

О КОРРЕЛЯЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ В НЕПРЕРЫВНОЙ ОБЛАСТИ

Радченко Ю. С., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры радиоп физики, Воронежский государственный университет, e-mail: ysradchenko@yandex.ru

Миляев С.В., аспирант кафедры радиоп физики, Воронежский государственный университет, e-mail: sergey.milyaev@mail.ru

Ключевые слова цифровая обработка изображений, сжатие сигналов, обобщенный ряд Фурье, корреляция спектральных коэффициентов.

Введение

Современные алгоритмы сжатия изображений, как правило, реализуют следующую последовательность операций – ортогональное преобразование, квантование спектров, энтропийное кодирование. Величина корреляции спектральных мод позволяет оценить насколько оптимальным является выбранный базис по степени декорреляции коэффициентов преобразования [1, 2]. При внутрикадровом предсказании знание корреляции спектральных коэффициентов соседних блоков позволяет строить более эффективный прогноз [3]. Знание величины корреляции спектральных мод ортогональных базисов необходимо для расчета количества информации в сигнале и оценки максимального коэффициента сжатия изображения [1, 4]. В большинстве работ основное внимание уделяется либо построению статистической модели коррелированных полей применительно к реальным изображениям [1, 2, 5], либо даются оценки энтропии сжатого изображения для некоторых дискретных ортогональных преобразований [4]. Задача оценки корреляции спектральных мод возникает, например, в адаптивной оптике при анализе волновых фронтов [6]. Применяемые для ее решения базисы: Карунена-Лоэва, Цернике – ориентированы на статистический анализ искажений фронтов в турбулентной атмосфере. Однако, цифровая обработка изображений потребовала привлечения иных базисов [7, 8], для которых упомянутая задача не решена. В данной работе рассчитаны значения коэффициентов корреляции для спектров обобщенных рядов Фурье по базисным функциям с непрерывным аргументом.

Расчет внутриблочной корреляции

Рассмотрим сигнал $S(z)$, заданный следующим образом:

$$S(z) = S_0(z) + \sigma \cdot \xi(z), \quad (1)$$

где z принадлежит некоторой области Ω ($\Omega \in R$), определяющей некоторый блок сигнала, $S_0(z)$ – детерминированный сигнал, σ – среднеквадратическое отклонение $S(z)$, $\xi(z)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс, имеющий следующие характеристики:

Выполнен расчет коэффициента корреляции спектральных коэффициентов обобщенных рядов Фурье в непрерывной области внутри одного блока и между соседними блоками изображения. Проанализированы зависимости нормированных коэффициентов внутриблочной и межблочной корреляции спектральных коэффициентов от величины интервала корреляции. Общие расчетные соотношения конкретизированы на случай разложения сигнала по базисам функций Эрмита и полиномов Лежандра.

$$\langle \xi(z) \rangle = 0, \langle \xi^2(z) \rangle = 1, \langle \xi(z_1)\xi(z_2) \rangle = R(|z_1 - z_2|).$$

Пусть $\{\varphi_m(z)\}$ – ортогональный базис. Тогда коэффициенты спектрального разложения C_m сигнала $S(z)$ (1) примут следующий вид:

$$C_m = \int_{\Omega} S(z) \cdot \varphi_m(z) dz = \bar{C}_m + \sigma \cdot \xi_m. \quad (2)$$

$$\text{Здесь } \bar{C}_m = \int_{\Omega} S_0(z) \cdot \varphi_m(z) dz \quad \text{и} \quad \xi_m = \int_{\Omega} \xi(z) \cdot \varphi_m(z) dz$$

– детерминированная и случайная компоненты коэффициента спектрального разложения C_m соответственно. Корреляционный момент для спектральных коэффициентов (2) внутри области Ω равен:

$$\langle (C_m - \bar{C}_m) \cdot (C_k - \bar{C}_k) \rangle = \sigma^2 \cdot \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \sigma^2 \mu_{km}$$

Рассмотрим корреляционный момент случайных компонент коэффициентов спектрального разложения:

$$\begin{aligned} \mu_{km} &= \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle \xi(z_1) \cdot \xi(z_2) \rangle \cdot \varphi_m(z_1) \cdot \varphi_k(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} R(|z_2 - z_1|) \cdot \varphi_m(z_1) \cdot \varphi_k(z_2) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем (3) с учетом вида области Ω . Пусть $\Omega = (-\infty; \infty)$. Произведем замену переменных: $z_1 = z$, $z \in (-\infty; \infty)$, $\tau = z_2 - z_1$, $\tau \in (-\infty; \infty)$, тогда выражение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \mu_{km} &= \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(|\tau|) \cdot \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z + \tau) d\tau dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(|\tau|) \cdot \psi_{mk}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\psi_{mk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z + \tau) dz$.

Преобразуя пределы интегрирования, получим:

$$\mu_{km} = \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \int_0^{\infty} R(|\tau|) \cdot [\psi_{mk}(\tau) + \psi_{mk}(-\tau)] d\tau \quad (5)$$

Если $\psi_m(-z) = (-1)^m \psi_m(z)$ (в частности для ортогональных полиномов, тригонометрического базиса и др.), то $\psi_{mk}(\tau) = [\text{sgn}(\tau)]^{m+k} \cdot \psi_{mk}(|\tau|)$. Тогда:

$$\psi_{mk}(\tau) + \psi_{mk}(-\tau) = \begin{cases} 0, & (m+k) \text{ : } 2, \\ 2 \cdot \psi_{mk}(|\tau|), & (m+k) \text{ : } 2, \end{cases}$$

и, соответственно (5), примет вид:

$$\mu_{km} = \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \begin{cases} 0, & (m+k) \text{ : } 2, \\ 2 \cdot \int_0^{\infty} R(|\tau|) \cdot \psi_{mk}(|\tau|) d\tau, & (m+k) \text{ : } 2. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $(m+k) \text{ : } 2$ - символ четности числа $m+k$.

Из формулы (6) следует:

1. Четные и нечетные спектральные коэффициенты попарно некоррелированы между собой.
2. В общем случае наблюдается попарная корреляционная зависимость только четных и нечетных мод.
3. Если $\varphi_m(z)$ – базисные функции разложения Карунена-Лозва

$$\int_{\Omega} R(z_2, z_1) \cdot \varphi_m(z_2) dz_2 = \lambda_m \cdot \varphi_m(z_1),$$

то по определению $\langle \xi_m \xi_k \rangle = \lambda_k \delta_{mk}$. Откуда следует некоррелированность всех спектральных коэффициентов разложения.

4. Если $\xi(z)$ – белый шум, то $\langle \xi(z_1) \xi(z_2) \rangle = \delta(z_1 - z_2)$, и $\mu_{km} = \delta_{mk}$, и следовательно все спектральные коэффициенты разложения некоррелированы. Разложение белого шума по любому ортогональному базису есть разложение Карунена-Лозва.

5. Выразим из (6) дисперсию случайной составляющей спектральных коэффициентов ξ_m :

$$\sigma_m^2 = \langle \xi_m^2 \rangle = 2 \cdot \int_0^{\infty} R(|\tau|) \cdot \psi_{mm}(|\tau|) d\tau$$

Таким образом, в общем случае имеем: $\sigma_m^2 \neq 1$ и $\sigma_m^2 \neq \sigma_k^2$. И только в случае белого шума имеет место равенство дисперсий $\sigma_m^2 = \sigma_k^2$

Рассмотрим теперь разложение по базисным функциям, заданным на конечном интервале. Без ограничения общности дальнейшего обсуждения, с учетом возможного нормирования конечного интервала, можно считать $\Omega = (-1; 1)$. Сделаем следующие замены переменных: $z_1 = z, z \in (-1; 1), \tau = z_2 - z_1, \tau \in (-1; 1)$. Тогда

выражение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \mu_{km} &= \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \\ &= \int_Z \int_Z R(|z_2 - z_1|) \cdot \varphi_m(z_1) \cdot \varphi_k(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \int_{-1}^1 dz \int_{-1-z}^{1-z} R(|\tau|) \cdot \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

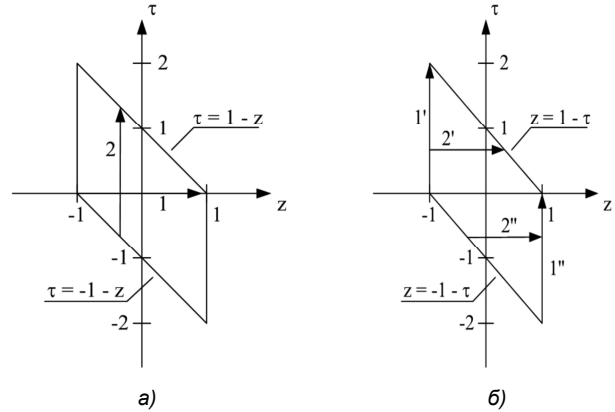


Рис. 1. Обход области интегрирования после замены переменных, а) – первый способ, б) – второй способ

На рис. 1а представлена область интегрирования (7) и способ ее обхода после замены переменных (z_1, z_2) на переменные (τ, z) . Перейдем к другому способу обхода области интегрирования, представленном на рисунке 1б. В данном случае обход области интегрирования разбивается на две части в зависимости от знака переменной τ , а именно:

$$\tau > 0: \tau \in [0, 2]; z \in [-1, 1 - \tau] \text{ и}$$

$$\tau < 0: \tau \in [-2, 0]; z \in [-1 - \tau, 1].$$

Воспользовавшись способом обхода области интегрирования, показанным на рис. 1б, получаем следующее выражение для внутриблочного коэффициента корреляции:

$$\mu_{km} = \langle \xi_m \cdot \xi_k \rangle = \int_0^2 R(|\tau|) \cdot \psi_{mk}(|\tau|) \cdot (1 + (-1)^{m+k}) d\tau \quad (8)$$

Из (8) следует:

1. Если $(m+k)$ – нечетное, то корреляционный момент $\mu_{km} = 0$, следовательно спектральные коэффициенты некоррелированы и при гауссовской статистике $\xi(z)$ независимы.

2. Если $(m+k)$ – четное, то корреляционный момент спектральных коэффициентов будет равен:

$$\mu_{km} = 2 \cdot \int_0^2 R(|\tau|) \cdot \psi_{mk}(|\tau|) d\tau \quad (9)$$

Конкретизируем полученные результаты на случай некоторых ортогональных базисов. Произведем численный расчет корреляции спектральных мод преобразования Фурье по функциям Эрмита [9]

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{ad_m}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) H_m\left(\frac{x}{a}\right), \quad (10)$$

которые образуют ортонормированный базис $(\varphi_m(x)\varphi_k(x)) = \delta_{km}$.

В (10) $d_m = \sqrt{\pi}2^m m!$, a - параметр, характеризующий масштаб функций Эрмита. В качестве корреляционной функции возьмем:

$$R(|\tau|) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right), \quad (11)$$

которая соответствует гауссовскому марковскому процессу. Для базисных функций (10) выражение $\psi_{mk}(\tau)$ может быть получено в явном виде:

$$\psi_{mk}(\tau) = \sqrt{\frac{2^{k-m} k!}{m!}} \left(\frac{\tau}{2a}\right)^{k-m} e^{-\frac{\tau^2}{4a^2}} L_m^{k-m}\left(\frac{\tau^2}{2a^2}\right), m \leq k \quad (12)$$

где $L_n^\alpha(z)$ - обобщенный полином Лагерра [9]. Тогда формула (6), с учетом (11) и (12), принимает вид:

$$\mu_{km} = 2 \cdot \int_0^\infty R(|\tau|) \cdot \psi_{mk}(|\tau|) d\tau = \quad (13)$$

$$= \sqrt{\frac{k!}{m!}} 2^{k-m+2} \int_0^\infty u^{k-m} \exp(-2\beta u - u^2) L_m^{k-m}(2u^2) du$$

Здесь $\beta = a/\tau_0$. На рис. 2 приведены расчеты по формуле (12) для мод (2-4) и (1-3).

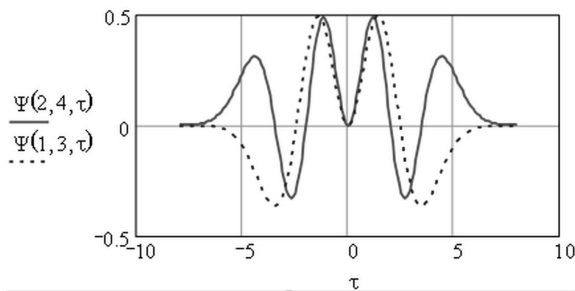
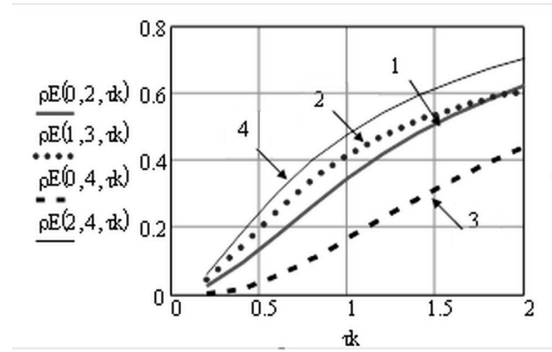


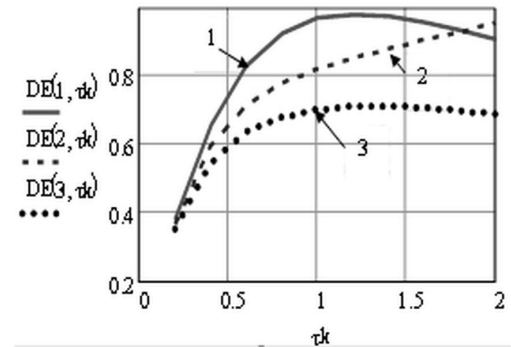
Рис. 2. График функции $\psi_{km}(\tau)$ для мод (2-4) и (1-3) базисных функций Эрмита

На рис 3а приведены значения нормированного коэффициента корреляции спектральных коэффициентов $\rho_{km} = \mu_{km} / \sigma_k \sigma_m$ в зависимости от величины интервала корреляции τ_k , параметр $a = 1$. Кривая 1 соответствует модам - (0-2), 2 - (1-3), 3 - (0-4), 4 - (2-4). На рис. 3б приведены значения дисперсии спектральных коэффициентов σ_m^2 в зависимости от величины интервала корреляции τ_k , параметр $a = 1$. Кривая 1 соответствует моде - ($m = 1$), 2 - ($m = 2$), 3 - ($m = 3$).

В качестве другого примера рассмотрим ряды Фурье по полиномам Лежандра, для которых $\varphi_m(z) = P_m(z) / \sqrt{d_m}$, где $d_m = 2 / (2m + 1)$. На рис. 4 приведены графики функций $\psi_{km}(\tau)$ для различных комбинаций мод m, k базисных полиномов Лежандра.



а)



б)

Рис. 3 а) нормированные коэффициенты корреляции спектральных мод ряда Эрмита;

б) дисперсии спектральных коэффициентов ряда Эрмита

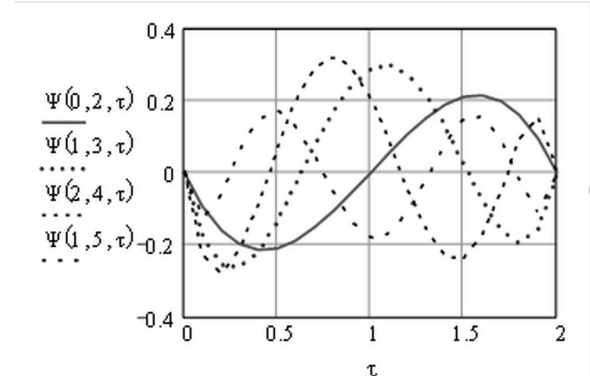


Рис. 4. График функции $\psi_{km}(\tau)$ для мод (0-2), (1-3), (2-4), (1-5) полиномов Лежандра

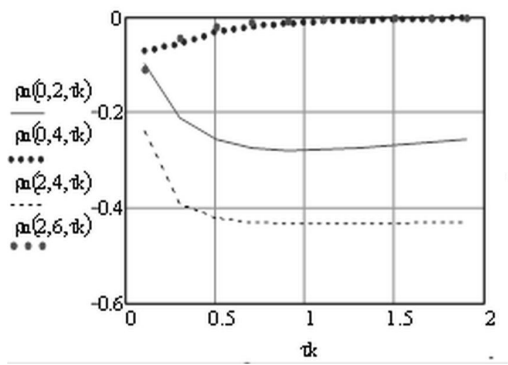
На рис. 5а и рис 5б представлены значения нормированного коэффициента корреляции спектральных коэффициентов $\rho_{km} = \mu_{km} / \sigma_k \sigma_m$ по базису Лежандра в зависимости от величины интервала корреляции τ_k ,

Как видно из рис. 5а, 5б только между ближайшими четными или нечетными модами наблюдается заметная корреляция. При увеличении разности индексов $m - k$ корреляция становится пренебрежимо малой.

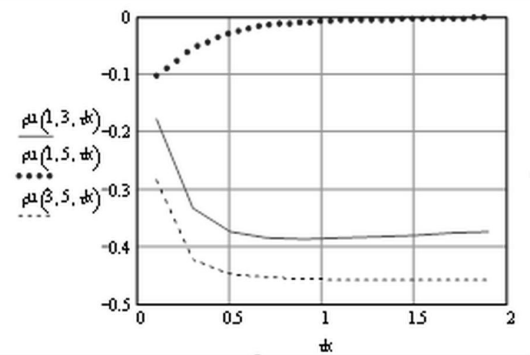
Расчет межблочной корреляции

Пусть имеются два блока I и II, в которых определены сигналы

$$\begin{aligned} S^{(I)}(z) &= S_0^{(I)} + \sigma^{(I)} \cdot \xi^{(I)}(z), \quad z \in \Omega^{(I)} \\ S^{(II)}(z) &= S_0^{(II)} + \sigma^{(II)} \cdot \xi^{(II)}(z), \quad z \in \Omega^{(II)} \end{aligned} \quad (14)$$



а)



б)

Рис. 5. Зависимость значения нормированного коэффициента корреляции, а) между четными модами б) между нечетными модами

где $S_0^{(I)}$ и $S_0^{(II)}$ – детерминированные сигналы, $\sigma^{(I)}$ и $\sigma^{(II)}$ – среднеквадратические отклонения $S^{(I)}(z)$, $S^{(II)}(z)$. Представим процессы $\xi^{(I)}(z)$, $\xi^{(II)}(z)$ как вырезки из случайного процесса $U(z)$

$$\begin{aligned} \xi^{(I)}(z) &= U(z)H(z, \Omega^{(I)}), \\ \xi^{(II)}(z) &= U(z)H(z, \Omega^{(II)}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $H(z, \Omega^{(i)})$ – индикаторная функция подобласти (блока) $\Omega^{(i)}$, $i = I, II$. Случайный процесс $U(z)$ будем считать стационарным в широком смысле с параметрами:

$$\begin{aligned} \langle U(z) \rangle &= 0, \quad \langle U^2(x) \rangle = 1, \\ R_U(z_1, z_2) &= \langle U(z_1) \cdot U(z_2) \rangle = R(|z_2 - z_1|). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем записывать взаимную корреляционную функцию между блоками (15) как $R_{I,II}(z_1, z_2) = R(z'_1, z'_2)$, $z'_1 \in \Omega^{(I)}$, $z'_2 \in \Omega^{(II)}$. Случайные компоненты спектральных коэффициентов для I и II блоков определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_m^{(I)} &= \int_{\Omega^{(I)}} \xi^{(I)}(z'_1) \cdot \varphi_m(z'_1) dz'_1, \\ \xi_m^{(II)} &= \int_{\Omega^{(II)}} \xi^{(II)}(z'_2) \cdot \varphi_m(z'_2) dz'_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим эти случайные компоненты спектральных коэффициентов следующим образом:

$$\xi_m^{(I)} \equiv \xi_m, \quad \xi_k^{(II)} \equiv \gamma_k. \quad (17)$$

Корреляционный момент между ξ_m и γ_k определяет корреляцию между спектральными коэффициентами I и II блоков произвольных порядков.

С учетом (15, 16, 17) выражение для межблочной корреляции примет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_{mk} &= \langle \xi_m \cdot \gamma_k \rangle = \\ &= \int_{\Omega^{(II)}} \int_{\Omega^{(I)}} R(z'_1, z'_2) \cdot \varphi_m(z'_1) \cdot \varphi_k(z'_2) dz'_1 dz'_2 \end{aligned} \quad (18)$$

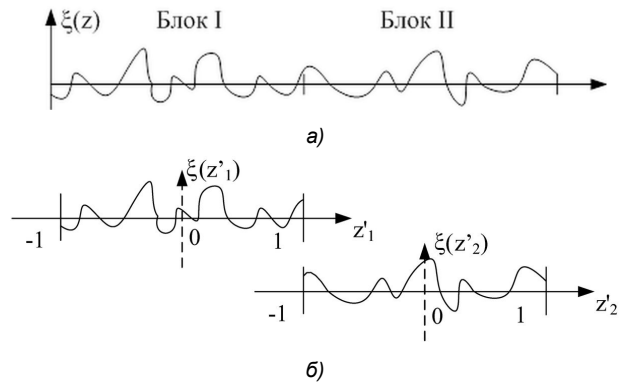


Рис. 6. Расположение переменных внутри блоков I, II, а) в рамках глобальной переменной, б) в рамках локальных переменных

В общем случае будем считать, что $z'_1 \in \Omega^{(I)} = [-1, 1]$ и $z'_2 \in \Omega^{(II)} = [-1, 1]$ – внутренние переменные каждого блока. На рис. 6а и 6б представлено взаимное расположение переменных z'_1 и z'_2 внутри блоков I, II.

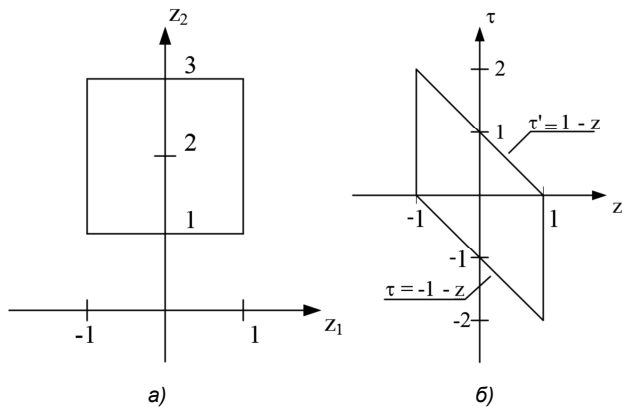


Рис. 7. Область интегрирования, а) в переменных с общим началом отсчета, б) после замены переменных

Перейдем к переменным с общим началом отсчета: $z_1 = z'_1 \in [-1, 1]$, $z_2 = z'_2 + 2 \in [1, 3]$.

На рис. 7б представлена область интегрирования с приведенными к общему началу отсчета переменными z_1 и z_2 . Тогда (18) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \langle \xi_m \cdot \gamma_k \rangle &= \\ &= \int_{(-1-z)-1}^{1-z} \int_{-1}^1 R(|\tau + 2|) \cdot \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z + \tau) dz d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

Изменив путь обхода области интегрирования, изображенной на рисунке 10б, и разбив ее на две части для положительных и отрицательных τ , получим:

$$\begin{aligned}
K_{mk} &= \langle \xi_m \cdot \gamma_k \rangle = \\
&= \int_0^2 \int_{-1}^{1-\tau} R(|\tau+2|) \cdot \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z+\tau) dz d\tau + \\
&+ \int_0^1 \int_{-2(-1-\tau)}^1 R(|\tau+2|) \cdot \varphi_m(z) \cdot \varphi_k(z+\tau) dz d\tau.
\end{aligned} \quad (20)$$

После преобразований второго интеграла получаем следующее выражение для межблочного коэффициента корреляции:

$$\begin{aligned}
K_{mk} &= \langle \xi_m \cdot \gamma_k \rangle = \\
&= \int_0^2 \left[R(2+|\tau|) + (-1)^{m+k} R(2-|\tau|) \right] \psi_{mk}(|\tau|) d\tau.
\end{aligned} \quad (21)$$

На рис. 8а и рис. 8б представлены значения нормированного коэффициента корреляции спектральных коэффициентов ряда по функциям Лежандра $\rho_{km} = K_{km} / \sigma_k \sigma_m$ в зависимости от величины интервала корреляции τ_k ,

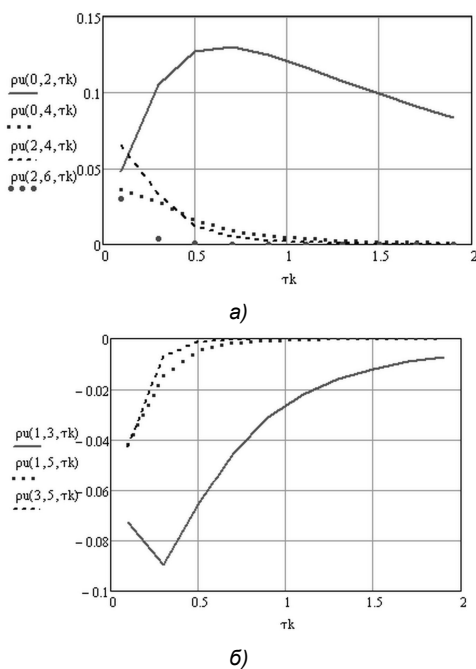


Рис. 8. Зависимость нормированного корреляционного момента спектральных коэффициентов ряда по функциям Лежандра: а) для четных мод, б) для нечетных мод

Заключение

В работе получены аналитические выражения для корреляционных моментов спектральных коэффициентов обобщенных рядов Фурье с непрерывным аргументом. Эти выражения могут быть использованы для расчета моментов спектральных коэффициентов как одного блока, так и для соседних блоков сигнала. Для широкого класса базисных функций показано, что четные и нечетные моды взаимно не коррелированы. Численные расчеты для ряда ортогональных базисов показали, что заметной корреляцией обладают только ближайшие

четные или нечетные моды. Предложенный в статье подход к оценке корреляционных моментов спектров может быть развит применительно к дискретным преобразованиям, используемым в современных кодеках изображения и видео: ДКП, псевдо ДКП, GDCT. Полученные результаты подводят теоретическую базу под возможность применения прогноза спектров в группе блоков, позволяют произвести корректную оценку энтропии изображения и видео, что было использовано авторами при разработке новых видеокодеков.

Литература

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений кн. 1/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 312с.
2. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника/ Пер. с чеш. под ред. Л.С. Виленчика. – М.: Радио и связь, 1990. – 528 с.
3. Цифровая обработка телевизионных и компьютерных изображений / Под ред. Ю.Б. Зубарева и В.П. Дворковича. – М.: МЦНТИ, 1997. – 212 с.
4. Умняшкин С.В. Анализ эффективности применения ортогональных преобразований для кодирования дискретных сигналов с коррелированными отсчетами // Цифровая обработка сигналов. – 2008. – №4. – С. 15-18.
5. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева и В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.
6. Оптические адаптивные системы / Д.П. Лукьянов, А.А. Корниенко, Б.Е. Рудницкий/Под ред. Д.П. Лукьянова. – М.: Радио и связь, 1989. – 240с.
7. Радченко Ю.С. Оптимальные быстрые алгоритмы представления изображений в базисе ортогональных полиномов/ Ю.С. Радченко, М.Ю. Радченко// Труды I международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения – DSPA'98». – Москва: 2011. – Т. III. – С. 163-166.
8. Радченко Ю.С. Алгоритм сжатия изображений на основе полиномиальных преобразований / Ю.С. Радченко//Цифровая обработка сигналов.–2002. – №1. – С. 2-6.
9. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – 3 изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 480 с.

FOURIER SERIES SPECTRAL COEFFICIENTS CORRELATION IN CONTINUOUS SPACE

Radchenko Y.S., Milyaev S.V.

In this paper correlation coefficient of Fourier series coefficients in continuous space in image single block and between neighbor blocks is estimated. Functional relation of spectral coefficients normalized intra-block and inter-block correlation coefficient from correlation distance is analyzed. Estimated general relations are concretized for signal decomposition on Hermite functions basis and Legendre polynomials basis.