

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ БИФАЗНЫХ И ЧЕТЫРЕХФАЗНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ФАЗАМИ

*Потехин Е.Н., аспирант Поволжского государственного технологического университета, e-mail: potegor@yandex.ru;*

*Научный руководитель - Леухин А.Н., д.ф.-м.н., зав. кафедрой информационной безопасности Поволжского государственного технологического университета, e-mail: code@marstu.net.*

**Ключевые слова:** унимодулярная последовательность, бифазная, четырехфазная, иррациональная фаза, корреляция, боковые лепестки.

### Введение

Кроме унимодулярных периодических последовательностей с одноуровневой корреляцией, можно построить периодические последовательности, которые имеют двухуровневую периодическую автокорреляционную функцию.  $r_\tau(a)$  для всех  $\tau$ , удовлетворяющих условию  $0 < \tau \leq N-1$ , где  $N$  – длина последовательности. Такие последовательности называют *почти идеальными*. Данный термин был использован в разных значениях в работах [1] и [2] и исследован в работах [3] и [4].

Критерии оптимальности для унимодулярных циклических последовательностей с двухуровневой автокорреляционной функцией были показаны Арасу в работе [5] для всех  $\tau \neq 0 \pmod N$ :

$$\begin{aligned} r_\tau(\gamma) &\in (0, 4) \text{ или } (0, -4), \text{ если } n = 0, \\ r_\tau(\gamma) &\in (1, -3), \text{ если } n = 1 \pmod 4, \\ r_\tau(\gamma) &\in (2, -2), \text{ если } n = 2 \pmod 4, \\ r_\tau(\gamma) &\in (-1, 3), \text{ если } n = 3 \pmod 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Непрерывным понятием последовательностей с двухуровневой автокорреляционной функцией является понятие *почти разностного множества*.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – аддитивная абелева группа порядка  $v$ . Тогда, подмножество  $D$  группы  $G$  называется  $(v, k, \lambda, s)$  – *почти разностным множеством* группы  $G$ , если  $d_D(\tau)$  принимает значение  $\lambda$  ровно  $s$  раз и значение  $\lambda + 1$  – ровно  $v-1-s$  раз.

Для бинарных последовательностей с двухуровневой автокорреляцией в работе [5] доказана теорема о соответствующих им почти разностных множествах.

**Теорема 2.** Пусть  $a$  – бинарная последовательность периода  $N$  и пусть доступно  $D = (0 \leq i \leq N-1) : a_i = 1$ .

Пусть  $N \equiv 3 \pmod 4$ . Тогда  $r_\tau(a) = -1$  для всех  $\tau \neq 0 \pmod 4$ , если  $D$  является  $\left(N, \frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{4}\right)$  или  $\left(N, \frac{N-1}{2}, \frac{N-3}{4}\right)$  разностным множеством в  $\mathbb{Z}_N$ .

Предложен метод построения бифазных унимодулярных последовательностей на основе периодических оптимальных бинарных последовательностей с двухуровневой автокорреляционной функцией. Показана зависимость уровня боковых лепестков от длины последовательности. Предложен метод построения четырехфазных последовательностей с идеальной ПАКФ на основе четвертичных оптимальных последовательностей.

Пусть  $N \equiv 1 \pmod 4$ . Тогда  $r_\tau(a) \in (1, -3)$  для всех  $\tau \neq 0 \pmod 4$ , если  $D$  является  $\left(N, k, k - \frac{N+3}{4}, Nk - k^2 - \frac{(N-1)^2}{4}\right)$  почти разностным множеством в  $\mathbb{Z}_N$ .

Пусть  $N \equiv 2 \pmod 4$ . Тогда  $r_\tau(a) \in (2, -2)$  для всех  $\tau \neq 0 \pmod 4$ , если  $D$  является  $\left(N, k, k - \frac{N+2}{4}, Nk - k^2 - \frac{(N-1)(N-2)}{4}\right)$ . почти разностным множеством в  $\mathbb{Z}_N$ .

Пусть  $N \equiv 0 \pmod 4$ . Тогда  $r_\tau(a) \in (0, -4)$  для всех  $\tau \neq 0 \pmod 4$ , если  $D$  является  $\left(N, k, k - \frac{N+1}{4}, Nk - k^2 - \frac{(N-1)N}{4}\right)$  почти разностным множеством в  $\mathbb{Z}_N$ .

Бинарные последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_\tau(a) \in (0, -4)$  были описаны в работах следующих авторов: Сидельникова, Лемпела, Кона и Эстмэна [6, 7], Арасу, Динга, Хеллесета, Кумара и Мартинсена [8], Ю и Гонга [9], Танга и Гонга [10].

Бинарные последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_\tau(a) \in (1, -3)$  были описаны в работах следующих авторов: Лежандра [11], Динга, Хеллесета и Лама [12], Динга (последовательности двух простых) [13, 14].

Бинарные последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_\tau(a) \in (2, -2)$  были описаны в работах следующих авторов: Сидельникова, Лемпла, Кона и Эстмэна [6, 7], Динга, Хеллесета и Мартинсена [15], Но, Чунга, Сонга, Янга, Ли и Хеллесета [16].

Бинарные последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_{\tau}(a) \in (1, -3)$  были описаны в работах следующих авторов: Танга, Гонга [17].

Кроме этого, существует достаточно большое количество последовательностей, которые были синтезированы методами перебора при помощи средств вычислительной техники, но регулярные алгоритмы их построения остаются не известными.

Впервые в 1970 году, в книге Амиантова [18] было показано, что если в бинарной последовательности с одноуровневой периодической АКФ (с уровнем боковых лепестков  $a = -1$ ) произвести замену символов  $\gamma_n = -1$  на символы

$$\gamma_n = \exp(i\varphi), \cos(\varphi) = \frac{N-1}{N+1} \quad (2)$$

то можно получить бифазную последовательность (фазовый алфавит содержит лишь 2 символа

$$A(a) = \left\{ 0; \pi \pm \arccos\left(\frac{N-1}{N+1}\right) \right\}$$

с идеальной периодической АКФ. Такие последовательности были названы последовательностями с непротивоположными символами. Позднее в 1992 году в работе [19] эти последовательности были заново переоткрыты, а в 2007 году в работе [20] была выведена формула преобразования для любого заданного уровня боковых лепестков.

Бинарную периодическую последовательность с двухуровневой автокорреляционной функцией, где  $r_{\tau}(\gamma) \in (1, -3)$ ,  $0 < \tau \leq N-1$ , можно преобразовать в бифазную последовательность с одноуровневой по модулю автокорреляционной функцией, то есть  $r_{\tau}(\gamma) \in (+PSL, -PSL)$ ,  $0 < \tau \leq N-1$ . Для этого необходимо воспользоваться формулой заменой второго символа алфавита, аналогично замене, применяемой для унимодулярных бинарных последовательностей с одноуровневой АКФ.

$$\varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{N-1}{N+1}\right). \quad (3)$$

Отличие состоит в том, что получаемый при этом уровень корреляции равен не нулю, как для периодических бинарных последовательностей с одноуровневой автокорреляционной функцией ( $PSL = -1$ ), а принимает значение

$$|PSL| = \frac{2N}{N+1}, \quad (4)$$

где  $N$  – либо длина последовательности с двухуровневой автокорреляционной функцией, либо длина последовательности, лежащей в ее основе.

**Пример 1.** Пусть  $a$  – последовательность Лежандра длины  $N = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ . Тогда квадратичными вычетами будут элементы на позициях 1, 3, 4, 9, 10 и 12, а квадратичными невычетами элементы на позициях 2, 5, 6, 7, 8 и 11. Тогда последовательность Лежандра будет равна

$$a = 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1,$$

а ее периодическая автокорреляционная функция

$$r(a) = 13, 1, -3, 1, 1, -3, -3, -3, 1, 1, -3, 1.$$

Заменим фазу -1 выбранной последовательности на

иррациональную фазу  $\varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{N-1}{N+1}\right)$ , где

$$N = 13. \text{ Тогда } \varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{12}{14}\right) = 148.997^\circ. \text{ Учитывая,}$$

что  $e^{i\varphi} = e^{i148.997} = -0,857 + 0,515i$ , получим унимодулярную бифазную последовательность

$$b = 1, 1, -0,857 + 0,515i, 1, 1, -0,857 + 0,515i, -0,857 + 0,515i$$

$$-0,857 + 0,515i, -0,857 + 0,515i, 1, 1, -0,857 + 0,515i, 1$$

с одноуровневой по модулю периодической автокорреляционной функцией, боковой лепесток которой по модулю равен

$$|PSL| = \frac{2 \cdot 13}{13+1} = 1,857.$$

$$r(b) = 13, 1,857 - 1,857i, 1,857, -1,857,$$

$$-1,857, -1,857, -1,857, -1,857, -1,857, -1,857, -1,857.$$

Иначе обстоит дело с бинарными последовательностями, имеющими периодическую автокорреляционную функцию  $r_{\tau}(a) \in (0, -4)$ . Для их преобразования необходимо заменить одну из фаз ( $\pi$ ) на значение

$$\varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{N-2}{N+2}\right). \quad (5)$$

В этом случае модуль значения уровней боковых лепестков будет равен

$$|PSL| = \frac{2N}{N+2}. \quad (6)$$

**Пример 2.** Пусть  $a$  – последовательность Сидельникова-Лемпела-Кона-Эстмэна длины  $N = 28$ .

$$a = 11-1-11-1-1-1-1-1111-1-11-111-11-1111-1-1,$$

а ее периодическая автокорреляционная функция

$$r(a) = 28, 0, -4, 0, -4, 0, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, -4, 0, -4, 0.$$

Заменим фазу -1 выбранной последовательности на

иррациональную фазу  $\varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{N-2}{N+2}\right)$ , где

$$N = 28. \text{ Тогда } \varphi = \pi \pm \arccos\left(\frac{26}{30}\right) = 150.074^\circ. \text{ Учитывая,}$$

что  $e^{i\varphi} = e^{i150.074} = -0,867 + 0,499i$ , получим унимодулярную бифазную последовательность

$$b = 1, 1, -0,867 + 0,499i, -0,867 + 0,499i, 1, -0,867 + 0,499i, -$$

$$-0,867 + 0,499i, -0,867 + 0,499i, -0,867 +$$

$$+0,499i, 1, 1, 1, 1, -0,867 + 0,499i - 0,867 +$$

$$+0,499i, -0,867 + 0,499i, 1, 1, -0,867 + 0,499i, 1, -$$

$$-0,867 + 0,499i, 1, 1, 1, -0,867 + 0,499i, -0,867 + 0,499i$$

с одноуровневой по модулю периодической автокорреляционной функцией, боковой лепесток которой по модулю равен

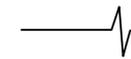
$$|PSL| = \frac{2 \cdot 28}{28+2} = 1,867.$$

$$r(b) = 28, 1,867, -1,867, 1,867 - 1,867i, 1,867, 1,867, 1,867, 1,867, 1,867,$$

$$-1,867, 1,867, 1,867, 1,867, -1,867, 1,867, 1,867, 1,867, -1,867,$$

$$1,867, 1,867, 1,867, 1,867, 1,867, -1,867, 1,867, -1,867, 1,867.$$

Стоит отметить два момента. Во-первых, новые последовательности имеют одинаковый по модулю, но противоположенный по знаку уровень боковых лепест-



ков. Вследствие этого нет смысла производить изменение фаз вышеприведенным способом для бинарных последовательностей с уровнем боковых лепестков  $r_t(a) \in (2, -2)$ . Во-вторых, подобное преобразование стремится к уровню боковых лепестков  $r_t(a) \in (2, -2)$ ,

поскольку  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{N+2} = 2$ . Но это спра-

ведливо лишь для сбалансированных последовательностей, в противном случае модуль уровня боковых лепестков растет. Последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_t(a) \in (3, -1)$  оказались несбалансированными, поэтому найденные формулы не дают для них уровня, близкого к  $r_t(a) \in (2, -2)$ .

С ростом длины последовательности  $N$  модуль боковых лепестков все больше приближается к числу 2. Поэтому последовательности малых периодов предпочтительнее с точки зрения критерия максимального бокового лепестка. На рис. 1 представлены зависимости абсолютного значения боковых лепестков от периода последовательности.

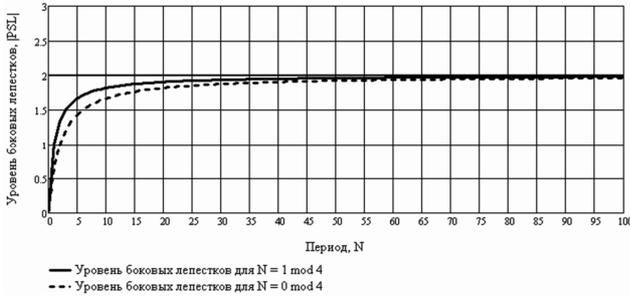


Рис. 1. Зависимость абсолютного значения боковых лепестков от периода последовательности

Кроме бинарных унимодулярных последовательностей с двухуровневой автокорреляционной функцией существует целый класс четвертичных оптимальных последовательностей с двухуровневой автокорреляцией, которые можно преобразовать в идеальные четырехфазные последовательности. Построение четвертичных последовательностей с оптимальными характеристиками  $r_t(\gamma) \in (0, -2)$  описано в работах следующих авторов: Джанг, Ким, Ким, Но [21], Ким, Джанг, Ким, Но [22-23], Лим, Но [24]. В работе Янга и Ке описываются четвертичные последовательности с уровнем боковых лепестков  $r_t(\gamma) \leq \sqrt{5}$ .

Для того чтобы четвертичные последовательности с оптимальными корреляционными характеристиками превратить в четырехфазные последовательности с идеальными корреляционными характеристиками, их нужно некоторым образом модифицировать, изменив значения, по крайней мере, двух фаз.

Рассмотрим подобную модификацию на примере четвертичных последовательностей, приведенных в работе [22]. Пусть  $b_0(t)$  и  $b_1(t)$  – бинарные последовательности периода  $p = 1(\text{mod})4$ , определенные следующим образом:

$$b_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t = 0, \\ 0, & \text{для } t \in QR, \\ 1, & \text{для } t \in QNR. \end{cases} \quad (7)$$

$$b_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t = 0, \\ 0, & \text{для } t \in QR, \\ 1, & \text{для } t \in QNR. \end{cases} \quad (8)$$

где  $QR$  и  $QNR$  – множества квадратичных вычетов и квадратичных невычетов на множестве чисел по модулю  $p$ . Тогда  $b_0(t)$  имеет больше нулей, чем единиц и  $b_1(t)$  – больше единиц, чем нулей. Пусть  $s_0(t)$  и  $s_1(t)$  – две бинарные последовательности периода  $2p$ , определяемые как

$$s_0(t) = \begin{cases} b_0(t), & \text{для } t \equiv 0 \pmod{2} \\ b_1(t), & \text{для } t \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (9)$$

$$s_1(t) = \begin{cases} b_0(t), & \text{для } t \equiv 0 \pmod{2} \\ b_1(t) \oplus 1, & \text{для } t \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (10)$$

где  $\oplus$  означает сложение по модулю 2. Тогда четвертичная последовательность периода  $2p$  определяется как

$$q(t) = \phi(s_0(t), s_1(t)) \quad (11)$$

где  $\phi(s_0(t), s_1(t))$  – обратное преобразование Грэя, определяемое как

$$\phi[a, b] = \begin{cases} 0, & \text{если } (a, b) = (0, 0) \\ 1, & \text{если } (a, b) = (0, 1) \\ 2, & \text{если } (a, b) = (1, 1) \\ 3, & \text{если } (a, b) = (1, 0) \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя вместо 0, 1, 2, 3 фазы  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,

$\varphi_3 = \pi$  и  $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$  получаем четвертичную последовательность с уровнем боковых лепестков  $r_t(\gamma) \in (0, -2)$ .

Решая систему уравнений, которая строится на основании периодической автокорреляционной функции, можно получить следующие модифицированные значения фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_4$ :

$$\varphi_1 = a \cos \left( \frac{N/2 - 1}{N/2 + 1} \right), \quad (13)$$

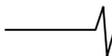
$$\varphi_4 = \frac{3\pi}{2} a \cos \left( \frac{N/2 - 1}{N/2 + 1} \right). \quad (14)$$

**Пример 3.** Пусть  $p = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ ,  $N = 2p = 26$ . Тогда  $b_0(t)$  и  $b_1(t)$  в соответствии с (7) и (8) будут равны:

$$b_0 = 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0$$

$$b_1 = 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0$$





18. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. – М.: Сов. радио, 1971, 416 с.

19. Golomb S. W. Two-valued sequences with perfect periodic autocorrelation// IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, March 1992, V. 28, № 2, pp. 383–386.

20. Леухин А.Н., Тюкаев А.Ю., Бахтин С.А. Синтез и анализ сложных фазокодированных последовательностей// Электромагнитные волны и электронные системы, 2007, Т. 12, №4, с. 32-37.

21. J.-W. Jang, Y.-S. Kim, S.-H. Kim, and J.-S. No, New quaternary sequences with ideal autocorrelation constructed from binary sequences with ideal autocorrelation, in ISIT 2009, Seoul, Korea, 2009, pp. 278-281.

22. Y.-S. Kim, J.-W. Jang, S.-H. Kim, and J.-S. No, New construction of quaternary sequences with ideal autocorrelation from Legendre sequences, in ISIT 2009, Seoul, Korea, 2009, pp. 282-285.

23. Y.-S. Kim, J.-W. Jang, S.-H. Kim, and J.-S. No, New quaternary sequences with optimal autocorrelation, in ISIT

2009, Seoul, Korea, 2009, pp. 286-289.

24. T. Lim, J.S. No. New Construction of Quaternary Sequences With Ideal Autocorrelation and Balance Property, ICTC 2010, 2010, Vol. 1, pp. 395-396.

25. Тематический сайт, посвященный синтезу сигналов и их применению [Электронный ресурс]. Дата обновления: 20.06.2012. – URL: <http://signalslab.marstu.net> (дата обращения: 20.06.2012).

## METHODS OF CONSTRUCTIONS BIPHASE AND FOUR-PHASE UNIMODULAR PERIODIC SEQUENCES WITH IRRATIONAL PHASES

*Potekhin E.N., Supervisor: Leukhin A.N.*

Gives method of a biphaseunimodular sequences construction based on periodical binary sequences with optimal two-level autocorrelation function. The dependence of sidelobeslevel on the length of the sequence is shown. Gives method of a four-phase sequences construction with ideal PACF based on quaternary optimal sequences.



## SAMSUNG ELECTRONICS ПРИГЛАШАЕТ НА РАБОТУ ПРОГРАММИСТОВ, МАТЕМАТИКОВ, ИНЖЕНЕРОВ

Samsung Electronics Co., Ltd. – мировой лидер в разработке цифрового, телекоммуникационного и полупроводникового оборудования – приглашает на работу разработчиков, программистов и инженеров в исследовательские центры компании в Республике Корея (Южная Корея).

Особый интерес представляют специалисты следующих направлений:

- **Разработка программного обеспечения, информационная безопасность, криптография** (C/C++, Linux, Embedded Linux, Android, Java, RTOS, UI, RTOS, Security)
- **Разработка мобильных устройств, мультимедийных систем, цифровая обработка сигналов** (Smartphone, Messaging, Multimedia, Streaming, RIL, DSP)
- **Разработка систем цифрового телевидения** (Digital TV, Set-Top Box, FPGA, Verilog HDL, SoC, 3D Display, Metamaterials)
- **Разработка антенных устройств, радиоэлектронных систем, устройств для телекоммуникации и сетевых технологий** (Antenna Design, ASIC Design, Integrated Circuits, FPGA, HW / SW Co-Design, System LSI, TCP / IP Protocol, VoIP, OFDM-MIMO)

Требования к кандидатам:

- Образование: высшее / ученая степень кандидата технических / физико-математических наук в области программирования, кибернетики, прикладной математики, телекоммуникаций, радиоэлектроники, полупроводниковой физики, наук о материалах, химии;
- Опыт работы: научная / исследовательская работа / прикладные разработки (**по одному из вышеперечисленных направлений**) НЕ МЕНЕЕ 3~5 ЛЕТ;
- Английский язык: хорошее владение английским языком (устным и письменным).

Дополнительная информация: <http://JOB.samsung.ru>

Электронная почта: [JobFair@samsung.com](mailto:JobFair@samsung.com)