$y(n) = W_N^{-k} v(n) - v(n-1). \quad (3)$$

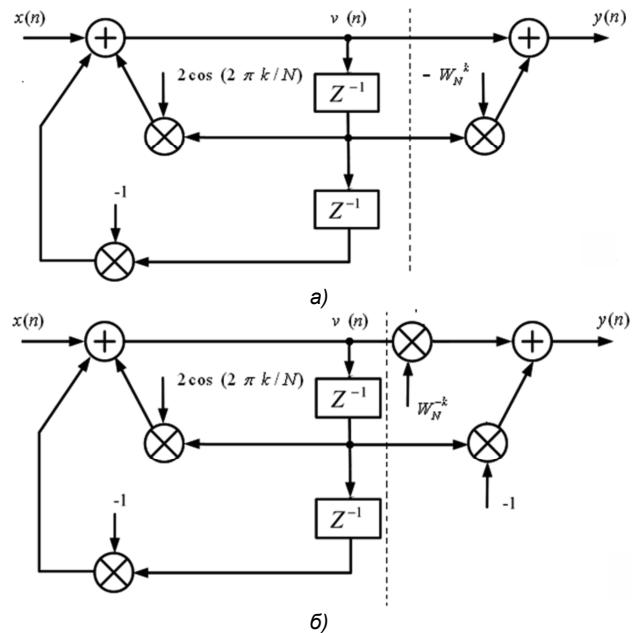


Рис.1. Структуры БИХ-фильтров, реализующие алгоритм Герцеля

Обычно считается, что недостатком фильтра Герцеля является фиксированность набора анализируемых частот: $\{2\pi k/N\}$, где $k = \overline{0, N-1}$, N - число отсчетов сигнала. Р. Лайонс в [4] предложил модифицировать алгоритм Герцеля путем замены целочисленных значений переменной k (рис.1 а) (а, следовательно, и на рис 1 б) на любое значение переменной k в диапазоне $\overline{0, N-1}$, обеспечивая, таким образом, полный контроль над резонансной частотой фильтра. В дальнейшем будет показано, что такая модификация действительно возможна, но важно понимать и учитывать не только положительные ее последствия, но и некоторые другие моменты. Например, если мы говорим, что «стандартный» алгоритм Герцеля позволяет вычислить значение k -го бина N -точечного ДПФ, то возникает вопрос: что измеряет модифицированный таким образом фильтр Герцеля?

В связи с изложенным, сделаем два замечания по поводу предложенной в [4] модификации фильтра Герцеля.

Во-первых, такую же модификацию можно сделать и в преобразовании (1). Если целочисленную переменную k на рис.1 а представить как переменную вида $(k + \theta)$, где $k = \overline{0, N-1}$, $0 \leq \theta < 1$, то приходим к введенному в [5] параметрическому ДПФ (ДПФ-П).

Во-вторых, как будет показано ниже, при переходе к нецелому значению частоты вида $(k + \theta)$ происходит «набег» фазы и значение выходного отсчета модифицированного таким образом алгоритма Герцеля не будет совпадать с соответствующим коэффициентом ДПФ-П (тем более с коэффициентом ДПФ).

Второй недостаток алгоритма Герцеля более существенен. Дело в том, что фильтр Герцеля находится на грани устойчивости, так как его полюс расположен на единичной окружности z – плоскости. Если за счет округления коэффициентов фильтра полюс выйдет за

пределы единичной окружности фильтр Герцеля теряет устойчивость.

Известный метод борьбы с указанным недостатком [4] – обработка сигналов блоками длительностью в N отсчетов и обнуление внутренних регистров $v(n-1)$ и $v(n-2)$ (2) в начале обработки каждого нового блока данных [4]. Таким образом, устойчивость алгоритма Герцеля обеспечивается сокращением обрабатываемой длительности входного сигнала до N отсчетов (как отмечено в [4], N может измеряться сотнями). Это важные замечания и мы к ним еще вернемся в дальнейшем.

Рассмотрим алгоритм однобинового скользящего ДПФ (СДПФ) [4], который обеспечивает получение текущих значений спектральных отсчетов в реальном масштабе времени.

Данный алгоритм обнаружения отдельного тона позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ из скользящего окна в N отсчетов. Отметим, что алгоритм СДПФ эффективнее алгоритма Герцеля с точки зрения числа вычислений [4].

Разностное уравнение СДПФ имеет вид [4]:

$$S_N^k(n) = W_N^{-k} [S_N^k(n-1) + x(n) - x(n-N)], \quad (4)$$

где $S_N^k(n)$ -значение k -го бина N -точечного ДПФ в момент времени n .

Его реализация приводит к структуре КИХ-фильтра, приведенного на рис. 2.

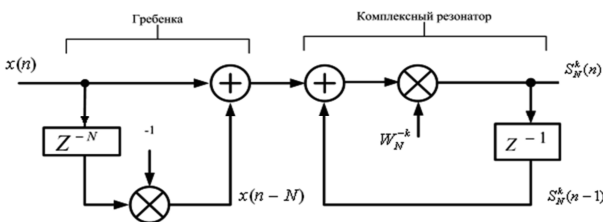


Рис. 2. Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ на k -й частоте

Недостатком фильтра однобинового скользящего ДПФ является фиксированность набора анализируемых частот:

$\{2\pi k/N\}$, где $k = \overline{0, N/2-1}$, N - число отсчетов сигнала.

Отметим, что у фильтра однобинового скользящего ДПФ имеется и второй недостаток, такой же как и у фильтра Герцеля. СДПФ находится на грани устойчивости, так как его единственный полюс, подавляющий ноль гребенчатого фильтра в точке $z = \exp(j2\pi k/N)$ расположен на единичной окружности z -плоскости. В [4] предложен метод борьбы с указанным недостатком – введение затухания для смещения нулей и полюса внутрь единичной окружности z -плоскости.

Следующим алгоритмом скользящих измерений, является алгоритм параметрического СДПФ [9].

На базе, введенного [5, 6, 7, 8] понятия параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П)

$$def_p(p, l, \theta) = W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right], \quad (5)$$

$$0 \leq \theta < 1, \quad p, l = \overline{0, N-1},$$

в [9] предложено обобщение алгоритма однобинового СДПФ в виде скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П). Алгоритм СДПФ-П позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ-П из скользящего окна в N отсчетов и, в отличие от стандартного СДПФ, дает возможность проводить оценку спектра в окне в N отсчетов не на фиксированных частотах, а из набора частот, значение которых варьируется параметром θ :

$$\{2\pi(k+\theta)/N\},$$

где

$$k = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (6)$$

В [5] разложение по базисной системе ДЭФ-П при $p = k, \quad l = n$ определено как прямое параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П):

$$S_N(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+\theta)n}, \quad \text{где } 0 \leq \theta < 1. \quad (7)$$

Алгоритм СДПФ-П позволяет рекуррентно вычислять значения спектра $S_N^{(k+\theta)}(r)$ из скользящего окна длиной в N отсчетов на r -ом шаге, при сдвиге сигнала в окне на один отсчет влево:

$$S_N^{(k+\theta)}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r)W_N^{(k+\theta)n}. \quad (8)$$

Изменив в (8) индексирование отсчетов во времени так, чтобы входные отсчеты $x(n+r)$ и выходные отсчеты $S_N^{(k+\theta)}(r)$ имели одни и те же значения индекса времени n , разностное уравнение СДПФ-П запишем в следующем виде [9]:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = W_N^{-(k+\theta)} \times [S_N^{(k+\theta)}(n-1) + x(n) - x(n-N)\exp(-j2\pi\theta)]. \quad (9)$$

Данное разностное уравнение может быть реализовано в виде обобщенного КИХ-фильтра [9] (рис 3).

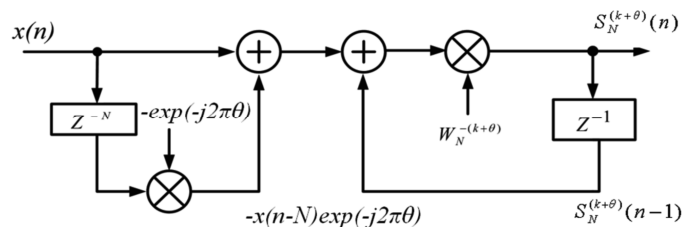


Рис. 3. Структура фильтра однобинового скользящего СДПФ-П на $(k+\theta)$ -ой частоте, $0 \leq \theta < 1$

Отметим, что переходная характеристика фильтра СДПФ-П (как и переходная характеристика фильтра СДПФ) имеет длину в N -отсчетов.

Таким образом, алгоритм СДПФ-П, в отличие от

СДПФ, обеспечивает полный контроль над резонансной частотой фильтра ДПФ-П. Однако, у фильтра СДПФ-П (как и у фильтра СДПФ) имеется полюс, расположенный на единичной окружности z -плоскости, который подавляет ноль модифицированного гребенчатого фильтра в точке $z = \exp[j2\pi(k + \theta) / N]$ [9]. Следовательно, проблемы с устойчивостью у СДПФ-П те же, что и у СДПФ.

Результаты сравнения эффективности рассмотренных методов приведены в табл. 1 [9]. Несложно видеть, что алгоритмы СДПФ и СДПФ-П, будучи в целом эффективнее алгоритма Герцеля с точки зрения числа вычислений, существенно проигрывают последнему в числе операций, которые необходимо выполнить для выхода на установившийся режим (примерно в четыре раза по операциям действительных умножений и в два раза по операциям действительных сложений).

Таблица 1

Метод	Число операций, необходимых для выхода на установившийся режим $S_N^{(N-1)}(k, \theta)$		Вычисление следующего значения $S_N^{(N)}(k, \theta)$	
	Действительные умножения	Действительные сложения	Действительные умножения	Действительные сложения
ДПФ	$4N$	$4N$	$4N$	$4N$
Алгоритм Герцеля	$N+2$	$2N+1$	$N+2$	$2N+1$
Скользящее ДПФ-П $\theta = 0, 1/2$	$4N$	$4N$	4	4
Скользящее ДПФ-П $\theta \neq 0, 1/2$	$4N$	$4N$	6	5

Цифровая блочная обработка сигналов с накоплением (ЦБОН)

Предварительно рассмотрим алгоритм работы комплексных резонаторов, приведенных на рис. 2 и рис. 3. Обозначим их, соответственно, как комплексный резонатор № 1 (рис. 4 а) и комплексный резонатор № 2 (рис. 4 б). Указанные резонаторы отличаются друг от друга резонансными частотами, значения которых определяются соответственно значениями k и $(k + \theta)$.

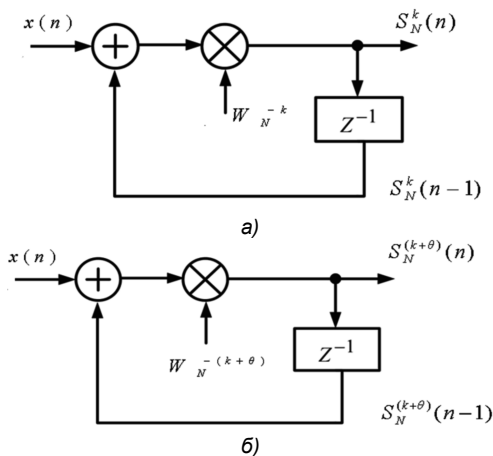


Рис. 4 Структуры комплексных резонаторов; а - резонатор №1; б - резонатор №2

Рассмотрим вычисление выходных отсчетов комплексного резонатора № 2 (рис. 4 б), как более общего случая (в дальнейшем изложении резонатор № 2 может обозначаться, если это не вызывает путаницы, как просто резонатор).

Согласно (7), значение k -го бина ДПФ-П описывается следующим соотношением:

$$S_N(k, \theta) = x(0) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 0} + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + \dots + x(N-2) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2)} + x(N-1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1)} \quad (10)$$

Комплексный резонатор № 2 является БИХ-фильтром, разностное уравнение которого имеет вид:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = W_N^{-(k+\theta)} [x(n) + S_N^{(k+\theta)}(n-1)], \quad (11)$$

где n - номер шага; $n = 0, 1, \dots$

Обозначив z -преобразование $x(n)$ и $S_N^{(k+\theta)}(n)$ через $X(z)$ и $Y(z)$ соответственно, выражение (11) представим в следующем виде: $Y(z) = W_N^{-(k+\theta)} \times (X(z) + z^{-1} \cdot Y(z))$. Тогда передаточная функция БИХ-фильтра (рис. 4, б) равна

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_N^{-(k+\theta)}}{1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}} \quad (11 а)$$

На N -ом шаге значение выходного отсчета комплексного резонатора задается соотношением

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = x(0) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot N} + x(1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N-1)} \dots + \dots + x(N-2) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot 2} + x(N-1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot 1} \quad (12)$$

Вынося в выражении (12) $W_N^{-(k+\theta) \cdot N}$ за скобки, а также учитывая, что $W_N^{-k \cdot N} = 1$ и $W_N^{-\theta \cdot N} = \exp(j2\pi\theta)$, получим

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = \exp(j2\pi\theta) [x(0) + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + \dots + x(N-2) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2)} + x(N-1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1)}] \quad (13)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (10), устанавливаем, что на шаге $n = (N-1)$ значение выходного отсчета рассматриваемого резонатора равно $S_N^{(k+\theta)}(n) = \exp(j2\pi\theta) S_N(k, \theta)$.

Таким образом, значение выходного отсчета БИХ-фильтра (рис. 4 б) отличается от значения k -го коэффициента ДПФ-П приращением фазы на $\phi = (j2\pi\theta)$. Это как раз тот «набег» фазы о котором говорилось во втором замечании по поводу предложенной Р. Лайонсом модификации алгоритма Герцеля. Очевидно также, что вычисление k -го коэффициента ДПФ-П с помощью БИХ-фильтра осуществляется ровно за столько же операций, что и вычисление k -го спектрального отсчета с помощью ДПФ-П «в лоб», т.е. выигрыша в числе операций нет! Умножив числитель и знаменатель передаточной функции (11 а) на $(1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)})$,

$$H(z) = \frac{W_N^{-(k+\theta)}}{1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}} =$$

$$= \frac{W_N^{-(k+\theta)} \cdot (1-z^{-1} \cdot W_N^{(k+\theta)})}{(1-z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}) \cdot (1-z^{-1} \cdot W_N^{(k+\theta)})} =$$

$$= \frac{W_N^{-(k+\theta)} - z^{-1}}{1-z^{-1} \cdot 2 \cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+\theta)\right] + z^{-2}},$$

приходим к обобщению структур БИХ-фильтров стандартного алгоритма Герцеля (рис. 1 а, б), – к структурам БИХ-фильтров, реализующих модифицированный алгоритм Герцеля. Нетрудно видеть, что модифицированный алгоритм Герцеля, также как и стандартный алгоритм Герцеля, дает существенную экономию в числе операций.

Рассмотрим работу резонатора № 2 на последующих шагах (т.е. после $(N-1)$ шага). Найдем выходной отсчет на $(N-1+m)$ -м шаге ($m=1, 2, 3, \dots$) БИХ-фильтра (рис. 4 б):

$$S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) = x(0) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} +$$

$$+ x(1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m-1)} \dots + x(N-3+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (3)} +$$

$$+ x(N-2+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (2)} + x(N-1+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (1)}.$$

Вынося в выражении (15) $W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)}$ за скобки и учитывая замечания, сделанные при выводе формулы (12), получим

$$S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) = \exp(j2\pi\theta) W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} \times$$

$$\times [x(0) + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + x(N-3+m) \times$$

$$\times W_N^{(k+\theta) \cdot (N-3+m)} + x(N-2+m) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2+m)} +$$

$$+ x(N-1+m) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1+m)}].$$

Согласно (7), значение k -го бина ДПФ-П при $n=0, N-1+m$ задается следующим соотношением:

$$S_{N+m}(k, \theta) = x(0) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot 0} + x(1) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot 1} \dots +$$

$$+ x(N-3+m) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-3+m)} + x(N-2+m) \times$$

$$\times W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-2+m)} + x(N-1+m) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-1+m)}.$$

Сравнивая соотношения (16) и (17), получим обобщение выражения (14):

$$S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) =$$

$$= \exp(j2\pi\theta) W_{N+m}^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} \cdot S_{N+m}(k, \theta).$$

Полученные результаты позволяют сделать ряд важных выводов.

1. Выходной отсчет резонатора № 1 ($\theta=0$) на шагах, удовлетворяющих соотношению $n=(s \cdot N-1)$, где $s=1, 2, \dots$, будет в точности равен $s \cdot k$ -му коэффициенту ДПФ:

$$S_N^k(s \cdot N-1) = S_{N \cdot s}(s \cdot k), \quad k = \overline{0, (N \cdot s-1)}. \quad (19 \text{ а})$$

Согласно (1), значение $(k \cdot s)$ -го бина ДПФ-П при длительности сигнала $(N \cdot s-1)$ отсчетов равно

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{n=0}^{(s \cdot N-1)} x(n) W_{N \cdot s}^{k \cdot s \cdot n} = \sum_{n=0}^{(s \cdot N-1)} x(n) W_N^{kn},$$

$$k = \overline{0, (N \cdot s-1)}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (19 \text{ б})$$

Так как дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ) (1):

$$def(k, n) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right),$$

обладают свойством периодичности

$$def(k, n \pm rN) = def(k, n), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

то сумму (19б) можно представить в виде s сумм:

$$S_{s \cdot N}(s \cdot k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) W_N^{kn} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N) W_N^{kn} + \dots + \sum_{n=0}^{N-1} x(n+(s-1) \cdot N) W_N^{kn}. \quad (20)$$

Следовательно, возможна своеобразная процедура блочной обработки отсчетов входного сигнала, которую авторы назвали **цифровой блочной обработкой с накоплением** (ЦБОН). Поясним пошагово процедуру ЦБОН.

1) Разбиваем исходный сигнал на s блоков по N отсчетов в каждом:

$$\text{Блок 1} \Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)],$$

$$\text{Блок 2} \Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)] \dots$$

$$\dots \text{Блок } s \Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N-1)].$$

2) Вычисляем k -ые коэффициенты ДПФ каждого блока согласно (1):

$$S_{N,1}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{kn},$$

$$S_{N,2}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+N) \cdot W_N^{kn}, \dots,$$

$$S_{N,s}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+(s-1) \cdot N) \cdot W_N^{kn},$$

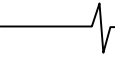
$$\text{где } W_N^{kn} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn).$$

3) Суммируем полученные значения k -х коэффициентов ДПФ:

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{i=1}^s S_{N,i}(k).$$

Полученный результат, в точности совпадает с m -м коэффициентом ДПФ ($m=(s \cdot k)$), в чем несложно убедиться.

Нетрудно видеть, что так как в алгоритме Герцеля обработка входного сигнала проводится блоками [4], при которой в начале обработки каждого блока в N отсчетов выполняется начальная установка («обнуление») всех внутренних регистров памяти (что и гарантирует устойчивость работы фильтра Герцеля), то формула (1) справедлива только при обработке алгоритмом Герцеля од-



ного блока данных в N отсчетов. Опираясь же на полученные результаты, можно выполнить **первое обобщение алгоритма Герцеля** для целых значений переменной k (т.е. когда $\theta = 0$), (переменная «отвечает» в фильтре Герцеля за частоту) введя процедуру ЦБОН.

Введенная авторами процедура ЦБОН позволяет фильтром Герцеля, обрабатывающим блоки по N отсчетов, вычислять значение ks -го бина Ns -точечного ДПФ. При этом обеспечивается:

- высокая разрешающая способность цифровой спектральной обработки за счет увеличения длительности обрабатываемого входного сигнала до Ns отсчетов;
- устойчивость работы фильтра, за счет выполнения «обнуление» всех внутренних регистров памяти в начале обработки каждого блока в N отсчетов.

Первый обобщенный алгоритм Герцеля можно реализовать в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рис. 5.

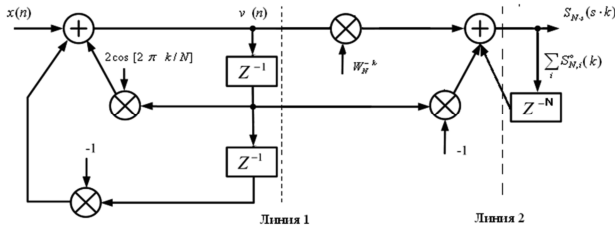


Рис. 5. Структура БИХ- фильтра, реализующего первый обобщенный алгоритм Герцеля

2. Выходной отсчет резонатора № 2 ($\theta \neq 0$) на шагах кратных $(N-1)$ не будет равен k -му коэффициенту ДПФ-П, задаваемому формулой (7):

$$S_{s \cdot N}(s \cdot k, s \cdot \theta) = \sum_{n=0}^{(s \cdot N-1)} x(n) W_N^{s \cdot (k+\theta)n} = \sum_{n=0}^{(s \cdot N-1)} x(n) W_N^{(k+\theta)n} \quad (21)$$

где $0 \leq \theta < 1$, $W_N^{(k+\theta)n} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n)$,

$k = \overline{0, s \cdot N - 1}$, $s = 1, 2, \dots$

так как параметрические дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ-П) (5)

$$def_p(k, n, \theta) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n\right],$$

не обладают свойством периодичности по переменной n :

$$def(k, n \pm rN, \theta) \neq def(k, n, \theta), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем, что и в этом случае, при определенной модификации метода ЦБОН, возможно применение процедуры блочной обработки. Обобщение ЦБОН основывается на том, что ДЭФ-П, не обладая свойством периодичности по переменной n , обладают более общим свойством, получившем название [10-12], «свойство **параметрической периодичности** ДЭФ-П по переменной n »:

$$def(k, n \pm rN, \theta) = def(k, n, \theta) W_N^{\pm \theta Nr}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Используя параметрическую периодичность ДЭФ-П, сумму (21) можно также представить в виде s сумм:

$$S_{s \cdot N}(s \cdot k, s \cdot \theta) = \exp(-j2\pi\theta) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n} + [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N) W_N^{(k+\theta)n} + \dots + [\exp(-j2\pi\theta)]^s \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n+(s-1) \cdot N) W_N^{(k+\theta)n} \quad (22)$$

Исходя из выражения (22), модифицированную цифровую блочную обработку с накоплением (МЦБОН) можно представить в виде выполнения следующих этапов.

Приведем пошагово процедуру модифицированной ЦБОН.

Разбиваем исходный сигнал на s блоков по N отсчетов в каждом:

Блок 1 $\Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)]$,

Блок 2 $\Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)]$, ...,

Блок s $\Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N-1)]$.

Вычисляем k -ые коэффициенты ДПФ-П каждого блока согласно (7):

$$S_{N,1}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n},$$

$$S_{N,2}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+N) \cdot W_N^{(k+\theta)n}, \dots,$$

$$S_{N,s}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+(s-1) \cdot N) \cdot W_N^{(k+\theta)n},$$

где $W_N^{(k+\theta)n} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n)$.

Проводим фазовые повороты k -ых коэффициентов ДПФ-П i -ых блоков путем их умножения на фазовый коэффициент $\{\exp(-j2\pi\theta)\}^i$:

$$S_{N,1}^\circ(k, \theta) = \exp(-j2\pi\theta) \cdot S_{N,1}(k, \theta),$$

$$S_{N,2}^\circ = [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \cdot S_{N,2}(k, \theta), \dots$$

$$S_{N,s}^\circ(k, \theta) = [\exp(-j2\pi\theta)]^s \cdot S_{N,s}(k, \theta).$$

Суммируем полученные значения k -ых коэффициентов ДПФ-П i -ых блоков:

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{i=1}^s S_{N,i}^\circ(k, \theta).$$

Полученный результат в точности совпадает с m -ым коэффициентом ДПФ-П (21) ($m = (s \cdot k, s \cdot \theta)$), в чем также несложно убедиться.

Предлагаемая авторами процедура модификации ЦБОН позволяет, обрабатывая модифицированным фильтром Герцеля блоки по N , выполнить **второе обобщение алгоритма Герцеля** для нецелых значений переменной $(k+\theta)$ (т.е. когда $\theta \neq 0$) и вычислять зна-

чение ks -го бина Ns -точечного ДПФ-П. При этом обеспечивается:

- высокая разрешающая способность цифровой спектральной обработки за счет увеличения длительности обрабатываемого входного сигнала до Ns отсчетов;
- устойчивость работы фильтра, за счет выполнения «обнуления» всех внутренних регистров памяти в начале обработки каждого блока в N отсчетов;
- полный контроль над резонансной частотой фильтра Герцеля.
- минимум времени цифровой обработки и объема необходимой памяти для ее осуществления

В заключении отметим, что цифровая блочная обработка сигналов с накоплением и ее модификация основаны соответственно на периодичности ДЭФ и параметрической периодичности ДЭФ-П, а также обеспечении «непрерывности» импульсной характеристики фильтра Герцеля $h(n)$.

Действительно, при использовании ЦБОН и целых значениях переменной k фильтр Герцеля будет иметь «непрерывную» импульсную характеристику бесконечной длительности в силу периодичности ДЭФ:

$$h(n) = \sum_{p=(s-1)N}^{(s \cdot N - 1)} \exp(j2\pi \cdot k \cdot n / N), \quad (23)$$

$$n = \overline{0, s \cdot N - 1}, \quad s = \overline{1, \infty}$$

Если же добавить к целому k некоторую дробную часть θ , то фильтр Герцеля будет иметь уже «кусочно-непрерывную» импульсную характеристику бесконечной длительности

$$h(n) = \sum_s [\exp(j2\pi\theta)]^s \times \sum_{p=(s-1) \cdot N}^{(s \cdot N - 1)} \exp(j2\pi(k + \theta) \cdot n / N), \quad (24)$$

$$n = \overline{0, s \cdot N - 1}, \quad s = \overline{1, \infty}.$$

Несложно заметить, что выражение (24) является обобщением выражения (23) и при $\theta = 0$ они равны. При обработке каждого блока данных в N отсчетов алгоритм Герцеля при наличии дробной части θ дает приращение фазы выходного отсчета фильтра на $\phi = j2\pi\theta$ (14). Чтобы обеспечить, в этом случае, «непрерывность» импульсной характеристики бесконечной длительности (24) необходимо после обработки каждого блока в алгоритме Герцеля не только выполнять начальную установку («обнуление») всех внутренних регистров памяти, гарантируя устойчивую работу фильтра Герцеля, но и осуществлять компенсацию приращения фазы путем умножения выходного отсчета фильтра Герцеля, на $\alpha = \exp(-j2\pi\theta)$ (соотношения (18), (19-22)).

Второй обобщенный алгоритм Герцеля можно реализовать в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рис. 6. Передаточная функция обобщенного фильтра Герцеля имеет ноль в точке $z = \exp[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ и два комплексно – сопряженных

полюса в точках $z = \exp[\pm j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ на z -плоскости (ноль и полюс в точке $z = \exp[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ компенсируют друг друга).

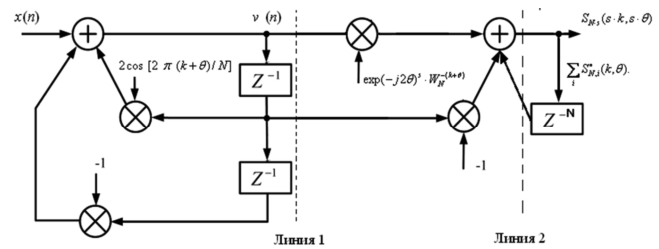


Рис.6. Структура БИХ - фильтра, реализующего второй обобщенный алгоритм Герцеля

Таким образом, при значении параметра $\theta = 0$ получаем первый обобщенный алгоритм Герцеля, а при значении параметра $\theta \neq 0$ – второй обобщенный алгоритм Герцеля. Соответственно и передаточные функции обобщенных фильтров Герцеля можно описать общим выражением. Они имеют при соответствующем значении параметра θ ноль в точке $z = \exp[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ и два комплексно – сопряженных полюса в точках $z = \exp[\pm j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ на z -плоскости (ноль и полюс в точке $z = \exp[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)]$ компенсируют друг друга).

Последовательность выполнения операций в обобщенных алгоритмах Герцеля и их число при длительности блока N отсчетов, числе блоков s аналогичны:

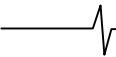
- операции слева от пунктирной линии 1 выполняются N раз для каждого блока;
- операции между линиями 1 и 2 выполняются один раз после обработки каждого блока;
- операции справа от пунктирной линии 2 выполняются s раз по числу блоков.

Рассмотрим обобщенный алгоритм СДПФ-П, который по сравнению со стандартным алгоритмом СДПФ-П, позволяет существенно сократить число операций, необходимых для выхода алгоритма на режим скользящего измерения.

Обобщение однобинового скользящего параметрического ДПФ

Как уже отмечалось, алгоритм СДПФ-П (и СДПФ) проигрывает алгоритму Герцеля в числе операций, которые необходимо выполнить для выхода на режим скользящего измерения (примерно в четыре раза по операциям действительных умножений и в два раза по операциям действительных сложений).

Идея обобщенного алгоритма СДПФ-П (ОСДПФ-П) заключается в том, что при проведении собственно скользящего измерения коэффициентов ДПФ-П действительной входной последовательности использовать для выхода на режим скользящего их измерения обобщенный алгоритм Герцеля, с последующим переходом от БИХ-фильтра к КИХ-фильтру.



Из предыдущего изложения непосредственно следует, что алгоритм Герцеля может интерпретироваться как реализация структуры комплексного резонатора № 2 в виде канонической формы БИХ-фильтра второго порядка. Поэтому сопоставляя: обобщенный алгоритм Герцеля (рис. 6), структуру комплексного резонатора № 2 (рис. 4 б), структуру фильтра СДПФ-П (рис. 3), с учетом разностного уравнения СДПФ-П (9), приходим к структуре фильтра однобинового обобщенного скользящего ДПФ-П, приведенной на рис. 7.

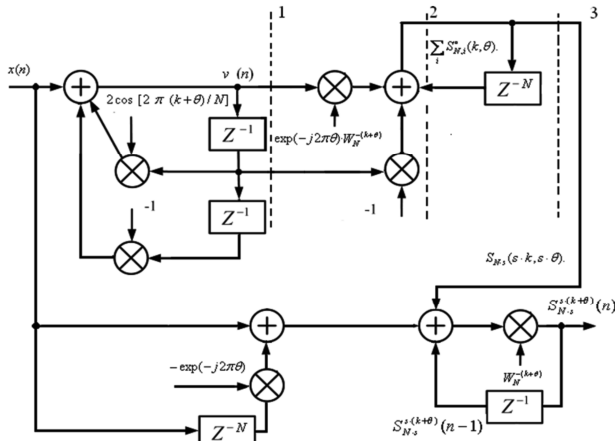


Рис.7. Структура фильтра, реализующего ОСДПФ-П на $(k + \theta)$ -ой частоте, $0 \leq \theta \leq 1$

Дадим краткие пояснения по работе алгоритма ОСДПФ-П. Операции в обратной цепи ОСДПФ-П-фильтра (слева от первой пунктирной линии) выполняются $N \cdot s$ раз (где s - число блоков в ЦБОН, выбирается исходя из обеспечения необходимой разрешающей способности спектрального анализа). Операции между первой и второй пунктирными линиями выполняются s раз (по числу блоков в ЦБОН). Операция между второй и третьей пунктирными линиями выполняется один раз. (эта операция заканчивает выход алгоритма СДПФ-П на режим скользящего измерения).

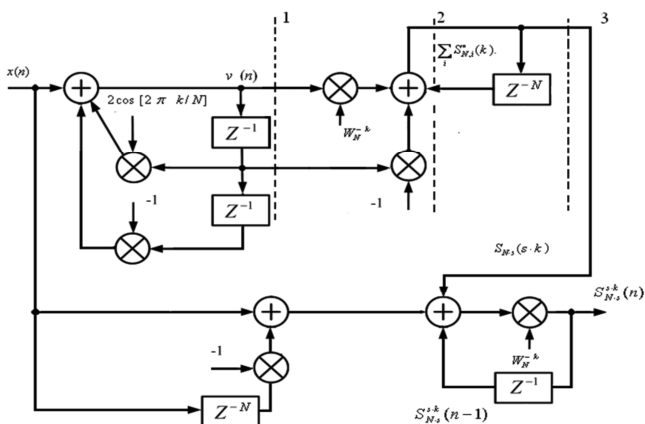


Рис. 8. Структура фильтра, реализующего ОСДПФ на k -ой частоте

В результате выполнения этой операции мы получаем отсчет $S_{N,s}(s \cdot k, s \cdot \theta)$, значение которого в точности равно $s \cdot k$ -му коэффициенту ДПФ-П последовательности $x(n)$ в окне длительностью $N \cdot s$ отчетов ($n = 0, N - 1$). Это значение является начальным (уста-

новившимся) значением для проведения скользящего измерения. Операции, выполняемые в фильтре ОСДПФ-П справа от третьей пунктирной линии, аналогичны операциям фильтра СДПФ-П (рис. 3).

Структура фильтра, реализующего обобщенный СДПФ (ОСДПФ) на k -й частоте, приведена на рис. 8.

Работа фильтра ОСДПФ аналогична работе фильтра ОСДПФ-П.

Заключение

В работе введена новая процедура цифровой блочной обработки, названная авторами процедурой цифровой блочной обработки с накоплением, на основе которой предложено два обобщения алгоритма Герцеля.

Первый обобщенный алгоритм Герцеля, в отличие от стандартного алгоритма Герцеля, позволяет одновременно обеспечить:

- высокую разрешающую способность цифровой спектральной обработки;
- устойчивость работы фильтра.

Второй обобщенный алгоритм Герцеля, сохраняя перечисленные преимущества, дает возможность осуществить полный контроль резонансной частоты фильтра Герцеля.

Обобщенные алгоритмы СДПФ и СДПФ-П, рассмотренные в статье, существенно сокращают, по сравнению с традиционными алгоритмами СДПФ и СДПФ-П, число операций, необходимых для выхода алгоритмов СДПФ и СДПФ-П на режим скользящего измерения. Выигрыш, который обеспечивают предложенные обобщенные алгоритмы СДПФ и СДПФ-П, составляет примерно в четыре раза по операциям действительных умножений и в два раза по операциям действительных сложений.

Кроме того, за счет применения в структурах ОСДПФ и ОСДПФ-П предложенных в работе обобщенных алгоритмов Герцеля (первого и второго соответственно), возможно достижение высокой разрешающей способности скользящего спектрального анализа при сохранении устойчивости работы фильтров.

Литература

1. Серебренников М.Г. Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. - М.:Наука, 1965. - 244 с.
2. Опенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1980. - 552 с.
3. Неразрушающий контроль. Справочник. В 8т. / Под общ. ред. В.В. Клюева-т.7; В 2 кн. - М.: Машиностроение, 2007. - 829 с.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. - М.: ООО «Бинум-Пресс», 2007. - 656 с.
5. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. - 2011. № 1. - С. 2-6.
6. Пономарева О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. - 2012. № 2. - С. 2-5.
7. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач

интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – АН СССР, 1984. Т.29. №8. – С. 1561-1570.

8. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия Вузов СССР, – Радиоэлектроника. Том XXVI, № 9, 1983. – С. 67-68.

9. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. № 4. – С. 2-7.

10. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. № 2. – С. 7-12.

11. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. №2 (16). – С. 36-41.

12. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автоматика. – СО АН СССР, 1983. №4. – С. 39-45.

13. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. № 2. – С. 10-15.

14. Алексеев В.А., Пономарев В.А., Пономарева О.В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. №2 (16). – С. 91-99.

15. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев В.А. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестник ИжГТУ. – 2013. №2. – С. 130-133.

16. Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. №2 (20). – С. 122-129.

17. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарев В.А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. №1 (21). – С. 41-46.

18. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. №9. – С. 18-21.

THE SUMMARY OF THE GOERTZEL ALGORITHM AND THE SLIDING PARAMETRIC DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V.

The basic methods of detecting individual tonal components and algorithms of their implementation were contemplated. The notion of a digital block processing with accumulation (DBPA) were defined, which allows to realize the DFT and DFT-P (parametric DFT) with increasing memory of data blocks (from block to block). A generalization of the algorithm of onebin sliding parametric discrete Fourier transform (SPDF -P) were suggested. Generalized algorithm (GSPDF -P), unlike algorithm SDPF -P, can significantly reduce the number of operations required to start a sliding mode measurements in this algorithm. A generalization of the Goertzel algorithm were described. Unlike standard Goertzel algorithm, generalized algorithm allows to increase by DBPA resolution spectral analysis, maintaining the stability of the filter and full control over its resonant frequency.

Уважаемые авторы!

Редакция научно-технического журнала «Цифровая обработка сигналов» просит Вас соблюдать следующие требования к материалам, направляемым на публикацию:

1) Требования к текстовым материалам и сопроводительным документам:

1. Текст - текстовый редактор Microsoft Word.
2. Таблицы и рисунки должны быть пронумерованы. На все рисунки, таблицы и библиографические данные указываются ссылки в тексте статьи.
3. Объем статьи до 12 стр. (ширифт 12). Для заказных обзорных работ объем может быть увеличен до 20 стр.
4. Название статьи на русском и английском языках.
5. Рукопись статьи сопровождается:
 - краткой аннотацией на русском и английском языках;
 - номером УДК;
 - сведениями об авторах (Ф.И.О., организация, должность, ученая степень, телефоны, электронная почта);
 - ключевыми словами;
 - актом экспертизы (при наличии в вашей организации экспертной комиссии).

2) Требования к иллюстрациям:

- Векторные (схемы, графики) - желательно использование графических редакторов Adobe Illustrator или Corel DRAW.
- Растровые (фотографии, рисунки) - М 1:1, разрешение не менее 300dpi, формат tiff, jpg.