УДК.691.396.96

СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ВЫХОДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Бартенев В.Г., *профессор кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики, д.т.н., e-mail: syntaltechno@mail.ru;*
Бартенев М.В., *аспирант Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики.*

Предложен метод нахождения вероятностных характеристик на выходе нелинейных устройств за счет использования эллиптических свойств некоторых распределений, например Гаусса, Лапласа и других. Эллиптическая симметрия таких двумерных распределений проявляется в форме сечений на плоскости, имеющих вид эллипса. Свойства эллиптической симметрии могут существенно упростить нахождение двумерных распределений на основе их одномерных прототипов. Эти свойства и положены в основу предложенного метода, который иллюстрируется нахождением вероятностных характеристик на выходе умножителя-накопителя, для которого удалось достаточно просто рассчитать аналитически значения порогов для низких значений вероятности ложной тревоги при малом числе накоплений, когда выходное распределение существенно отличается от нормального.

Ключевые слова: эллиптическая симметрия двумерных распределений, вероятностные характеристики на выходе нелинейных устройств, вероятность правильного обнаружения, вероятность ложной тревоги, умножитель-накопитель.

Введение

В случае нелинейных преобразований принимаемых сигналов возникают большие трудности при нахождении аналитических выражений для расчета характеристик обнаружений таких систем. С этой целью прибегают к статистическому моделированию. Но вычисление порогов для малых значений вероятностей ложных тревог не обеспечивает требуемую точность расчетов. В настоящей работе предложен метод преодоления указанных трудностей за счет использования эллиптических свойств некоторых распределений на выходе нелинейных систем.

Определение для распределений с эллиптической симметрией

При рассмотрении двумерных распределений вероятности $P(x,y)$ эллиптическая симметрия проявляется в форме сечений на плоскости x,y имеющих вид эллипса. В частности для Гауссова распределения эллиптическая симметрия проявляется в том, что переменные x,y входят в двумерную функцию в следующем виде:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\rho}\ ,$$

где ρ – коэффициент корреляции.

Таким образом, эллиптическая симметрия может быть определена через двумерную плотность распределения и представлена как:

$$p_2(x, y) = f(R, \rho)\ .$$

Например, для Гауссова распределения

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-x^2/2\sigma^2);$$

$$p_2(x, y) = f(R, \rho) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{(1-\rho^2)}} \times$$

$$\times \exp(-R^2/2\sigma^2(1-\rho^2)).$$

В частности, для некоррелированных x, y эллиптическая симметрия превращается в круговую симметрию. Свойство эллиптической симметрии может быть эффективно использовано для нахождения двумерных распределений на выходе нелинейных устройств.

Вероятность превышения порога огибающей шума на выходе умножителя

В качестве примера упрощенного способа нахождения двумерного распределения рассмотрим нелинейное устройство типа умножителя-накопителя, алгоритм работы которого может быть представлен в следующем виде [1]:

$$R = \left|\sum_{j=1}^{N} Z1_j * Z2_j^*\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{N} x1_j * x2_j + y1_j * y2_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{N} x2_j * y1_j - x1_j * y2_j\right)^2},$$

где R – огибающая сигнала на выходе умножителя–накопителя, N – число накоплений. $Z1_j = x1_j + iy1_j$, $Z2_j = x2_j + iy2_j$ комплексные выборки наблюдений на входе умножителя-накопителя.

Для нахождения распределения R нужно было бы воспользоваться исходным четырехмерным Гауссовым распределением $p_4(x_{1j}, y_{1j}, x_{2j}, y_{2j})$. Мы же используем более простой способ нахождения распределение R на основе свойства эллиптической симметрии распределения на выходе умножителя-накопителя. При этом пороги для заданной вероятности ложной тревоги при воздействии белого шума найдем аналитически, а вероятность правильного обнаружения коррелированного шума рассчитаем методом моделирования в среде МАТЛАБ.

Начнем с простейшего случая, когда после перемножения не производится накопления, т.е. $N = 1$. Для белого шума $\rho = 0$, тогда распределение произведения случайных сигналов с Гауссовым распределением с нулевым средним и единичной дисперсией $r = x1 * x2$ можно получить методом функционального преобразования из исходного двумерного распределения:

$$p_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)/2)$$, переходя к $x_1 = r / x_2$

$$p(r) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_2}{x_2} \exp(-(r^2 / x_2^2 + x_2^2)/2) = \\ = \frac{K_0(r)}{\pi}.$$

Полученное распределение, выраженное через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка $K_0(r)$ (функция Макдональда), относится к частному случаю распределения Лапласа, обладающего свойством эллиптической симметрии [2]. Воспользуемся этим свойством.

Для этого сначала найдем характеристическую функцию от полученного одномерного распределения

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(r) e^{iur} \frac{dr}{\pi} = 1 / \sqrt{1 + u^2},$$ тогда двумерное распределение огибающей и фазы на выходе умножителя из одномерного, в соответствии с рекомендацией [2], может быть получено следующим образом

$$p(R, \theta) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(Ru) \frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = \\ = \frac{K_0(R)}{2\pi}.$$

Усредняя по фазе θ от 0 до 2π, получаем распределение огибающей шума на выходе умножителя

$$p(R) = RK_0(R).$$

Вероятность превышения порога L огибающей R можно получить, интегрируя

$$F(L) = \int_{L}^{\infty} RK_0(R) dR = LK_1(L).$$

Для проверки полученного выражения сравнивались аналитические расчеты в среде МАТЛАБ с помощью функции besselk (1,L), протестированной с помощью справочника [3], и полученные моделированием умножителя. Результат представлен в виде графика на рис.1, который подтверждает совпадение моделирования и аналитических расчетов.

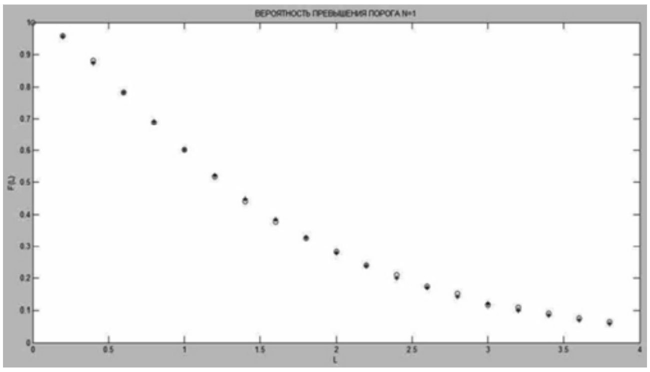

Рис.1 Вероятности превышения порога L огибающей шума для N=1 для моделирования (о) и аналитически(*).

Вероятность превышения порога огибающей шума на выходе умножителя-накопителя

Усложним задачу, рассмотрев дополнительно накопление после умножителя. Используем туже методику на основе свойств эллиптической симметрии распределений. Усложнение отразится на характеристической функции, которая теперь для независимых N множителей будет представлять произведение N характеристических функций, т.е.

$$\phi_N(u) = 1 / (\sqrt{1 + u^2})^N .$$

Тогда распределение огибающей на выходе умножителя-накопителя будет получено в следующем виде

$$p_N(R) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} J_0(Ru) \frac{udu}{(\sqrt{1 + u^2})^N} = \\ = \frac{R^{N-1} K_{N-1}(R)}{2^{N-1} \Gamma(N)}.$$

Откуда вероятность превышение порога L имеет следующий вид

$$F(L) = \int_{L}^{\infty} \frac{R^{N-1} K_{N-1}(R)}{2^{N-1} \Gamma(N)} dR = \\ = \frac{L^N K_N(L)}{2^{N-1} \Gamma(N)}.$$

Для проверки полученного выражения сравнивались аналитические расчеты в среде МАТЛАБ с помощью функции besselk (N, L) протестированной с помощью справочника [3], и статистическим моделированием умножителя-накопителя. Результаты представлены в виде графиков для N=4 (рис. 2) и N=8 (рис. 3), которые подтверждают совпадение моделирования и аналитических расчетов для произвольного N.

Для вероятности ложной тревоги 10^{-4} были рассчитаны аналитически пороги для N=1, L=10,65; для N=4, L=15,7; для N=8, L=20,1. Характеристики обнаружения коррелированного шума с коэффициентами корреляции

0,9 и 0,5 были рассчитаны статистическим моделированием в среде МАТЛАБ.

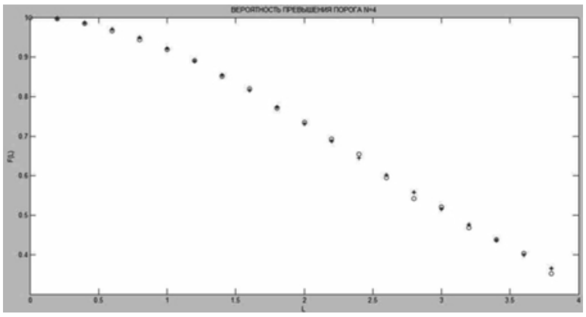

Рис.2. Вероятности превышения порога L огибающей шума для N=4 для моделирования (o) и аналитически(*)

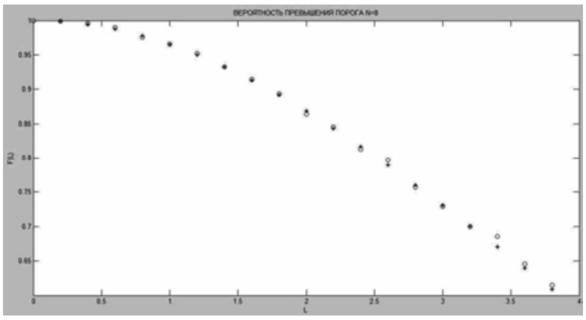

Рис.3. Вероятности превышения порога L огибающей шума для N=8 для моделирования (o) и аналитически(*)

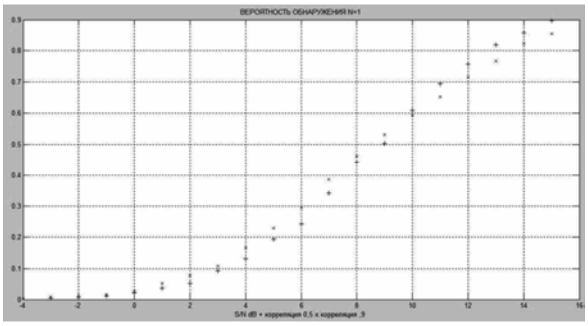

Рис.4. Вероятности правильного обнаружения огибающей коррелированного (коэффициент корреляции 0,9 –(x), коэффициент корреляции 0,5 –(+) шума для N=1 для вероятности ложной тревоги 10^{-4}

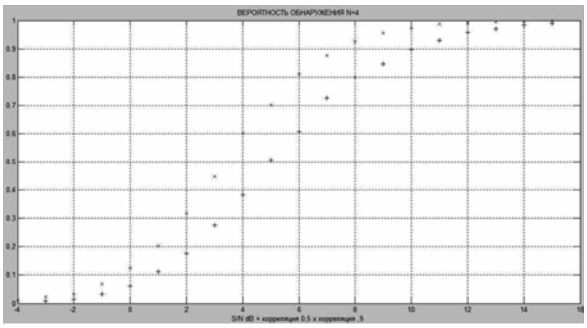

Рис.5. Вероятности правильного обнаружения огибающей коррелированного (коэффициент корреляции 0,9 – (x), коэффициент корреляции 0,5 – (+) шума для N=4 для вероятности ложной тревоги 10^{-4}

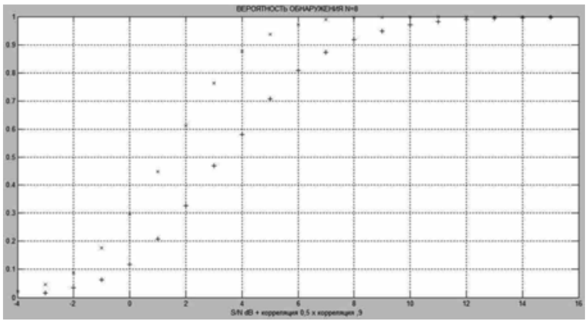

Рис.6. Вероятности правильного обнаружения огибающей коррелированного (коэффициент корреляции 0,9 – (x), коэффициент корреляции 0,5 – (+) шума для N=8 для вероятности ложной тревоги 10^{-4}

Заключение

Используя свойства эллиптической симметрии распределения на выходе умножителя-накопителя, удалось достаточно просто рассчитать аналитически значения порогов для малых значений вероятности ложной тревоги при числе накоплений (2-8), при котором выходное распределение существенно отличается от нормального. Вычисление вероятности правильного обнаружения коррелированного шума произведено методом статистического моделирования в среде МАТЛАБ. Показано, что выигрыш в пороговом сигнале для вероятности правильного обнаружения 0,5 и вероятности ложной тревоги 10^{-4} за счет увеличения числа накоплений коррелированного шума с коэффициентом корреляции 0,5-0,9 с N=2 до N=8 составляет около 4дБ.

Литература

1. Бакулев П.А. Радиолокационные системы. – М.: Радиотехника, 2007.

2. Fang K., Kotz S. Symmetric Multivariate and Related Distributions, Chapman & Hall, 1990.

3. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М. Наука, 1979.

A NEW METHOD OF FINDING PROBABILITY CHARACTERISTICS IN THE OUTPUT OF NONLINEAR SYSTEMS

Bartenev V.G., Bartenev M.V.

The paper presents a new method of finding probability characteristics in the output of nonlinear systems using elliptical properties of some distributions. Elliptically symmetric distributions are second-order distributions with probability densities whose contours of equal height are ellipses. This class includes the Gaussian, Laplace distributions and others which can be generated from certain first-order distributions. Such desirable features for the description of the second-order statistics may be used in the transformation analysis of a random signal by the nonlinear devices. These elliptically symmetric distributions simplify the evaluation of the output probability characteristics. That is the base of the suggested method in this paper which is illustrated by real losses of detection with analytically developed low false alarm rate of nonlinear multiplier with small integrated samples when the output distribution differs substantially from Gaussian.