

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Кагаленко М.Б., аспирант Рязанского государственного радиотехнического университета,
e-mail: michael.kagalenko@gmail.com

Ключевые слова: гармонический сигнал, оценка частоты, метод наименьших квадратов, смещение и дисперсия оценки.

Введение

Задача оценки частоты гармонического сигнала по ограниченному числу дискретных действительных наблюдений возникает в самых разных областях техники, от радиолокации с синтезированной апертурой и многоканальной цифровой радиосвязи, до анализа речи и диагностики плазменных ускорителей. Для решения этой задачи широко используется метод максимального правдоподобия. «Google Scholar» находит более 900 ссылок на одну из первых статей, анализирующих влияние шума на точность оценки [1]. Это свидетельствует о практической важности изучения точности оценки частоты методом максимального правдоподобия.

В ряде работ [2, 3], чувствительность оценки к шуму оценивается путём анализа границы Крамера-Рао в форме, справедливой для несмещённой оценки. Однако для частот, близких к нулевой и к частоте Котельникова, оценка максимального правдоподобия является смещённой. Как известно [4], дисперсия смещённой оценки может быть меньше, чем граница Крамера-Рао для несмещённой оценки. В данной статье получены асимптотические оценки дисперсии, справедливые для всех значений частоты синусоидального сигнала. Полученные аналитические оценки согласуются с результатами численного моделирования методом Монте-Карло.

Постановка задачи

Исходные данные представляют собой вектор дискретного гармонического сигнала с частотой μ , амплитудой A_0 и фазой φ_0 , возмущённого аддитивным шумом \mathbf{n} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{n} \quad (1)$$

где

$[\mathbf{y}^{(0)}]_k = A_0 \cos(\mu x_k + \varphi_0)$, $x_k = k - (N+1)/2$ (здесь и далее $[\mathbf{a}]_k$ обозначает k -й элемент вектора \mathbf{a} , для всех векторов $k = 1 \dots N$). При таком представлении сигнала, частоте Котельникова соответствует $\mu = \pi$ рад/отсчёт.

Получены асимптотические выражения для смещения и дисперсии оценки частоты гармонического сигнала на фоне аддитивного стационарного гауссовского шума методом нелинейных наименьших квадратов. В отличие от ранее опубликованных результатов, представленные выражения справедливы для значений частоты на всём интервале измерения, включая значения как вблизи нуля, так и вблизи частоты дискретизации Котельникова. Полученные оценки согласуются с результатами статистического моделирования.

В дальнейшем подразумеваем, что \mathbf{n} представляет собой некоррелированный стационарный гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Введём косинус и синус векторы $\mathbf{c}(\mu)$, $\mathbf{s}(\mu)$, где $[\mathbf{c}(\mu)]_k = \cos(\mu x_k)$, $[\mathbf{s}(\mu)]_k = \sin(\mu x_k)$, а также единичные векторы

$$\mathbf{e}_c(\mu) = \mathbf{c}(\mu) / \|\mathbf{c}(\mu)\|$$

$$\mathbf{e}_s(\mu) = \mathbf{s}(\mu) / \|\mathbf{s}(\mu)\|$$

Невозмущённый синусоидальный сигнал можно представить в виде

$$[\mathbf{y}^{(0)}]_k = a \mathbf{e}_c(\mu) + b \mathbf{e}_s(\mu), \quad (2)$$

где

$$a = A \cos(\varphi), \quad b = A \sin(\varphi)$$

$$A^2 = A_0^2 \sqrt{N/2} (1 + \cos(2\varphi_0)) G(\mu)$$

$$\cos(2\varphi) = \frac{\cos(2\varphi_0) + G(\mu)}{1 + \cos(2\varphi_0) G(\mu)}$$

$$G(\mu) = \frac{\sin(N\mu)}{N \sin \mu}$$

Преимущество такой параметризации заключается в том, что при анализе чувствительности оценки частоты к помехам следует основываться на имеющей физический смысл норме сигнала. В представлении (2) норма равняется A .

Нахождение оценки частоты заключается в подборе параметров a , b , ν модели сигнала $\mathbf{y}^{(\text{model})}(a, b, \nu) = a \mathbf{e}_c(\nu) + b \mathbf{e}_s(\nu)$, минимизирующих Евклидову норму невязки, то есть разности между заданным сигналом \mathbf{y} и моделью

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^{(\text{model})}$$

Если шум $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, невязка обращается в нуль исключительно при $\nu = \mu$. Действительно, рассмотрим матрицу Вандермонда

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} e^{i\mu x_1} & e^{-i\mu x_1} & e^{i\nu x_1} & e^{-i\nu x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{i\mu x_N} & e^{-i\mu x_N} & e^{i\nu x_N} & e^{-i\nu x_N} \end{bmatrix}$$

Равенство нулю невязки \mathbf{r} подразумевает существование нетривиального решения $\|\mathbf{x}\| = 0$ линейной системы $\mathbf{V}_x = 0$, что противоречит полноте ранга \mathbf{V} при $\nu \neq \mu$ [5].

Так как модель зависит от неизвестного параметра ν нелинейно, мы имеем дело с методом нелинейных наименьших квадратов [6]. Кроме того, эта проблема оптимизации относится к классу задач сепарабельных наименьших квадратов, поскольку модель зависит от части параметров линейно. Метод проекции переменных [7] позволяет исключить линейные параметры из рассмотрения, что упрощает дальнейший анализ. При заданной частоте ν , находим $a^{(\min)}$, $b^{(\min)}$, минимизирующие невязку

$$a^{(\min)}, b^{(\min)} = \arg \max_{a,b} R(a, b, \nu). \tag{3}$$

Действительно, $\mathbf{e}_c \mathbf{e}'_c \equiv 0$, и поэтому

$$a^{(\min)}(\nu) = \mathbf{y} \mathbf{e}_c(\nu), \quad b^{(\min)}(\nu) = \mathbf{y} \mathbf{e}'_s(\nu).$$

Минимум невязки совпадает с максимумом

$$R(a, b, \nu) = \sqrt{\|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2}.$$

Используя метод проекции переменных, получим

$$R(\nu) = R(a^{(\min)}(\nu), b^{(\min)}(\nu), \nu) = \sqrt{(\mathbf{y} \mathbf{e}_c)^2 + (\mathbf{y} \mathbf{e}'_s)^2}. \tag{4}$$

Модифицированная периодограмма (4) была предложена в работе [8]. Величина $R(\nu)/\|\mathbf{y}\|$ представляет собой косинус угла между заданным сигналом \mathbf{y} и линейным пространством $\text{span}[\mathbf{c}(\nu), \mathbf{s}(\nu)]$, натянутым на векторы \mathbf{c}, \mathbf{s} [9]. Преимущество использования $R(\nu)$ вместо невязки заключается в сходстве этой величины с периодограммой

$$P(\nu) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sqrt{(\mathbf{y} \mathbf{c})^2 + (\mathbf{y} \mathbf{s})^2}.$$

Действительно, на половинных частотах дискретного преобразования Фурье $\nu_k^{\text{DFT}} = \pi k / N$ они совпадают:

$$P(\nu_k^{\text{DFT}}) = R(\nu_k^{\text{DFT}}),$$

так как $\|\mathbf{c}(\nu_k^{\text{DFT}})\|^2 = \|\mathbf{s}(\nu_k^{\text{DFT}})\|^2 = N/2$. Однако, в отличие от модифицированной периодограммы $R(\nu)$, максимум периодограммы $P(\nu)$ в общем случае не совпадает с искомой частотой даже в отсутствие возмущения $\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Вариация оценки частоты

Для анализа чувствительности оценки частоты к шуму найдём $B(\mu, \varphi)$ – квадрат нормы градиента оценки частоты сигнала ν как функции исходных данных \mathbf{y} , когда исходные данные являются синусоидой с частотой μ и фазой φ . Мы определили $\nu(\mathbf{y})$ как максимум $R(\nu)$, поэтому справедливо

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(R^2(\nu))}{\partial \nu} = (\mathbf{y} \mathbf{e}'_c(\nu))(\mathbf{y} \mathbf{e}'_c(\nu)) + (\mathbf{y} \mathbf{e}'_s(\nu))(\mathbf{y} \mathbf{e}'_s(\nu)) = F(\mathbf{y}, \nu) = 0.$$

По теореме о неявной функции

$$\frac{\partial(\nu)}{\partial y_k} = \frac{\partial F}{\partial y_k} / \frac{\partial F}{\partial \nu} = \frac{[\mathbf{e}'_c]_k(\mathbf{y} \mathbf{e}'_c) + [\mathbf{e}'_s]_k(\mathbf{y} \mathbf{e}'_s) + [\mathbf{e}_c]_k(\mathbf{y} \mathbf{e}'_c) + [\mathbf{e}_s]_k(\mathbf{y} \mathbf{e}'_s)}{(\mathbf{y} \mathbf{e}'_c)^2 + (\mathbf{y} \mathbf{e}_c)(\mathbf{y} \mathbf{e}''_c) + (\mathbf{y} \mathbf{e}'_s)^2 + (\mathbf{y} \mathbf{e}_s)(\mathbf{y} \mathbf{e}''_s)}.$$

При невозмущённом сигнале

$$\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y} - \mathbf{n} = a \mathbf{e}_c(\mu) + b \mathbf{e}'_s(\mu)$$

$$\left. \frac{\partial(\nu)}{\partial y_k} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(0)}} = - \frac{a(\mathbf{e}'_c)_k + b(\mathbf{e}'_s)_k}{a^2(\mathbf{e}'_c)^2 + b^2(\mathbf{e}'_s)^2},$$

$$B = \left\| \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \nu}{\partial y_k} \right)^2 = \frac{1}{a^2(\mathbf{e}'_c)^2 + b^2(\mathbf{e}'_s)^2},$$

так как $\mathbf{e}_c \mathbf{e}'_c \equiv \mathbf{e}_s \mathbf{e}'_s \equiv 0$. Поскольку

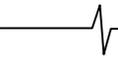
$$\mathbf{c}(\mu) \mathbf{c}(\mu) = \frac{N}{2} (1 + G(\mu));$$

$$\mathbf{s}(\mu) \mathbf{s}(\mu) = \frac{N}{2} (1 - G(\mu))$$

$$\mathbf{e}'_c = \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}} = (\mathbf{c}^2)^{-\frac{3}{2}} (\mathbf{c}'(\mathbf{c}^2) - \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}')),$$

\mathbf{e}'_s выражается аналогично, получаем

$$B^{-1}(\mu, \varphi) = \left\| \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(0)}} \right\|^2 = \frac{1}{4} \frac{A^2}{1 - G(\mu)^2} \left(\frac{1}{3} (N^2 - 1) - G(\mu) G''(\mu) - G'(\mu)^2 \frac{1 + G(\mu)^2}{1 - G(\mu)^2} + \cos(2\varphi) \left(G''(\mu) - \frac{1}{3} (N^2 - 1) G(\mu) + 2 \frac{G(\mu) G'(\mu)^2}{1 - G(\mu)^2} \right) \right), \tag{5}$$



Так как $B(\mu, \varphi) = B(\pi - \mu, \pi(N+1)/2 - \varphi)$, в дальнейшем достаточно рассмотреть интервал $\mu \in [0, \pi/2]$. При больших значениях $N \rightarrow \infty$

$$B \sim \frac{1}{N^3} (1 + 4G(\mu)\cos(2\varphi)) + O\left(\frac{1}{N^5}\right),$$

то есть квадрат градиента стремится к постоянной величине $\sim 1/N^3$ с наложенными на неё колебаниями с периодом и амплитудой, убывающими $\sim 1/N$.

В работе [3] выражение, эквивалентное $B(\mu, \varphi)/\eta$ (с точностью до суммирования по k , которое не было там проведено, и замены $A, \varphi \rightarrow A_0, \varphi_0$) приводится в качестве границы Крамера-Рао (5) для вариации оценки частоты ($\eta = A^2/N\sigma^2$ – отношение сигнал/шум по мощности). Заметим, однако, что при $\mu \rightarrow 0$

$$B^{-1} = \frac{1}{6300}(N^2 - 4)(19N^2 - 31 + \dots) + 4(4N^2 - 1)\cos(2\varphi) \cdot \mu^2 + O(\mu^4)$$

что нарушает условие регулярности теоремы Крамера-Рао [10]. В окрестности нулевого значения частоты такая оценка вариации не является правильной. Неадекватность «несмещённой» границы Крамера-Рао вблизи сингулярной точки, где производная модели сигнала обращается в нуль, отмечена в ряде публикаций [11, 12]. А в статье [13] предложен метод оценки вариации вблизи особой точки для схожей задачи – оценки максимального правдоподобия угла приёма плоской волны антенной решёткой. Покажем, как применить этот метод в нашей задаче.

Ключевой идеей является возможность устранить обращение производной в нуль с использованием замены переменной. Пусть

$$x = \cos(\mu) \quad (7)$$

– новая независимая переменная. Тогда

$$D(x, \varphi) = \left\| \frac{\partial x}{\partial y} \right\|^2 = B(\mu(x), \varphi) \sin^2 \mu(x) \quad (8)$$

конечно на всём интервале $-1 \leq x \leq 1$. Интересно отметить, что $B(\arccos x, \varphi)$ является рациональной функцией x , поскольку $G(\arccos x) = U_{N-1}(x)/N$ – многочлен Чебышева II рода с точностью до множителя. Для новой переменной выполняются условия регулярности, поэтому оценка x методом максимального правдоподобия является асимптотически нормальной. При $N=1$ функция распределения оценки x удовлетворяет нормальному закону

$$f_{\text{pdf}}(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(x_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2(x_0)}}$$

где

$$\sigma_x^2(x_0) = \frac{D(x_0, \varphi)}{\eta}$$

Вариацию оценки частоты $\text{Var}(v)$ позволяют вычислить следующие выражения для математического ожидания частоты и её квадрата:

$$E_v = \int_{-1}^1 (\arccos x) f_{\text{pdf}}(x, x_0) dx \quad (9)$$

$$E_{v^2} = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2 f_{\text{pdf}}(x, x_0) dx, \quad (10)$$

тогда $\text{Var}(v) = E_{v^2} - E_v^2$. Хотя интегралы (9), (10) и не удаётся выразить через известные элементарные и специальные функции, метод перевала [14] даёт для них асимптотические оценки благодаря малости σ_x . Наиболее простой вид асимптотические оценки имеют тогда, когда частота невозмущённого исходного сигнала μ достаточно далека от границ интервала $[0, \pi]$, иными словами, когда

$$|x_0| - 1 \gg \sigma_x(x_0) \quad (11)$$

$x_0 = \arccos \mu$. Для вариации оценки частоты в этом случае получаем

$$\text{Var}(v) \cong \frac{\sigma_x^2}{1-x_0^2} = \frac{B(x, \varphi)}{\eta}, \quad (12)$$

что совпадает с уже известной несмещённой границей Крамера-Рао из [3].

Вариация оценки частоты отклоняется от «несмещённой» (не учитывающей особенность в нуле) границы Крамера-Рао при $|x_0| - 1 \sim \sigma_x(x_0)$, при этом μ находится на расстоянии менее $1/N$ от границ интервала $[0, \pi]$. Непосредственное использование метода перевала для E_v исключается особенностью в нуле производной функции $\arccos x$, поэтому для получения оценки выделим особенность в отдельный интеграл, который выражается через вырожденные гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} E_v &= \int_{-1}^1 (\arccos x - \sqrt{2}\sqrt{1-x}) f_{\text{pdf}}(x, x_0) dx + \\ &+ \sqrt{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x} f_{\text{pdf}}(x, x_0) dx \cong \\ &\cong \int_{-\infty}^1 (\arccos x_0 - \sqrt{2}\sqrt{1-x_0}) f_{\text{pdf}}(x, x_0) dx + \\ &+ \sqrt{2\sigma_x} \text{I}\left(\frac{1-x}{\sigma_x}\right) = \\ &= (\arccos x_0 - \sqrt{2}\sqrt{1-x_0}) \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x_0-1}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) + \\ &+ \sqrt{2\sigma_x} \text{I}\left(\frac{1-x}{\sigma_x}\right) \end{aligned}$$

где интеграл

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-\frac{(t-y)^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\frac{3}{4}}} \left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Phi\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{y^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + y \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Phi\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{y^2}{2}\right) \right)$$

получаем, используя (3.462.1) и (9.240) из [15]. Кроме того,

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

так что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (E_v) = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sqrt{\sigma_x(0)}$$

Асимптотическую оценку для E_{v^2} получаем непосредственно методом перевала

$$E_{v^2} \cong \int_{-\infty}^1 \left(\arccos^2 x_0 - \frac{2 \arccos x_0}{\sqrt{1-x^2}} (x-x_0) \right) f_{pdf}(x, x_0) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \arccos^2 x_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x_0-1}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) + \sigma_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\arccos x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} e^{-\frac{(x_0-1)^2}{2\sigma_x^2}}$$

и

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} E_{v^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x(0)$$

Качественный анализ оценки и численные тесты

Рис.1 иллюстрирует поведение дисперсии оценки частоты $\text{Var}(v)$ в зависимости от частоты исходного сигнала μ на интервале $0 < \mu < \pi/2$. В зависимости от оценки дисперсии от частоты можно качественно выделить три зоны, проиллюстрированные пунктирными линиями на рис. 1: плато при $\mu \rightarrow 0$, убывание $1/\mu^2$ и плато при $\mu > 1/N$. Плато при $\mu \rightarrow 0$ не описывается опубликованными ранее выражениями для границы Крамера-Рао.

Численные эксперименты показывают согласие полученных оценок дисперсии с результатами моделирования методом Монте-Карло. Чтобы оценить дисперсию оценки частоты, с помощью программы оптимизации отыскивался максимум $R(v)$ для 1000 реализаций сигнала с добавленным псевдослучайным шумом.

На рис. 2 показаны вычисленные значения вариации оценки частоты как функции частоты исходного сигнала μ при двух значений отношения сигнал/шум η . Сплош-

ными линиями показаны полученные асимптотические оценки, пунктирной линией – граница Крамера-Рао для несмещённой оценки.

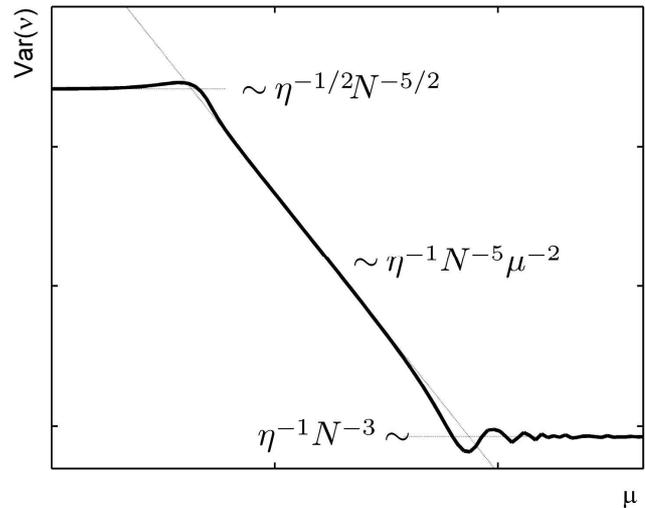


Рис.1. Три зоны поведения дисперсии

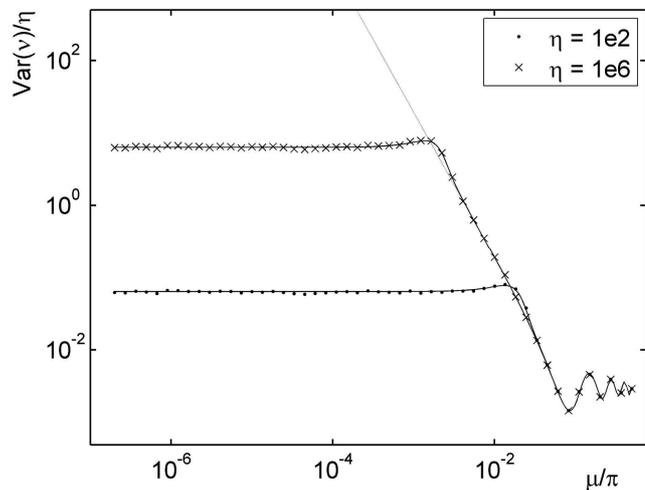


Рис. 2. Вариация оценки частоты при $\varphi = 0,3, N = 16$

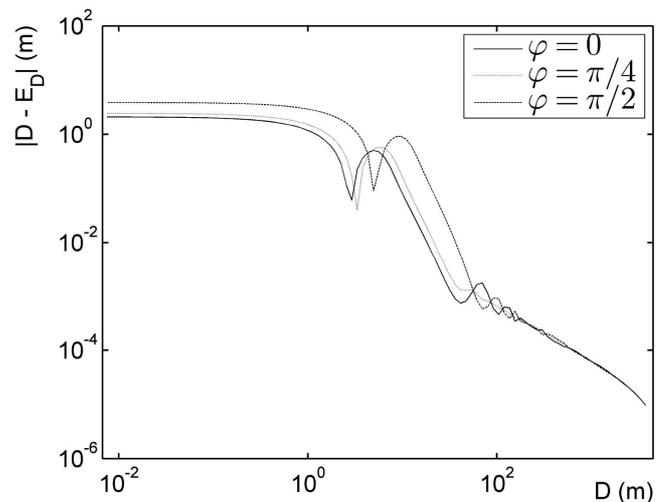


Рис. 3. Смещение оценки расстояния ЧМ дальнометром

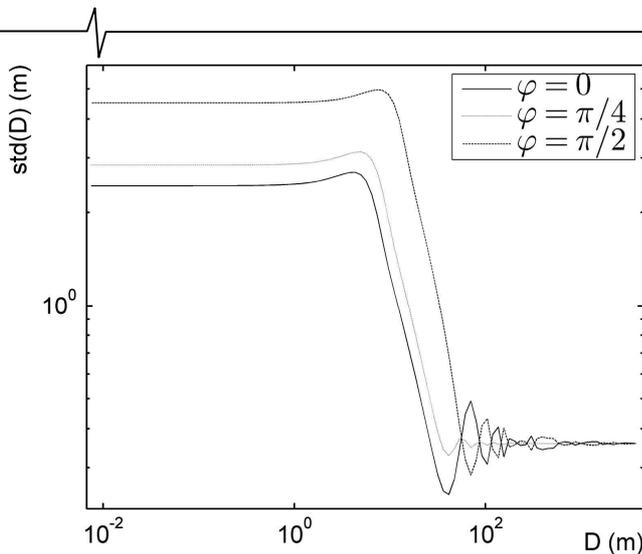


Рис. 4. Стандартное отклонение оценки расстояния ЧМ дальномером

Пример анализа конкретной измерительной системы

Рассмотрим ЧМ дальномер, в котором излучаемый сигнал перестраивается с шагом $\Delta f = 10$ КГц, при этом полный диапазон модуляции включает $N = 256$ шагов. В этом случае, максимальной частоте π рад/отсчёт соответствует расстояние $D_{\max} = c/4\Delta f \cong 7,50$ км,

c – скорость света. При соотношении сигнал/шум 15 дБ, то есть $\eta = 31,62$, стандартное отклонение найденного методом наименьших квадратов расстояния показано на рис.4 для трёх значений фазы сигнала биений. Стандартное отклонение оценки составляет около 40 см на большей части интервала измерения, но начинает резко возрастать в районе 100 метров. Наибольшее значение стандартное отклонение принимает на расстоянии 6,5 метра, где оно составляет около 5 м. Рост стандартного отклонения прекращается, когда оно становится того же порядка, что и измеряемое расстояние. Как иллюстрирует рис.3, в той же области перестаёт меняться математическое ожидание оценки расстояния, то есть смещение оценки становится существенным.

Заключение

Проведённый анализ и численное моделирование показывают, что граница Крамера-Рао для несмещённой оценки даёт необоснованно пессимистические предсказания чувствительности к шуму метода нелинейных наименьших квадратов вблизи границ интервала значений частоты. Полученные аналитические выражения для смещения и вариации оценки частоты можно использовать для анализа чувствительности к шуму ЧМ дальномеров, а также при проверке правильности реализации алгоритма нелинейных наименьших квадратов.

Литература

1. Rife D., Boorstyn R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations // IEEE Transactions on Information Theory. 1974. Vol. 20, № 5. P. 591 - 598.
2. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound // IEEE Transactions on Acoustics,

Speech and Signal Processing. 1989. Vol. 37, № 5. P. 720-741.

3. Dilaveroglu E. Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998. Vol. 46, № 2. P. 463–474.

4. Stoica P., Moses R.L. On biased estimators and the unbiased Cramer-Rao lower bound // Signal Processing. 1990. Vol. 21, № 4. P. 349-350.

5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989.

6. Kay S.M. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993.

7. Golub G., Pereyra V. Separable nonlinear least squares: the variable projection method and its applications // Inverse Problems. 2003. Vol. 19, № 2. P. R1-R26.

8. Vaníček P. Approximate spectral analysis by least-squares fit // Astrophysics and Space Science. 1969. Vol. 4, № 4. P. 387–391.

9. Björck A., Golub G.H. Numerical methods for computing angles between linear subspaces // Mathematics of computation. 1973. Vol. 27, № 123. P. 579–594.

10. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ./Под ред. академика АН Колмогорова. М.: Мир, 1975.

11. Basu S., Bresler Y. A global lower bound on parameter estimation error with periodic distortion functions // Information Theory, IEEE Transactions on. 2000. Vol. 46, № 3. P. 1145–1150.

12. Bell K.L., Ephraim Y., Van Trees H.L. Explicit Ziv-Zakai lower bound for bearing estimation // Signal Processing, IEEE Transactions on. 1996. Vol. 44, № 11. P. 2810–2824.

13. Bashan E., Weiss A.J., Bar-Shalom Y. Estimation near Zero Information points: angle-of-arrival near the end-fire // Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on. 2007. Vol. 43, № 4. P. 1250–1264.

14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е. М.: Наука, 1965.

15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963.

THE ACCURACY OF THE NONLINEAR LEAST SQUARES ESTIMATE OF THE FREQUENCY OF A HARMONIC SIGNAL

Kagalenko M.B.

This article presents the asymptotic expressions of bias and variance for the nonlinear least squares estimate of the frequency of a harmonic signal with the additive stationary Gaussian noise. In contrast with the previously published results, we present the expressions that are valid for all values of frequency within the measurement interval, including the values both near zero and near the Kotelnikov discretization frequency. The variation and bias estimates are in agreement with the results of Monte-Carlo simulations.