

ПРИМЕНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЕЙВЛЕТОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ

*Орешко Н.И., к.т.н., Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
e-mail: oreshko@nicetu.spb.ru*

*Геппенер В.В., д.т.н., профессор Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета
«ЛЭТИ», e-mail: geppener@mail.ru*

*Клионский Д.М., аспирант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета
«ЛЭТИ», e-mail: klio2003@list.ru*

Ключевые слова: гармонические вейвлеты, осциллирующие сигналы, очистка от шума, пороговая процедура, выделение границ процессов.

Введение

Данная статья посвящена вопросам использования специфических функций, называемых гармоническими *вейвлетами* и предназначенных для обработки широкого класса осциллирующих сигналов (процессов), в частности *мультигармонических* и *переходных* процессов. Излагаются основы гармонического вейвлет-преобразования и приводится двухэтапный алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов на основе ДПФ. Вводится специальный показатель эффективности применения данных вейвлетов к осциллирующим сигналам. Использование гармонических вейвлетов особенно эффективно для обработки осциллирующих сигналов, поскольку гармонические вейвлеты по своей форме подобны данным сигналам. Во многих случаях наиболее эффективным для обработки является такой базис, который имеет высокую степень корреляции с исследуемым типом сигналов, т.к. представление сигнала в таком базисе будет требовать малого количества слагаемых.

Значительное внимание в статье уделяется важнейшей практической задаче - *очистке осциллирующих сигналов от шума* с использованием специальных статистических критериев и пороговой обработки вейвлет-коэффициентов.

Содержание статьи можно представить следующим образом:

- вводятся в рассмотрение гармонические вейвлеты и иллюстрируется двухэтапная процедура вычисления вейвлет-коэффициентов, основанная на ДПФ;
- выводится общий вид матрицы гармонического вейвлет-преобразования;
- вводится специальный количественный показатель, определяющий эффективность применения гармонического вейвлет-преобразования к осциллирующим процессам и являющийся, по сути, мерой сжатия данных в пространстве вейвлет-коэффициентов;
- демонстрируется пример анализа гармонического сигнала в смеси с шумом в базисе на основе гармонических вейвлетов. Показывается на примере комбина-

Статья посвящена использованию гармонических вейвлетов применительно к широкому классу осциллирующих сигналов. Иллюстрируются новые подходы к решению задач выделения границ характерных процессов в сигнале и очистки сигналов от шума с помощью гармонических вейвлетов на основе модифицированной пороговой процедуры. Выводится общий вид матрицы гармонического вейвлет-преобразования и вводится критерий эффективности использования данных вейвлетов.

ции гармонического сигнала и переходного процесса, как именно гармонические вейвлеты могут использоваться для определения изменения типа процесса в исходном сигнале;

- иллюстрируется процедура очистки сигналов от шума на основе гармонических вейвлетов с использованием специальной пороговой обработки вейвлет-коэффициентов. Приводятся формулы для расчета порогов применительно к гармоническому вейвлет-преобразованию.

Гармонические вейвлеты

Рассмотрим базис на основе вейвлетов, спектры которых имеют вид прямоугольной волны в заданной полосе частот [1, 2]. В качестве примера на нулевом уровне ($j = 0$) для базисного вейвлета имеем следующее выражение для спектральной плотности [3] $W(\omega)$, приняв фазу равной нулю:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi, & 2\pi \leq \omega < 4\pi \\ 0, & \omega < 2\pi, \omega \geq 4\pi. \end{cases} \quad (1)$$

Далее установим вид базисной функции во временной области, используя обратное преобразование Фурье от выражения (1) ($i = \sqrt{-1}$):

$$w(x) = \frac{e^{i4\pi x} - e^{i2\pi x}}{i2\pi x}. \quad (2)$$

Использование комплексного представления вейвлета позволяет получить два вещественных представления на основе единого представления (2) аналогично тому, как в комплексном гармоническом анализе функция $e^{i\omega x}$ используется для представления двух вещественных функций в синусоидальной $\sin(\omega x)$ и косинусоидальной $\cos(\omega x)$ формах соответственно (на основании формулы Эйлера). Очевидно, вещественная часть (2) является четной, а мнимая – нечетной функцией частоты.

ты, в чем опять-таки прослеживается полная аналогия с комплексной экспонентой.

Рассмотрим выражение для спектра базисного вейвлета, соответствующего произвольному j -му уровню разложения и сдвигу на величину k :

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} 2^{-j} e^{\frac{i\omega k}{2^j}}, & 2\pi 2^j \leq \omega < 4\pi 2^j \\ 0, & \omega < 2\pi 2^j, \omega \geq 4\pi 2^j. \end{cases} \quad (3)$$

Аналогично тому, как это было сделано ранее, найдем ОПФ от (3):

$$w(2^j x - k) = \frac{e^{i4\pi(2^j x - k)} - e^{i2\pi(2^j x - k)}}{i2\pi(2^j x - k)}, \quad (4)$$

где $j \geq 0, |k| < \infty$. Из (3) следует, что гармонические вейвлеты имеют *конечный (компактный)* носитель [1, 2, 4] в частотной области (поскольку спектр базисных вейвлетов отличен от нуля в ограниченной полосе частот) и бесконечный носитель во временной области. Однако поскольку во временной области вейвлет убывает по гиперболическому закону, как это следует из (4), можно при необходимости определить эффективную ширину носителя во временной области (например, как интервал, на котором значения выражения (4) убывают до уровня 0.1 от максимума).

Для $j = -1$ (соответствует *масштабирующей функции*) выражение для $W(\omega)$ имеет вид [1]:

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega k}, & 0 \leq \omega < 2\pi \\ 0, & \omega < 0, \omega \geq 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

откуда во временной области получаем

$$\varnothing(x - k) = \frac{e^{i2\pi(x - k)} - 1}{i2\pi(x - k)}, \quad (6)$$

где $|k| < \infty$, $\varnothing(x)$ – масштабирующая функция. Рассуждения относительно носителя данной функции полностью аналогичны ранее приведенным рассуждениям относительно носителя вейвлетов. Причина выбора именно такой масштабирующей функции (6) и базисных вейвлетов (4) состоит в том, что они образуют *ортонормальное множество*, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(2^j x - k) w(2^r x - s) dx = 0, \quad (7)$$

$$\forall j, k, r, s (j, r \geq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(2^j x - k) w^*(2^r x - s) dx = 0, \quad (8)$$

$$\forall j, k, r, s (j, r \geq 0, r \neq j; s \neq k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(2^j x - k)|^2 dx = 1/2^j. \quad (9)$$

Для масштабирующей функции (6) справедливы аналогичные соотношения ортогональности. Кроме того, масштабирующая функция и базисные вейвлеты также являются ортогональными. Доказательство свойств (7)-(9) и аналогичных им основывается на со-

хранении скалярного произведения двух функций в результате действия на каждую из них оператора Фурье. Данные свойства записываются на основе известных аналитических соотношений, выражающих суть теоремы Парсевала [3]. Соответствующие интегралы, выражающие скалярные произведения, обратятся в ноль, поскольку гармонические вейвлеты, соответствующие различным значениям j , занимают разные частотные полосы и не перекрываются, откуда следует, что скалярные произведения равны нулю. Вышеприведенные результаты говорят о том, что функции $w(2^j x - k)$ и $\varnothing(x - k)$ образуют *ортонормальный базис*. Функциональный ряд для некоторой функции $f(x)$ по гармоническим вейвлетам сходится в среднеквадратическом смысле при условии, что функция является квадратично интегрируемой.

С учетом рассмотренных особенностей можно выделить следующие основные свойства гармонических вейвлетов, делающие их схожими с другими классами вейвлетов:

- Гармонические вейвлеты имеют компактный *носитель* в частотной области, что эффективно при решении задачи локализации характерных особенностей сигналов (в частотной области);
- Существуют и используются на практике быстрые алгоритмы вычисления вейвлет-коэффициентов и восстановления сигнала во временной области, основанные на быстром преобразовании Фурье (БПФ).

Недостатком гармонических вейвлетов являются их более слабо выраженные локализационные свойства во временной области по сравнению с другими видами вейвлетов. Спектр в виде прямоугольной волны приводит к затуханию во временной области по закону $1/x$, что может оказаться недостаточно для выделения кратковременных особенностей (сингулярностей) в сигнале во временной области.

Вейвлет-преобразование в базисе гармонических вейвлетов. Алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов на основе двухэтапного ДПФ

Вычисление вейвлет-коэффициентов производится по следующим интегральным формулам:

$$a_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w^*(2^j x - k) dx; \quad (10)$$

$$\tilde{a}_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w(2^j x - k) dx;$$

$$a_{\varnothing,k} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varnothing^*(x - k) dx; \quad (11)$$

$$\tilde{a}_{\varnothing,k} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varnothing(x - k) dx.$$

Для вещественных функций $f(x)$ данные коэффициенты подчиняются условию $\tilde{a}_{j,k} = \tilde{a}_{j,k}^*$, $\tilde{a}_{\varnothing,k} = \tilde{a}_{\varnothing,k}^*$, однако для комплекснозначных функций вычисления необходимо производить отдельно. Представление функции в виде ряда (функционального ряда) выполняется следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{\emptyset,k} \emptyset(x-k) + \tilde{a}_{\emptyset,k} \emptyset^*(x-k)) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{j,k} w(2^j x - k) + \tilde{a}_{j,k} w^*(2^j x - k)). \quad (12)$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов вейвлет-разложения необходимо получить значения $\tilde{a}_{j,k}$, $a_{j,k}$, $a_{\emptyset,k}$, $\tilde{a}_{\emptyset,k}$. Рассмотрим вычисление коэффициентов на примере $a_{j,k}$ (вычисления остальных коэффициентов делаются аналогично):

$$a_{j,k} = (1/2\pi) \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} d\omega e^{i\omega k/2^j} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{i\omega x} = \int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} F(\omega) e^{i\omega k/2^j} d\omega. \quad (13)$$

Дальнейшие рассуждения являются ключевыми для успешной реализации гармонического вейвлет-преобразования на практике. Дело в том, что непосредственные вычисления по формуле (13) являются неэффективными с точки зрения их сложности (общего числа операций), как показано в работе [1]. К тому же, как следует из формул (12) и (13), в общем случае мы имеем бесконечное число вейвлет-коэффициентов, что соответствует физически нереализуемым вейвлет-фильтрам (т.н. идеальным вейвлет-фильтрам в частотной области, имеющим прямоугольную АЧХ). Этот факт также непосредственно вытекает из формулы (1), из которой видно, что АЧХ вейвлет-фильтров является строго прямоугольной, что неизбежно приводит к физической нереализуемости фильтров.

В связи с этим необходимо соответствующим образом модифицировать формулу (13) так, чтобы получить физически реализуемые вейвлет-фильтры и, соответственно, конечное число вейвлет-коэффициентов. Также очень важно учитывать тот факт, что модификация формулы (13) и аналогичных ей формул для расчета $\tilde{a}_{j,k}$, $a_{\emptyset,k}$, $\tilde{a}_{\emptyset,k}$ должна позволить использовать вычислительно эффективные быстрые алгоритмы. В итоге реальные вейвлет-фильтры будут относиться к классу КИХ-фильтров и иметь конечное число коэффициентов.

Модификация, о которой говорится выше, выполняется следующим образом. В формуле (13) заменим интегрирование на суммирование (замены $n = 2^j$ и $s = m - n$) и введем коэффициенты, которые обозначим как F_{2^j+s} :

$$F_{2^j+s} = 2\pi F(\omega = 2\pi(2^j + s)), \quad (14)$$

и тогда выражение (13) после элементарных преобразований приобретает вид

$$a_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{2^j+s} e^{i2\pi s k/2^j}, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1. \quad (15)$$

Это выражение представляет собой, по сути, обратное ДПФ последовательности F_{2^j+s} , $s = 0, \dots, 2^j - 1$.

Важно отметить, что в этом случае мы получаем не в чистом виде коэффициенты гармонического вейвлет-

преобразования, как в формулах (10) и (11), а коэффициенты, полученные путем соответствующей модификации формулы (13). Поэтому более правильно называть полученные коэффициенты a_{2^j+k} коэффициентами октавного (блочного) гармонического вейвлет-преобразования. Прилагательное «октавное», как будет показано далее, связано с особенностью алгоритма вычисления коэффициентов на основе ДПФ с помощью БПФ. При дальнейшем изложении будет подразумеваться именно октавное гармоническое вейвлет-преобразование, однако из соображений краткости слово «октавное» будет опускаться.

Таким образом, алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов (октавного) гармонического вейвлет-преобразования для некоторой непрерывной функции $f(x)$ сводится к следующему:

1. Исходная функция $f(x)$ представляется своими дискретными отсчетами $f(r)$, $r = 0, \dots, N - 1$, где N является степенью 2 (в случае необходимости производится дополнение необходимым количеством нулей).
2. Вычисляется ДПФ с помощью БПФ с целью получения набора комплексных чисел F_t , $t = 0, \dots, N - 1$ – Фурье-коэффициентов (коэффициентов ДПФ).
3. Октавные блоки F_t обрабатываются на основе обратного ДПФ для получения значений коэффициентов a_{2^j+k} . Результаты расчета коэффициентов иллюстрируются в табл. 1.

Таблица 1.
Распределение вейвлет-коэффициентов по уровням разложения

Номер уровня разложения j	Вейвлет-коэффициенты	Количество вейвлет-коэффициентов
-1	$a_0 = F_0$	1
0	$a_1 = F_1$	1
1	a_2, a_3	2
2	a_4, a_5, a_6, a_7	4
3	a_8, \dots, a_{15}	8
.....
j	$a_{2^j}, \dots, a_{2^{j+1}-1}$	2^j
.....
$n-2$, где $n = \log_2 N$	$a_{N/4}, \dots, a_{N/2-1}$	2^{n-2}

Как видно из табл. 1, на каждом уровне присутствует 2^j вейвлет-коэффициентов. Аналитически коэффициенты j -го уровня для $j \geq 0$ записываются как a_{2^j+k} , $k = 0, \dots, 2^j - 1$.

Выражение для \tilde{a}_{2^j+k} получается аналогично выражению для a_{2^j+k} :

$$\tilde{a}_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{-(2^j+s)} e^{-i2\pi s k/2^j}, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1. \quad (16)$$

Отрицательный индекс у последовательности F объясняется тем, что $F_{-(2^j+s)}$ является дискретным аналогом $F(-\omega)$. Поскольку ДПФ не имеет отрицательных индексов, нужно использовать свойство цикличности

$F_{-s} = F_{N-s}$. В результате получим:

$$\tilde{a}_{2^j+k} = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{N-(2^j+s)} e^{-i2\pi sk/2^j}, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1. \quad (17)$$

Вычисление коэффициентов a_0 и $a_{N/2}$ требует отдельных комментариев. Рассмотрим вычисление a_0 . Очевидно,

$$a_{\phi,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Phi^*(\omega) e^{j\omega k} f(x) e^{-j\omega x} = \int_0^{2\pi} d\omega F(\omega) e^{i\omega k}. \quad (18)$$

Пределы интегрирования с бесконечных на конечные можно изменить, поскольку $\Phi(\omega)$ отлично от нуля только в диапазоне $0 \leq \omega \leq 2\pi$, согласно (5).

$$a_0 = a_{\phi,0} + \tilde{a}_{\phi,0} = 2\pi F(\omega = 0) + 2\pi F(\omega = 0) = 4\pi F(\omega = 0) \quad (19)$$

Теперь рассчитаем значение $a_{N/2}$. Для того, чтобы вычислить данное значение, проверим справедливость равенства Парсеваля, которое также выполняется для октавных блоков, представленных в табл. 1 (2-й столбец):

$$\frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |a_{2^j+k}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^j-1} |F_{2^j+k}|^2. \quad (20)$$

Поэтому необходимо положить $a_{N/2} = F_{N/2}$. В этом случае имеем

$$|a_0|^2 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} (|a_{2^j+k}|^2 + |a_{N-2^j-k}|^2) \right) + |a_{N/2}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |f_r|^2 \quad (21)$$

Безусловно, представляет интерес сравнение процедуры вычисления коэффициентов гармонического вейвлет-преобразования на основе алгоритма двухэтапного ДПФ и широко известного быстрого пирамидального алгоритма Малла [4]. В работе [1] достаточно подробно изучен данный вопрос с использованием компьютерного моделирования в среде MATLAB и автоматического подсчета общего числа выполняемых операций в алгоритмах при условии, что длина сигнала N является целой степенью числа 2. Показано в [1], что при значениях N в диапазоне $[2^7, 2^{12}]$, что соответствует объемам сигнальных выборок, рассматриваемых в рамках данной статьи, выигрыш в количестве операций при использовании алгоритма двухэтапного ДПФ составляет более чем в 2 раза. При дальнейшем увеличении длины сигнала выигрыш в числе операций начинает медленно уменьшаться [1].

Быстрый алгоритм Малла является последовательным алгоритмом, и для выполнения очередного этапа необходимо завершение предыдущего, что является определенным недостатком. Однако алгоритм на основе двухэтапного ДПФ является *параллельным*, поскольку

все отсчеты исходного сигнала могут обрабатываться одновременно, что позволяет использовать эффективные алгоритмы распараллеливания вычислений. К тому же, ДПФ само по себе является вычислительно эффективным преобразованием в силу наличия алгоритмов БПФ.

Вывод матрицы гармонического вейвлет-преобразования

Получение матрицы гармонического вейвлет-преобразования имеет важное теоретическое значение с точки зрения его представления в матричном виде. Как и любое линейное преобразование при заданном базисе, гармоническое вейвлет-преобразование может быть записано в векторно-матричной форме:

$$a = Ws, \quad (22)$$

где W - матрица вейвлет-преобразования, a - вектор вейвлет-коэффициентов, s - вектор отсчетов исходного сигнала. Процедура вычисления вейвлет-коэффициентов двухэтапная и представляет собой вычисление Фурье-коэффициентов [1, 2], а затем уже самих вейвлет-коэффициентов путем взятия обратного ДПФ от октавных блоков Фурье-коэффициентов. Поэтому формулу (22) можно разбить на две:

$$u = R_F s; \quad a = Qu, \quad (23)$$

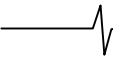
где R_F - ортогональная матрица Фурье-преобразования с нормой, равной длине исходного сигнала s , u - вектор Фурье-коэффициентов, Q - матрица перехода от Фурье-коэффициентов к вейвлет-коэффициентам. Соотношения для u и a эквивалентны следующей записи:

$$a = QR_F s. \quad (24)$$

В данном соотношении R_F (матрица ДПФ) известна [3], а матрицу Q необходимо определить. Она находится из того свойства, что при вычислении вейвлет-коэффициентов соответствующего уровня на вектор Фурье-коэффициентов u слева умножается блочная матрица, блоки которой представляют собой матрицы ДПФ соответствующих размерностей. Размерность каждого блока определяется количеством коэффициентов на очередном уровне разложения. Например, 0-й уровень имеет 1 вейвлет-коэффициент ($2^{j=0} = 1$), и ему соответствует матрица 1×1 . 5-й уровень имеет 8 вейвлет-коэффициентов ($2^{j=3} = 8$), и ему соответствует матрица размером 4×4 (см. табл. 1). В первой строке матрицы стоит 1, поскольку на самом начальном уровне имеется 1 вейвлет-коэффициент. Матрица Q имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Z_{2 \times 2} & R_{F(2 \times 2)} & \dots & \dots & 0 \\ Z_{4 \times 4} & R_{F(4 \times 4)} & \dots & \dots & 0 \\ Z_{2^j \times 2^j} & R_{F(2^j \times 2^j)} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $Z_{m \times m}$ - матрица нулей размером $m \times m$, $R_{F(m \times m)}$ - матрица ДПФ размерности m .



Пример анализа гармонических сигналов и переходных процессов в смеси с белым гауссовским шумом. Обнаружение изменений типа процесса в исходном сигнале. Критерий эффективности применения гармонических вейвлетов

Исследуем эффективность гармонических вейвлетов в задачах обработки двух типов сигналов:

- комбинации мультигармонических сигналов и переходных процессов;
- аддитивной смеси мультигармонических сигналов и белого гауссовского шума с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Вначале рассмотрим первый тип сигналов. Для этого обратимся к примеру, показанному на рис. 1, где изображен сигнал длиной $N = 4096$.

Из рис. 1 видно, что в сигнале наблюдается чередование моногармонического сигнала (отсчеты с 1 по 1024 и с 2048 по 3072) и низкочастотного переходного процесса [5]. Для данных типов сигналов представляет практический интерес задача автоматического нахождения границ различных процессов.

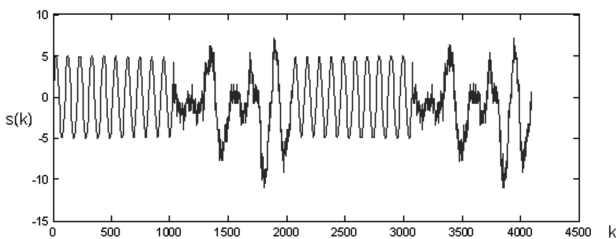


Рис. 1. Комбинация моногармонического сигнала и переходного процесса при отсутствии шума

На рис. 2 показано разложение исходного сигнала в базисе на основе гармонических вейвлетов. Для каждого уровня разложения по вертикальной оси отложены значения вейвлет-коэффициентов, а по горизонтальной оси – их номера (количество вейвлет-коэффициентов различается для каждого уровня в соответствии с табл. 1). Количество вейвлет-коэффициентов на самом тонком уровне (понятия «тонкий уровень» и «грубый уровень» рассматриваются применительно к временному разрешению) с номером $j = 10$ максимально и равно 1024, в соответствии с табл. 1. На каждом следующем уровне число коэффициентов убывает в 2 раза по сравнению с предыдущим (табл. 1). На самом тонком уровне видно, что присутствуют участки с нулевыми вейвлет-коэффициентами, которые соответствуют гармоническому сигналу, а ненулевые коэффициенты, носящие осциллирующий характер, соответствуют переходному процессу. Таким образом, становится возможным эффективное обнаружение этих участков в исходном сигнале. Это можно сделать автоматически с помощью стандартных процедур сегментации [5, 6] (разбиения на фрагменты – в данном на случае на участки нулевых и ненулевых вейвлет-коэффициентов) и кластер-анализа [5, 6] (объединения фрагментов в группы), что в конечном итоге позволяет определять границы между процессами различного типа.

Рассмотрим еще один показательный пример (рис. 3, 4), где представлена комбинация бигармонического

сигнала (сумма двух гармоник с амплитудами, равными 40) и низкочастотного переходного процесса при наличии шума.

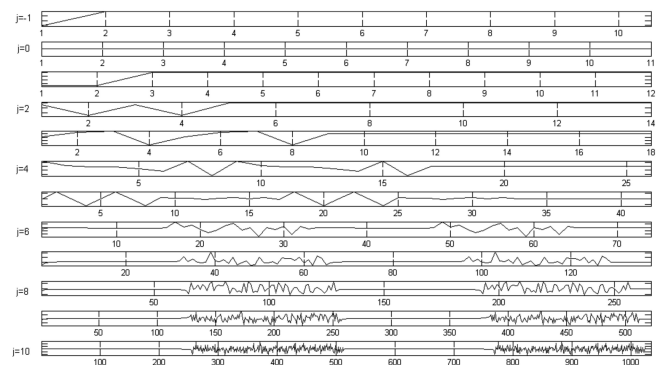


Рис. 2. Разложение сигнала, приведенного на рис. 1

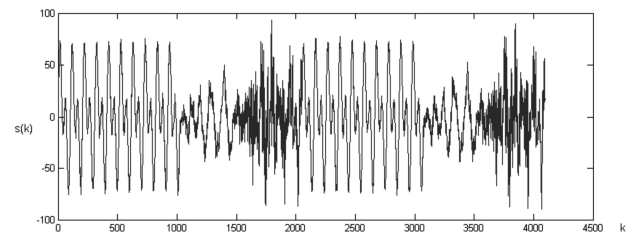


Рис. 3. Комбинация бигармонического сигнала и переходного процесса при наличии шума

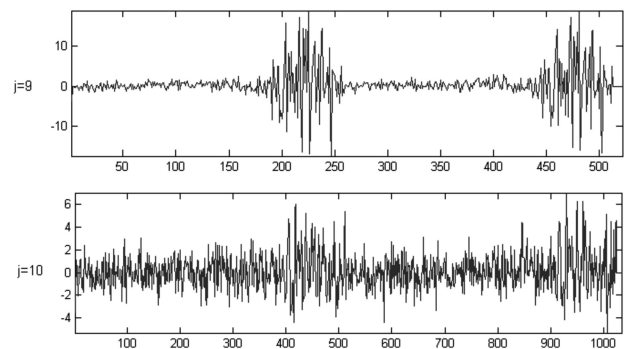


Рис. 4. Разложение сигнала, приведенного на рис. 3 (9-й и 10-й уровни разложения)

Длина всего сигнала и длины указанных процессов такие же, как и в предыдущем примере. При частоте дискретизации $f_s = 1024$ Гц частоты гармоник равны $f_1 = 10$ Гц и $f_2 = 20$ Гц. Среднеквадратическое отклонение (СКО) шума равно $\sigma = 3$. На рис. 4 показано разложение сигнала, аналогичное рис. 2. Для наглядности на рис. 4 приведены лишь два начальных (самых тонких) уровня, представляющие наибольший интерес для дальнейшего анализа.

На рис. 4 видно, что на самом тонком уровне ($j = 10$) преобладают вейвлет-коэффициенты, соответствующие шуму. На следующем уровне ($j = 9$) видны участки, где вейвлет-коэффициенты практически равны нулю (это соответствует бигармоническому сигналу), и участки, где вейвлет-коэффициенты носят осциллирующий характер с высокой амплитудой, что соответствует переходному процессу. Для обнаружения данных участков можно ввести пороговое значение в соответствии с экспериментально определенным уровнем шума. Далее

можно применить вышеупомянутые процедуры сегментации и кластер-анализа вейвлет-коэффициентов.

Рассмотрим теперь случай моногармонического сигнала без шума, когда частота гармоники f_0 меньше частоты Найквиста $f_s/2$. Данное условие запишется в виде $f_0 < f_s/2$. Возьмем $N=1024$, $f_s=1024$ Гц, $f_0=100$ Гц и амплитуду $A=1$. В качестве количественного показателя эффективности применения гармонических вейвлетов введем следующий:

$$\beta = N_z / N, \quad (26)$$

где N_z – число нулевых вейвлет-коэффициентов на всех уровнях, а N – общее число вейвлет-коэффициентов на всех уровнях, численно равное длине исходного сигнала. На практике всегда присутствует погрешность в вычислениях, поэтому фактически при сравнении коэффициентов с нулем необходимо использовать некоторое малое число ϵ , например, $\epsilon = 10^{-4}$. Необходимо помнить, что с ϵ сравниваются как вещественная, так и мнимая части, поскольку вейвлет-коэффициенты комплекснозначные. Для случая моногармонического сигнала с вышеуказанными параметрами имеем $N_z = 912$ вейвлет-коэффициентов, у которых и вещественная, и мнимая части меньше введенного порога, что составляет около 90% ($\beta = 0.9$) и подтверждает эффективность применения гармонических вейвлетов к данному типу сигналов.

Полученное значение β можно увеличить, т.е. добиться того, чтобы еще большее число вейвлет-коэффициентов стали нулевыми. Очевидно, это можно сделать путем увеличения частоты дискретизации f_s моногармонического сигнала (передискретизации [3]) при неизменных значениях его параметров - амплитуды и частоты. Кроме того, чем меньше частота моногармонического сигнала, тем больше нулевых вейвлет-коэффициентов достигается в разложении (при неизменной частоте дискретизации). Этот факт связан с тем, что при меньшей частоте f_0 сам сигнал является менее осциллирующим, и нарушение гладкости, вызванное недостаточно высокой частотой дискретизации, не столь заметно проявляется при вычислении гармонического вейвлет-преобразования.

Из вышеприведенных графиков можно сделать следующий важный вывод: гармоническое вейвлет-преобразование эффективно при обнаружении участков мультигармонических и переходных процессов, а также границ (стыков) данных процессов. При этом возможна эффективная обработка таких комбинированных сигналов любой сложности, т.е. количество чередований переходных и мультигармонических процессов может быть довольно большим (например, при длительном мониторинге работы сложных динамических объектов в разных режимах).

Применительно к мультигармоническим процессам, чем больше частота дискретизации и чем меньше частоты гармоник, тем больше нулевых коэффициентов присутствует в разложении и тем точнее выполняется

автоматическое обнаружение таких процессов.

Методы обнаружения шумовых уровней в гармоническом вейвлет-преобразовании

Возьмем мультигармонический сигнал, в котором наблюдается чередование гармоник с разными амплитудами и частотами: $f_1=10$ Гц, $f_2=15$ Гц, $A_1=5$, $A_2=10$ ($f_s=1024$ Гц, $N=4096$). Кроме того, в сигнале присутствует аддитивный шум (как было оговорено ранее, шум считаем белым с гауссовским распределением) с нулевым средним и СКО $\sigma=0.8$. Сигнал показан на рис. 5, а результат вычисления гармонического вейвлет-преобразования приведен на рис. 6.

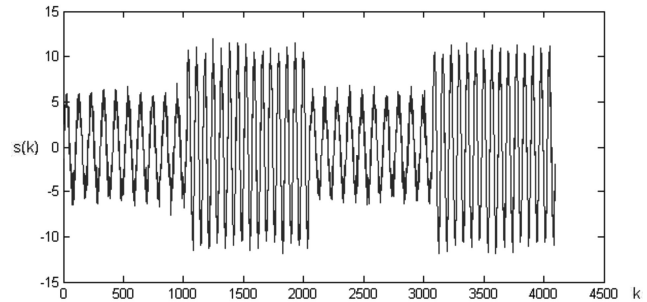


Рис. 5. Зашумленный мультигармонический сигнал, представляющий собой чередование гармоник

Из рис. 6 видно, что на начальных уровнях присутствует большое число вейвлет-коэффициентов, соответствующих шуму. Для определения шумовых уровней, к которым мы в дальнейшем применим специальную пороговую обработку [4, 7], воспользуемся известным критерием [8], основанным на вычислении автокорреляционной функции (АКФ).

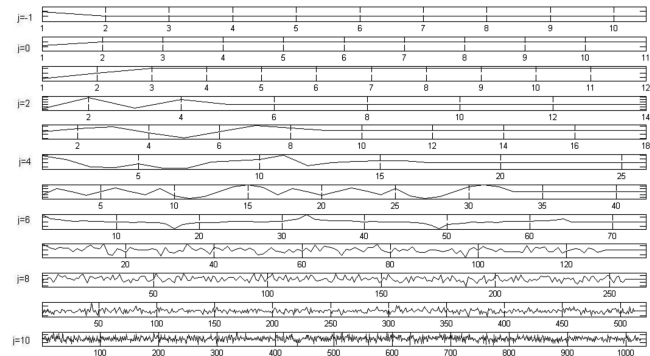
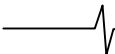


Рис. 6. Разложение мультигармонического сигнала, приведенного на рис. 5

Критерий, основанный на АКФ, заключается в следующем. Вначале вычисляется смещенная оценка нормированной АКФ $r(k)$, $k=-N, \dots, 0, \dots, N$ [8]. Можно показать, что если длина выборки велика, то оценка распределена по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $1/N$. Доверительный интервал для оценки АКФ строится следующим образом:

$$r(k) \in \left[r(k) - \frac{1}{\sqrt{N}} t_v(N-1; 1-\alpha/2); r(k) + \frac{1}{\sqrt{N}} t_v(N-1; 1-\alpha/2) \right] \quad (27)$$



где $t_{\nu}(N-1; 1-\alpha/2)$ - распределение Стьюдента с $N-1$ степенью свободы. Доверительная вероятность, таким образом, равна $1-\alpha/2$, где α - уровень значимости, который обычно полагают равным 0.05. Если доверительный интервал для более чем 5% значений АКФ не покрывает нуль (т.е. левая и правая границы доверительного интервала имеют одинаковые знаки), то исследуемая АКФ *не соответствует* белому шуму, а в противном случае вейвлет-коэффициенты исследуемого уровня соответствуют белому шуму.

В табл. 2 приведены результаты использования данного критерия. Обозначим γ_j процент значений АКФ вейвлет-коэффициентов j -го уровня, для которых доверительный интервал не покрывает нуль. Нумерация уровней в табл. 2 ведется от самого тонкого (самая нижняя часть рис. 6) к самому грубому.

Таблица 2.
Демонстрация критерия АКФ
для определения шумовых уровней (рис. 6)

j	γ_j	γ_j (%)
10	0.0142	1.42
9	0.0107	1.07
8	0.0098	0.98
7	0.0195	1.95
6	0.2422	24.22
5	0.1094	10.94
4	0.0313	3.13
3	0.0625	6.25
2	0.1250	12.50
1	0	0
0	0	0
-1	0	0

В табл. 2 жирным шрифтом выделены значения γ_j (%) < 5%, а соответствующие j являются номерами шумовых уровней. Начиная с некоторого номера уровня j , значения γ_j начинают превышать 5%, и эти уровни уже не являются шумовыми. Таким образом, в данном случае основная часть шума распределена по 4-м начальным уровням, и именно их необходимо обрабатывать с помощью специальных порогов [4, 7].

Очистка сигналов от шума на основе гармонических вейвлетов с использованием пороговой обработки

Рассмотрим задачу очистки сигналов от шума на примере мультигармонических сигналов, для которых гармонические вейвлеты являются наиболее подходящим инструментом для мультиразрешающего (кратномасштабного) анализа [4].

Очистку от шума выполним с использованием пороговой обработки вейвлет-коэффициентов [4, 7]. Пороговая обработка является одним из наиболее точных методов очистки сигналов от шума при использовании совместно с вейвлетами. Пороговая обработка позволяет избежать проблем, возникающих при бинарной классификации вейвлет-коэффициентов на те, что содержат только шум, и те, что отвечают за сигнальную информацию, поскольку такая процедура приведет к неточностям и потере информации. Наиболее часто используемая при пороговой обработке оценка СКО

основывается на статистических оценках, при этом сама пороговая обработка применяется не ко всем уровням разложения, а только к начальным (шумовым). После этого осуществляется восстановление очищенного от шума сигнала на основе обработанных (модифицированных) вейвлет-коэффициентов. В качестве метода определения уровней, к которым целесообразно применять пороговую обработку, можно предложить метод, основанный на оценивании АКФ вейвлет-коэффициентов, что было рассмотрено выше.

Начнем иллюстрацию процедуры пороговой обработки с того, что представим вейвлет-коэффициенты на шумовых уровнях в следующем виде (в силу линейности гармонического вейвлет-преобразования):

$$a_j(k) = w_j(k) + e_j(k), \quad (28)$$

где j - номер уровня разложения, $w_j(k)$ - вейвлет-коэффициенты незашумленного сигнала (при отсутствии шума), $e_j(k)$ - вейвлет-коэффициенты шума. Тогда интересующее нас слагаемое $w_j(k)$ может быть определено в общем виде следующим образом:

$$w_j(k) = F[a_j(k), \rho_j], \quad (29)$$

где F - оператор пороговой обработки, ρ_j - пороговое значение, непосредственно влияющее на результат очистки от шума. На основании данных общей формулы (29) различают мягкую и жесткую пороговую обработку вейвлет-коэффициентов [4], суть которых можно записать следующим образом:

1. Жесткая пороговая обработка вейвлет-коэффициентов:

$$w_j(k) = \begin{cases} a_j(k), & |a_j(k)| > \rho_j \\ 0, & |a_j(k)| \leq \rho_j. \end{cases} \quad (30)$$

2. Мягкая пороговая обработка вейвлет-коэффициентов:

$$w_j(k) = \begin{cases} a_j(k) - \rho_j, & a_j(k) > \rho_j \\ 0, & -\rho_j < a_j(k) \leq \rho_j \\ a_j(k) + \rho_j, & a_j(k) \leq -\rho_j. \end{cases} \quad (31)$$

Ключевую роль во всей пороговой обработке играют именно значения порогов ρ_j , которые вычисляются следующим образом (мультиуровневые пороги):

$$\rho_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln N}, \quad (32)$$

где σ_j - оценка СКО шумовой составляющей на j -м уровне разложения. Смысл данного выражения заключается в том [4, 7], что значения вейвлет-коэффициентов гауссовского шума с СКО σ_j не будут превышать порог ρ_j с вероятностью P , стремящейся к 1 при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, при пороговой обработке вейвлет-коэффициенты, соответствующие отсчетам шума, будут обнулены в соответствии с формулами (30-31). Как правило, вычисление СКО осуществляется для самого начального (тонкого) уровня с наибольшей долей шума, а в дальнейшем производится перерасчет

СКО для всех остальных уровней. Оценку СКО σ_f для самого тонкого уровня ($j = n - 2$, см. табл. 1) можно выполнить по формуле [4,9]:

$$\sigma_f = \frac{\text{median} \left| a_j(k) - \text{median} \{ a_j(k) \} \right|}{0.6745} \quad (33)$$

Данная оценка является *робастной* [4, 9] (в силу робастности самой медианы), т.е. устойчивой к выбросам в сигналах (выбросы могут быть связаны, например, с кратковременными сбоями в работе аппаратуры). Данная оценка получена [9] в предположении о гауссовском распределении шума, и именно гауссовская модель, использованная в данной статье, является одной из наиболее распространенных на практике. Таким образом, для самого тонкого уровня расчетная формула для порога имеет вид:

$$\rho_j = \sigma_f \sqrt{2 \ln N} \quad (34)$$

Для остальных шумовых уровней формула записывается в следующем общем виде:

$$\rho_j = \frac{\sigma_f}{q(j)} \sqrt{2 \ln N} \quad (35)$$

где $q(j)$ - нормирующий коэффициент, зависящий от номера уровня разложения. Последующей задачей является определение данного нормирующего коэффициента. Он может быть найден из очевидных физических соображений (и это может быть доказано аналитически). При обработке сигналов в смеси с белым гауссовским шумом (с заданным СКО) набором октавных фильтров с единичными АЧХ в полосе пропускания СКО шума будет для каждого последующего уровня уменьшаться примерно в 2 раза по сравнению с предыдущим. Аналитически это записать в виде следующего соотношения:

$$\sigma_j = \frac{\sigma_f}{2^j} \quad (36)$$

Следует отметить, что в отличие от стандартной пороговой обработки (для вещественного случая) в данном случае пороговая обработка выполняется отдельно для вещественной и мнимой частей, после чего вычисляется обратное гармоническое вейвлет-преобразование от модифицированных вейвлет-коэффициентов для перехода во временную область. Известно, что для любой комплекснозначной последовательности x выполняется следующее соотношение:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{real(x)}^2 + \sigma_{imag(x)}^2 \quad (37)$$

где $\sigma_{real(x)}^2$ - дисперсия вещественной части последовательности x , а $\sigma_{imag(x)}^2$ - дисперсия мнимой части последовательности x . В рассматриваемом случае дисперсия комплексных вейвлет-коэффициентов определяется на основе дисперсий их вещественной и мнимой частей. Считая $\sigma_{real(x)}^2 \approx \sigma_{imag(x)}^2$ (поскольку вещественную и мнимую части ядра гармонического вейвлет-преобразования можно считать *приближенно* равными и *статистически независимыми*, что подтверждается экспериментами), получаем

$$\rho_j = \frac{\sigma_f}{\sqrt{2} \cdot 2^j} \sqrt{2 \ln N} \quad (38)$$

где ρ_j - порог, применяемый к вещественной и мнимой частям вейвлет-коэффициентов, σ_f оценивается по комплексным вейвлет-коэффициентам.

Рассмотрим работу процедуры пороговой обработки на примере зашумленного сигнала, показанного на рис. 5. Применим мягкую пороговую обработку, поскольку исходный сигнал не имеет изолированных особенностей (локальных выбросов и пр.). Как было установлено ранее (табл. 2), пороговую обработку необходимо применять к 4-м начальным уровням разложения. График очищенного от шума сигнала показана на рис. 7.

Существует несколько подходов, позволяющих оценить качество процедуры очистки от шума. Среди наиболее широко используемых можно выделить следующие:

- 1) Оценка СКО выделенного шума в результате проведенной процедуры шумоочистки и сравнение этой оценки с исходным истинным значением.
- 2) Статистические критерии проверки извлеченного шума на «белость» (шум априорно считается белым) такие, как, например, критерий на основе АКФ, описанный ранее в данной статье.

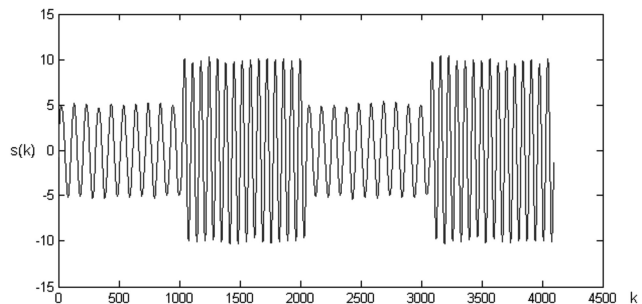


Рис. 7. Сигнал, очищенный от шума на основе мягкой пороговой обработки

Таблица 3. Оценивание качества работы процедуры очистки от шума сигнала, показанного на рис. 5

Истинное значение СКО шума	Оценка СКО выделенного шума	γ_j (%)
0.8	0.7951	1.62

Результаты, приведенные в табл. 3, свидетельствуют о высоком качестве процедуры очистки от шума.

Заключение

В статье был рассмотрен специфический класс вейвлетов - гармонические вейвлеты, описано их применение в задачах анализа осциллирующих сигналов и приведен быстрый алгоритм расчета вейвлет-коэффициентов. Было показано, что форма описанных вейвлетов и отдельных типов осциллирующих сигналов (мультигармонических) схожа, что открывает широкие возможности по их обработке. Кроме того, была введена количественная мера эффективности и получено точное выражение для матрицы гармонического вейвлет-преобразования. Наконец, была продемонстрирована процедура

очистки от шума на основе статистических критериев и специализированной пороговой процедуры, для которой требуется модификация аналитических выражений для порогов. Получены хорошие результаты по обработке зашумленного мультigarмонического сигнала с чередованием гармоник, что подтверждается данными, показанными в табл. 3.

Данная статья и проведенная научная работа поддержаны в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, а также Министерства образования и науки РФ (контракт 13.G25.31.0054).

Литература

1. Newland D.E. «Harmonic wavelet analysis», Proceedings of the Royal Society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences), vol. 443, no. 1917, pp. 203–225 (8 Oct. 1993).
2. Newland D.E. Random vibrations, spectral and wavelet analysis, 3rd edn. Harlow: Longman, and New York: John Wiley, 1993.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2007, 751 с.
4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / пер. с англ. под ред. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2005, 671 с.

5. Клионский Д.М., Орешко Н.И., Геппенер В.В., Экало А.В. Адаптивные методы в цифровой обработке сигналов, изд. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010, 160 с.

6. Барсесян А.А., Куприянов М.С., Степаненко В.В., Холод И.И. Технологии анализа данных. Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP БХВ-Петербург, 2007, 384 с.

7. Donoho D.L., Johnstone J.M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage *Biometrika* (1994) 81 (3): pp. 425-455.

8. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление: пер. с англ. М.: Мир, 1974, 406 с.

9. Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике 1984, Мир, 1984, 304 с.

THE APPLICATION OF HARMONIC WAVELETS TO A WIDE GROUP OF OSCILLATING SIGNALS

Oreshko N.I., Geppener V.V., Klionski D.M.

The paper is concerned with the application of harmonic wavelets to a wide group of oscillating signals. New approaches to the problems of discovering boundaries of typical processes in the original signal and signal denoising are illustrated. Denoising is carried out on the basis of modified thresholding. The matrix of the harmonic wavelet transform is deduced and a special criterion for estimating the effectiveness of using harmonic wavelets is introduced.

14-я Международная научно-техническая конференция и выставка

«Цифровая обработка сигналов и её применение -DSPA'2012»

Обработка и передача информации в системах телекоммуникаций

Секция 1: Теория сигналов и систем (Руководители – д.т.н., профессор Ю.С. Шинаков, д.т.н., профессор М.С. Немировский)

Одним из основных объектов исследования теории сигналов традиционно являются методы анализа-синтеза, модуляции-демодуляции, кодирования-декодирования сигналов с целью обеспечения высокой помехоустойчивости и скорости передачи информации в условиях воздействия интенсивных помех и межсимвольной интерференции. Возможности современных цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно, прибегая к оптимальным методам синтеза, преобразования и кодирования сигналов.

Наиболее актуальными задачами в этой области исследований являются методы и алгоритмы синтеза и оптимального приема сложных и сверхширокополосных сигналов, новых методов модуляции и кодирования, отвечающих все возрастающим требованиям к скорости и надежности цифровых систем передачи данных.



По итогам прошедшей конференции были представлены к награждению Дипломами лауреатов конкурса молодых ученых следующие работы:

1. Расширение класса кумулятивных кодов. Автор – Зуев А.Г., аспирант ОАО «ИНЭУМ» им. И.С. Брука.

2. Каскадные методы улучшения эффективности многопороговых декодеров символьных кодов. Автор – Овечкин Г.В., доцент Рязанского государственного радиотехнического университета.

3. Новые бифазные унимодулярные последовательности на основе циклических оптимальных бинарных последовательностей с двухуровневой автокорреляционной функцией. Авторы: Потехин Е.Н., Харитонов А.В., аспиранты Марийского государственного технического университета.

Секция 3: Обработка сигналов в системах телекоммуникаций (Руководитель, д.т.н., профессор – Ю.Н. Прохоров)

Работа секции проводилась по трем основным направлениям, сохраняющим актуальность с точки зрения дальнейшего внедрения современных информационных технологий реального времени в системах телекоммуникаций: обработка и передача речевых и звуковых сигналов, эхо-компенсация и борьба с замираниями, проблема межсимвольной интерференции (МСИ), реализация систем связи с применением ЦОС, том числе вопросы обработки сигналов при решении задач синхронизации и маршрутизации.

По итогам прошедшей конференции были представлены к награждению Дипломами лауреатов конкурса молодых ученых следующие работы:

1. Оценка вероятности битовой ошибки приема сигналов с квадратурной модуляцией неэталонными методами. Авторы: Дубов М.А., Полянин Ю.В., Стоянов Д.Д. - аспиранты Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

2. Алгоритм отбора тональных частотных компонент аудиосигналов микширующем транскодере. Автор – Кавальчук А.Н., аспирант Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

3. Одномерный метод нелокального усреднения для подавления шума в системах автоматического распознавания речевых команд. Авторы: Топников А.И., Новоселов С.А., Веселов И.А., аспиранты Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.